Classe de Terminale S

Démonstrations à connaître **Géométrie - Probabilités**

Restitution organisée des connaissances

Pour chaque question nous rappelons la démonstration et nous essayons de proposer une mise en situation… Lorsqu'il n'y a pas de démonstartion demandée vous pouvez inventer une question…

1. Géométrie

1-a : Module et argument d'un produit, d'un quotient

Les démonstrations sont relativement simples, nous ne la ferons que pour le quotient, pour le produit c'est pareil ; on rappelle que $|z|^2 = z\bar{z}$.

Soient deux complexes z et z' et leur quotient $\frac{z}{z'}$, le conjugué de $\frac{z}{z'}$ est $\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$ d'où

$$\left|\frac{z}{z'}\right|^2 = \left(\frac{z}{z'}\right)\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{z\bar{z}}{z'\bar{z}'} = \frac{|z|^2}{|z'|^2}.$$

L'égalité des carrés donne bien sûr l'égalité des modules puisuqe ces derniers sont positifs.

Pour l'argument on a $\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) = \arg(z)\ (2\pi)$ si z est l'affixe du point M et $\vec{u}$ le vecteur directeur de l'axe horizontal. Par ailleurs

$$\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right) = \left(\overrightarrow{OM},\vec{u}\right) + \left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) = -\left(\vec{u},\overrightarrow{OM}\right) + \left(\vec{u},\overrightarrow{OM'}\right) = -\arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)\ ;$$

cherchons maintenant

$$\arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(\frac{r'e^{i\theta'}}{re^{i\theta}}\right) = \arg\left(\frac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}\right) = \theta' - \theta = \arg(z') - \arg(z) = \left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'}\right)\ (2\pi).$$

<u>Exercice</u>

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ du plan. On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \left\|\vec{w}\right\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u},\vec{w}\right)$ défini à $2k\pi$ près.

Dans cet exercice, on prend comme prérequis le résultat suivant :

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors arg(zz') = arg(z) + arg(z') (à $2k\pi$ près).

1. Soit z et z' sont deux nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$.

On note A et B les points d'affixes respectives $2i$ et -1. A tout nombre complexe z, distinct de $2i$, on associe le nombre complexe $Z = \frac{z+1}{z+2i}$.

2. Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z dans le cas où $z \neq -1$.

3. Déterminer et représenter graphiquement, en utilisant la question précédente, les ensembles de points suivants :

a. L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel négatif.

b. L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur.

1-b : Résolution dans $\mathbb{C}$ des équations du second degré

La résolution est identique à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$: on a donc l'équation $az^2 + bz + c = 0$ où a, b et c sont des réels. On calcule $\Delta = b^2 - 4ac$; si Δ est positif c'est comme dans $\mathbb{R}$, sinon $\Delta = -\Delta' = i^2\Delta' \Rightarrow \sqrt{\Delta} = i\sqrt{\Delta'}$; on a donc les solutions $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{(-\Delta)}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{(-\Delta)}}{2a}$.

On remarque également que les deux racines sont conjuguées (ceci n'est valable que si a, b et c sont réels) .

Exercice 1

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré $z^2 + 2(1+\cos u)z + 2(1+\cos u) = 0$ où u est un pramètre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; \pi]$.

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$.

2. Déterminer le module et l'argument des solutions.

Exercice 2

Rechercher tous les couples (z_1, z_2) de nombres complexes satisfaisant aux conditions : $\begin{cases} z_1 z_2 = \frac{1}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$.

Donner la forme trigonométrique de chacun des nombres ainsi obtenus.

Exercice 3

1. Quelle est l'équation du second degré de la forme $z^2 + az + b = 0$ dont les solutions sont $z_1 = re^{i\theta}$ et $z_2 = re^{-i\theta}$?

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 - 2Z\cos\theta + 1 = 0$.

3. En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 - 2z^2\cos\theta + 1 = 0$. On donnera les solutions sous forme trigonométrique.

4. Les quatre solutions de l'équation précédente sont les affixes de quatre points du plan complexe. Pour quelle(s) valeur(s) de θ ces quatre points sont ils les sommets d'un carré ?

5. Décomposer en produit de deux facteurs du second degré le polynôme $P(x) = x^4 - 2x^2\cos\theta + 1$.

1-c : Écriture complexe des transformations

Les transformations concernées sont :

translation : M a pour image M' dans la translation de vecteur $\vec{u}$ si $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' - z = u \Leftrightarrow z' = z + u$;

homothétie de centre $\Omega(\omega)$ de rapport k : $\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M} \Leftrightarrow z' - \omega = k(z-\omega) \Leftrightarrow z' = kz - k\omega + \omega$;

rotation de centre $\Omega(\omega)$, d'angle θ :

$$\begin{cases} \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) = \theta \\ \Omega M = \Omega M' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg\left(\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right) = \theta \\ \left|\dfrac{z'-\omega}{z-\omega}\right| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z'-\omega}{z-\omega} = e^{i\theta} \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega) \Leftrightarrow z' = e^{i\theta}z - e^{i\theta}\omega + \omega .$$

Comme vous êtes observateurs vous vous dites que homothétie et rotation ont une écriture quasiment identique, du style $z' - \omega = a(z-\omega)$, sauf que a est réel pour l'homothétie et imaginaire de module 1 pour la rotation. Que se passe-t-il pour un a complexe quelconque, eh bien on a la composée d'une homothétie de rapport positif, $k = |a|$, et d'une rotation d'angle $\theta = \arg(a)$. C'est une *similitude directe* de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.

Exercice

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ du plan. On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et $\arg(z) = \left(\vec{u}, \vec{w}\right)$ défini à $2k\pi$ près.

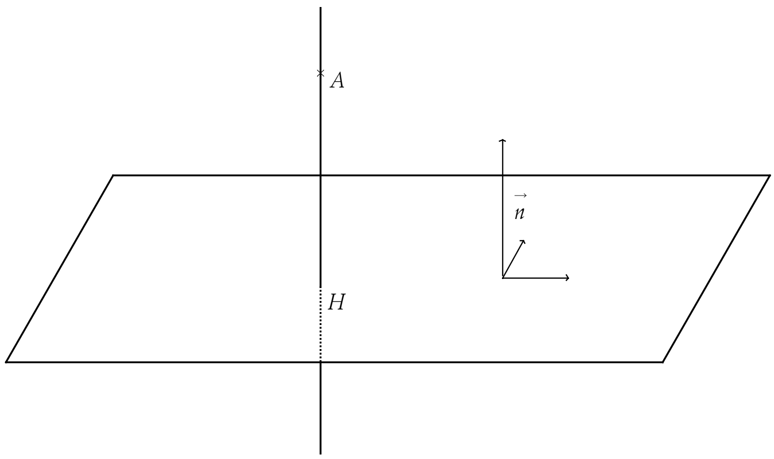
1. Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes m, n et p tels que $m \neq n$ et $n \neq p$.

a. Démontrer que $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right) = \left(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}\right)$ à $2k\pi$ près.

b. Interpréter géométriquement $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

2. En déduire la traduction complexe d'une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle de mesure θ, θ désignant un nombre réel.

1-d : Distance d'un point à un plan



Soit $A(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace, P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et H le projeté orthogonal de A sur P. Il faut donc calculer la distance AH.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est normal à P ; le vecteur $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, il existe donc t réel tel que $\overrightarrow{AH} = t\vec{n}$.

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{AH}.\vec{n}$ en posant que H a pour coordonnées (x, y, z) :

$$\overrightarrow{AH}.\vec{n} = a(x-x_H)+b(y-y_A)+c(z-z_A) = ax+by+cz-ax_A-by_A-cz_A = -d-ax_A-by_A-cz_A \;;$$

par ailleurs comme $\overrightarrow{AH} = t\vec{n}$ on a $\overrightarrow{AH}.\vec{n} = \pm\left\|\overrightarrow{AH}\right\|.\left\|\vec{n}\right\| = \pm AH.\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. On a donc finalement $AH = \dfrac{\left|ax_A+by_A+cz_A+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ (les valeurs absolues apparaissent pour assurer que AH est positif).

<u>Remarque</u> : la démonstration donnant la distance d'un point à une droite dans le plan est exactement la même ; on obtient alors $AH = \dfrac{\left|ax_A+by_A+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ où la droite a pour équation $ax + by + c = 0$.

<u>Exercice</u>

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les points A, B et C ont pour coordonnées :

$$A(-1\,;2\,;1),\ B(1\,;-6\,;-1),\ C(2\,;2\,;2).$$

1. Montrer que A, B et C ne sont pas alignés et que le vecteur $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC).

2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

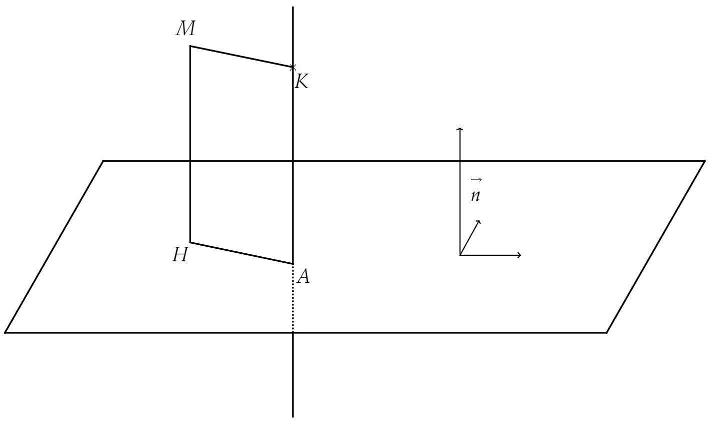
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) orthogonale au plan (ABC) passant par le point $D(0\,;1\,;-1)$.

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H avec le plan (ABC). Quelle est la distance de D au plan (ABC) ¿.

5. **Démonstration de cours** : démontrez que la distance de D au plan (ABC) est $d = \dfrac{\left|ax_D+by_D+cz_D+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ où $ax+by+cz+d=0$ est une équation cartésienne de (ABC). Retrouvez ainsi le résultat précédent.

6. Soit M un point quelconque de (DC) de paramètre t (soit $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DC}$, t réel) ; vérifier que la distance AM est minimale lorsque $t = -\dfrac{5}{14}$. En déduire les coordonnées du point Q, projeté orthogonal de A sur (DC).

1-e : Distance d'un point à une droite



On prend une droite (d) passant par A, de vecteur directeur $\vec{n}$ et un point M de l'espace. Soit (P) le plan passant par A et orthogonal à $\vec{n}$, on appelle K le projeté orthogonal de M sur (d) et H le projeté de M sur (P) ; on a alors $MK^2 = KH^2 - MH^2$ avec Pythagore, mais comme $AKMH$ est un rectangle, $MA = HK$. On en déduit $MK^2 = MA^2 - MH^2$: chacun de ces termes se calcule facilement et c'est donc fini…

Exercice

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

a. Soient u, v, w, x_0, y_0 des nombres réels tels que $u^2+v^2\neq 0$. Etablir une formule donnant la distance du point $M_0(x_0,y_0)$ à la droite d'équation $ux+vy+w=0$.

b. Soient a, b, c des réels strictement positifs, on considère les points $A(a,0)$ et $B(0,b)$. Calculer la distance du point O à la droite (AB).

2. Soient a, b, c des réels strictement positifs ; on considère les points $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

a. Calculer la distance du point C à la droite (AB).

b. Montrer la relation

$$\text{Aire}(ABC)^2=\text{Aire}(OAB)^2+\text{Aire}(OBC)^2+\text{Aire}(OCA)^2.$$

1-f : Caractérisation barycentrique d'une droite, d'un plan, d'un segment, d'un triangle

D'une manière générale le barycentre de deux points A et B affectés des coefficients α et β est tel que $\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$. Comme on peut toujours diviser les coefficients par un même nombre, on peut choisir $\alpha+\beta=1$, ce qui donne $\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}$, soit la définition de la colinéarité de $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$. De $\alpha+\beta=1$ on tire $\beta=1-\alpha$, soit

$$\alpha\overrightarrow{AG}+(1-\alpha)\overrightarrow{BG}=\vec{0}$$

où α est un réel quelconque. Ceci caractérise alors G comme un point quelconque de la droite (AB) lorsque α parcourt $\mathbb{R}$.

Particulièrement si $0\leq\alpha\leq 1\Leftrightarrow 0\leq 1-\alpha\leq 1\Leftrightarrow 0\leq\beta\leq 1$ on voit avec $\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}$ que G parcourt le segment $[AB]$; si $0\leq\alpha\Leftrightarrow\beta\geq 1$, G parcourt la demi-droite « après » B et si $\alpha\geq 1\Leftrightarrow\beta\leq 0$, G parcourt la demi-droite « avant » A.

Dans un plan la situation est tout à fait semblable, mis à part qu'un plan est défini par trois points non alignés A, B, C ; on considère alors le barycentre G de $\{(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)\}$ en prenant tout de suite $\alpha+\beta+\gamma=1$. On a donc

$$\alpha\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}+\gamma\overrightarrow{CG}=\vec{0}\Leftrightarrow(1-\beta-\gamma)\overrightarrow{AG}+\beta\overrightarrow{BG}+\gamma\overrightarrow{CG}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{AG}+\beta\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GA}\right)+\gamma\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GA}\right)=\vec{0},$$

soit

$$\overrightarrow{AG}=\beta\overrightarrow{AB}+\gamma\overrightarrow{AC}$$

avec β et γ parcourant $\mathbb{R}$. G parcourt alors le plan dans son ensemble.

Le même raisonnement que précédemment nous permet alors de dire que lorsque β et γ parcourent l'intervalle $[0\,;1]$, G est à l'intérieur du triangle ABC (en fait dans ce cas les coordonnées de G dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ sont précisément β et γ). Les autres régions du plan pouvant être caractérisées de manière semblable.

Exercice 1

Voici un très joli exercice permettant de caractériser le point d'intersection des bissectrices d'un triangle comme barycentre des sommets du triangle.

On considère dans $\mathbb{C}$ les complexes z_1 et z_2 de modules 1 et d'arguments α et β.

1. Montrer que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul.

2. A et B sont deux points du plan complexe d'affixes respectives a et b. Calculer en fonction de a et b l'affixe z du barycentre G de $\{(A,|b|),(B,|a|\}$.

3. Montrer que $\overrightarrow{OG}$ est un vecteur directeur de la bissectrice de l'angle des demi-droites de vecteurs directeurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

4. On considère un triangle UVW et on note les longueurs des côtés $UV=w$, $VW=u$ et $WU=v$. Montrer que le centre du cercle inscrit dans UVW est le barycentre de $\{(U,u),(V,v),(W,w)\}$.

Exercice 2

Voici un autre exercice dans le même style mais sans utiliser les complexes.

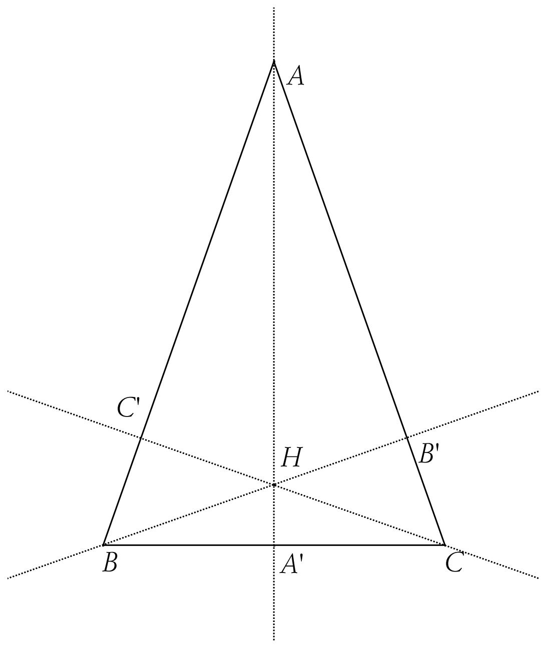
On considère un triangle isocèle ABC de côtés $BC = 2a$, $AC = AB = 3a$, a étant un réel strictement positif. On note A' le milieu de $[BC]$ et H l'orthocentre du triangle.

1. Soit α une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Montrer que $\cos\alpha=\dfrac{7}{9}$.

2. Soit B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Calculer $\dfrac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$. En déduire deux réels u et v tels que B' soit le barycentre du système $\{(A,u);(C,v)\}$.

3. En s'aidant de la deuxième question, déterminer trois réel a, b, c tels que H soit le barycentre du système $\{(A,a);(B,b);(C,c)\}$.

Correction



$BC = 2a, AC = AB = 3a$

1. Un petit coup d'Al-Kashi donne immédiatement :

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.\cos(\widehat{BAC})\Leftrightarrow 4a^2=9a^2+9a^2-18a^2\cos(\widehat{BAC})\Leftrightarrow \cos(\widehat{BAC})=\frac{14a^2}{18a^2}=\frac{7}{9}.$$

2. Le calcul de $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}}$ revient à celui de $-\frac{B'A}{B'C}$ puisque les vecteurs $\overrightarrow{B'A}$ et $\overrightarrow{B'C}$ sont de sens contraire.

Dans le triangle *ABB'* on a $\frac{AB'}{AB} = \cos\alpha \Leftrightarrow AB' = \frac{7}{9}.3a = \frac{7}{3}a$; comme $AC = AB' + B'C$ on a $B'C = 3a - \frac{7}{3}a = \frac{2}{3}a$. On a donc $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = -\frac{7a/3}{2a/3} = -\frac{7}{2}$.

Evidemment les valeurs algébriques ne sont que la traduction des vecteurs correspondants : $\frac{\overline{B'A}}{\overline{B'C}} = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow 2\overline{B'A} = -7\overline{B'C} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{B'A} + 7\overrightarrow{B'C} = \vec{0}$ et donc *B'* est le barycentre du système $\{(A, 2) ; (C, 7)\}$.

3. Comme la figure est symétrique par rapport à (*AA'*) et que (*AA'*) est une hauteur, il faut que $b = c$: dans ce cas on a H barycentre de $\{(A, a) ; (B, b) ; (C, b)\}$, soit celui de $\{(A, a) ; (A', b+c)\}$ et H est sur (*AA'*).

Par ailleurs H est sur (*BB'*), donc il faut regrouper $\{(A, a) ; (C, b)\}$ en *B'*, il suffit donc de prendre

$$H = \text{barycentre de } \{(A, 2) ; (B, 7) ; (C, 7)\}.$$

2. Probabilités

2-a : Formule des probabilités totales (c)

Propriété et démonstration

On note $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ la probabilité de l'événement B sachant que A est réalisé. Soit E l'univers de possibilités et une famille d'ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$ formant une partition de E (la réunion de tous ces ensembles est E et leurs intersections deux à deux est vide).

On a alors $P(B) = P\left((B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)\right)$; comme $A_i \cap A_j$ lorsque i est différent de j, on a également $(B \cap A_i) \cup (B \cap A_j) = \varnothing$. Par conséquent $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n)$.

Utilisons les probabilités conditionnelles : $P_{A_i}(B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(A_i)} \Leftrightarrow P(A_i \cap B) = P_{A_i}(B).P(A_i)$ pour chaque i. Il vient finalement $P(B) = P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + ... + P_{A_n}(B)P(A_n)$.

Exercice

Dans une classe de trente élèves sont formés un club photo et un club de théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard. On appelle P l'événement : « l'élève fait partie du club photo » et T l'événement : « l'élève fait partie du club théâtre ». Montrer que les événements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. On appelle T_1 l'événement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $P(T_1)$.

b. On appelle T_2 l'événement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $P_{T_1}(T_2)$ puis $P_{\overline{T_1}}(T_2)$. En déduire $P(T_2 \cap T_1)$ et $P(T_2 \cap \overline{T_1})$.

b. On appelle T_0 l'événement : « L'élève pris en photo appartienne au club théâtre ».

Démonstration de cours : Démontrer que $P(T_0) = P_{T_1}(T_0)P(T_1) + P_{T_2}(T_0)P(T_2)$.

Calculer $P(T_0)$.

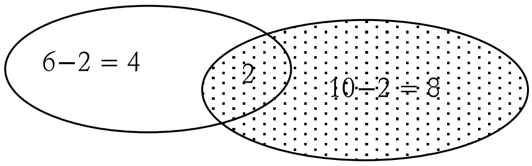
3. Toutes les semaines on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.

Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

Correction

Club photo : 10 membres, club théâtre : 6 membres. Deux élèves sont membres des deux clubs à la fois.

1. Avec des patates le résultat est immédiat.



$P(\mathrm{P}) = 10/30 = 1/3$ et $P(\mathrm{T}) = 6/30 = 1/5$.

On a alors $P(\mathrm{P}\cap\mathrm{T})=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ et $P(\mathrm{P})\times P(\mathrm{T})=\frac{1}{3}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$ donc les événements sont indépendants.

Ceci est un pur hasard de calcul, si vous changez par exemple le nombre d'élèves dans la classe ça ne marche plus…

2. a. $P(T_1)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$.

b. $P_{T_1}(T_2)=\frac{1}{9}$: il reste à tirer un membre du club théâtre parmi les neuf restants.

$P_{\overline{T_1}}(T_2)=\frac{2}{9}$: si $\overline{T_1}$ est réalisé le premier élève ne fait pas de théâtre, il reste deux choix parmi 9 restants.

$P(T_2\cap T_1)=P_{T_1}(T_2)P(T_1)=\frac{1}{9}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{45}$; $P(T_2\cap\overline{T_1})=P_{\overline{T_1}}(T_2)P(\overline{T_1})=\frac{2}{9}\times\frac{4}{5}=\frac{8}{45}$.

b. Avec les probabilités totales, on a :

$$P(T_2)=P\left((T_1\cap T_2)\cup(\overline{T_1}\cap T_2)\right)=P\left(T_1\cap T_2\right)+P\left(\overline{T_1}\cap T_2\right)=P_{T_1}(T_2)P(T_1)+P_{\overline{T_1}}(T_2)P(\overline{T_1}).$$

Donc $P(T_2)=\frac{1}{45}+\frac{8}{45}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$.

Le calcul aurait pu se faire directement avec un arbre.

3. Loi binomiale : $n=4$, $p=1-P(T_2)=\frac{4}{5}$; la probabilité cherchée est, en posant X = nombre de fois où l'élève photographié n'appartient pas au club théâtre : $P(X=4)=\binom{4}{4}p^4(1-p)^0=\frac{4^4}{5^4}=\frac{256}{625}$.

2-b : Propriétés des $\binom{n}{p}$ (c) (triangle de Pascal et binôme de Newton).

Propriété et Exercice

1. **Démonstration de cours**. Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1\le k<n$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2\le k<n-1$, on a :

$$\binom{n-2}{k-2}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}=\binom{n}{k}.$$

3. On considère deux entiers naturels n et k tels que $2\le k<n-1$. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches.

On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne. On appelle A l'évènement « au moins une boule rouge a été tirée ».

a. Exprimer en fonction de n et de k la probabilité de l'évènement $\overline{\mathrm{A}}$, contraire de A. En déduire la probabilité de A.

b. Exprimer d'une autre manière la probabilité de l'évènement A et montrer, à l'aide de la formule obtenue à la question 2, que l'on retrouve le même résultat.

<u>Correction</u>

1. Démonstration : il est plus simple d'utiliser $\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k(k-1)...2.1}$ que $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, la mise au même dénominateur étant plus visible.

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k} \Leftrightarrow \frac{(n-1)...(n-1-k+1+1)}{(k-1)...2.1}+\frac{(n-1)...(n-1-k+1)}{k(k-1)...2.1}=\frac{n...(n-k+1)}{k(k-1)...2.1}\ ;$$

le dénominateur commun apparaît alors : $k!$

Il suffit donc de multiplier la première fraction par k en haut et en bas, ce qui donne

$$\frac{k(n-1)...(n-k+1)+(n-1)...(n-k)}{k!}=\frac{n...(n-k+1)}{k!}.$$

On peut mettre $(n-1)...(n-k+1)$ en facteur du numérateur de la fraction de gauche :

$$\frac{(n-1)...(n-k+1)\left[\cancel{k}+n-\cancel{k}\right]}{k!}=\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$$

et c'est fini.

2. Réécrivons $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ un rang plus bas pour n et pour k : $\binom{n-2}{k-2}+\binom{n-2}{k-1}=\binom{n-1}{k-1}$;

réécrivons $\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$ un rang plus bas pour n mais pas pour k : $\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}=\binom{n-1}{k}$;

ajoutons les deux lignes : $\binom{n-2}{k-2}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$.

3. Dans l'urne on a 2 boules rouges et $n-2$ boules blanches ; il y a $\binom{n}{k}$ tirages simultanés possibles de k boules de l'urne.

a. A = « au moins une boule rouge a été tirée » ; $\overline{\mathrm{A}}$ = « aucune boule rouge n'a été tirée » = « les k boules tirées sont blanches » : il y a $\binom{n-2}{k}$ manières de faire et $P(\overline{\mathrm{A}})=\frac{\binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}}$.

On a donc $P(\mathrm{A})=1-\frac{\binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}}=\frac{\binom{n}{k}-\binom{n-2}{k}}{\binom{n}{k}}$.

b. A peut se produire si on tire 1 rouge et $k-1$ blanches, nombre de manières : $\binom{2}{1}\binom{n-2}{k-1}=2\binom{n-2}{k-1}$,

ou 2 rouges et $k-2$ blanches : nombre de manières : $\binom{2}{2}\binom{n-2}{k-2}=\binom{n-2}{k-2}$.

On a alors $P(\mathrm{A})=\dfrac{2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}}{\binom{n}{k}}$.

L'égalité entre les deux est alors l'égalité des numérateurs :

$$\binom{n}{k}-\binom{n-2}{k}=2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}\Leftrightarrow\binom{n}{k}=\binom{n-2}{k}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k-2},$$

soit l'égalité du 2.