Classe de Terminale S

**Démonstrations à connaître** **Analyse**

**Restitution organisée des connaissances**

Pour chaque question nous rappelons la démonstration et nous essayons de proposer une mise en situation… Lorsqu'il n'y a pas de démonstration demandée vous pouvez inventer une question…

1. Analyse
   - 1-a : Propriétés des suites
   - 1-b : Théorème des gendarmes pour les fonctions
   - 1-c : Théorème des valeurs intermédiaires / Corollaire du théorème
   - 1-d : Dérivation d'une fonction composée / dérivation du produit de deux fonctions
   - 1-e : Théorème : « il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que f' = f et f(0) = 1
   - 1-f : Propriétés de exp et ln
   - 1-g : Croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$
   - 1-h : Théorème : « si f est continue sur un intervalle I et si a est un point de I, la fonction F telle que $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a ».
   - 1-i : Intégration par parties
   - 1-j : Equation y' = ay + b : existence et unicité de la solution passant par un point donné.

## *1. Analyse*

### *1-a : Propriétés des suites*

On rappelle la définition d'une suite tendant vers $+\infty$ : une suite admet pour limite $+\infty$ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang sont dans un intervalle de la forme $[A\,;+\infty[$ où $A$ est un réel quelconque (la définition est la même pour $-\infty$, mais les termes seront dans un intervalle $]-\infty\,;A]$).

Théorème 1

Si une suite $(u_n)$ est croissante et non majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ ; si une suite $(u_n)$ est décroissante et non minorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration

Soit $(u_n)$ croissante, non majorée et $M$ un réel quelconque. On est sûr qu'à partir d'un certain rang $N$, on aura $u_n > M$ pour n > N puisque un est croissante. Puisque $u_n$ n'est pas majorée, on peut choisir $M$ aussi grand que l'on veut et les termes de la suite seront dans un intervalle $]M\,;+\infty[$ ce qui correspond à la définition.

Théorème 2 (admis)

Toute suite croissante majorée par $M$ converge vers $l$ avec $l \le M$. Toute suite décroissante minorée par $m$ converge vers $l$ avec $l \ge m$.

Théorème 3

On dit que deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes si : $\begin{cases} u_n \le v_n \\ u_n \textit{ croissante}, v_n \textit{ décroissante} \\ \lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0 \end{cases}$.

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et ont même limite $l$. De plus on a $u_n \le l \le v_n$.

Démonstration

On utilise le th. 2 : $u_n$ est croissante et majorée par $v_0$ donc converge vers $l$ ; $v_n$ est décroissante et minorée par $u_0$ donc converge vers $l'$. Comme on a $\lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$, à partir d'un certain rang $N$ la distance entre $u_n$ et $v_n$ devient aussi petite que l'on veut, de même que celle entre $l$ et $l'$ ; on peut écrire cela de la manière suivante :

$$v_n - u_n = (v_n - l') + (l' - l) + (l - u_n) \Rightarrow l' - l = \lim_{n\to\infty}(v_n - l') + \lim_{n\to\infty}(l - u_n) - \lim_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0 + 0 - 0 = 0$$

et par conséquent $l = l'$.

Exercice 1

Soit $(u_n)$ une suite. On considère les propriétés suivantes :

- $P_1$ : la suite $(u_n)$ est majorée ;
- $P_2$ : la suite $(u_n)$ n'est pas majorée ;
- $P_3$ : la suite $(u_n)$ converge ;
- $P_4$ : la suite $(u_n)$ tend vers $+1$ ;
- $P_5$ : la suite $(u_n)$ est croissante.

Dans tous les cas on demande de justifier la réponse.

1. Donner la traduction mathématique des propriétés $P_1$ et $P_4$.

2. Si les propriétés $P_1$ et $P_5$ sont vraies, que peut-on en conclure pour $(u_n)$ ?
3. Si les propriétés $P_2$ et $P_5$ sont vraies, que peut-on en conclure pour $(u_n)$ ?
4. Une suite vérifiant la propriété $P_4$ vérifie-t-elle nécessairement la propriété $P_2$ ?
5. Une suite vérifiant la propriété $P_2$ vérifie-t-elle nécessairement la propriété $P_4$ ?

Exercice 2

A. **Démonstration de cours**.

Soit $(u_n)$ une suite croissante non majorée.

1. Soit $M$ un nombre réel et $n_0$ un entier naturel tel que $u_{n_0} > M$. Démontrer que pour tout entier naturel $n$, si $n > n_0$ alors $u_n > M$.
2. Quelles conséquences peut-on en tirer pour la suite $(u_n)$ ?
3. Enoncer le théorème du cours ainsi démontré.

B. Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en **justifiant** chaque réponse :

1. Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.
2. Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.
3. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.
4. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

Exercice 3

Partie I

*A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés. Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.*

Pour chacune des affirmations suivantes répondre sans justification par Vrai ou Faux :

(A) Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites à valeurs strictement positives. Si, pour tout entier $n$, $v_n > u_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n^2}{u_n} = +\infty$.

(B) Toute suite bornée est convergente.

(C) Pour toutes suites $(u_n)$ et $(v_n)$ à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1.

(D) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie II

Pour chacune des propositions de la première partie, justifier votre réponse :

– dans le cas où la proposition vous paraît fausse : en donnant un contre-exemple.
– dans le cas où la proposition vous paraît exacte : en donnant une démonstration.

Exercice 4

On rappelle la définition d'une suite tendant vers $+\infty$ : une suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$ si pour tout réel $A$, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à $A$.

**Démontrer** le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$ .

2. On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$ .

a. Etablir que la suite $(u_n)$ est croissante.

b. Démontrer que si la suite $(u_n)$ a pour limite un réel $l$, alors $l$ vérifie la relation $l = l + e^{-l}$ .

c. Conclure quand à la convergence de la suite $(u_n)$.

***1-b : Théorème des gendarmes pour les fonctions***

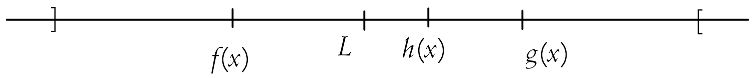
Rappelons au préalable la signification profonde de $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$ : à partir du moment où $x$ devient suffisamment grand la valeur de $h(x) - L$ devient aussi petite que l'on veut, on a alors $h(x)$ dans n'importe quel intervalle de la forme $\left]L-\varepsilon\,;L+\varepsilon\right[$ où $\varepsilon$ est un réel strictement positif.

Théorème

Soit $f$, $g$, $h$ trois fonctions définies dans un intervalle $I = \left[a\,;+\infty\right[$ telles que $f(x) \le h(x) \le g(x)$ sur $I$. Alors si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ , on a $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$ . On a évidemment le même résultat en $-\infty$ .

Démonstration

Considérons un intervalle $J$ contenant $L$ :




Pour $x$ suffisamment grand $f(x)$ et $g(x)$ sont dans $J$, et par conséquent $h(x)$ également. Comme on peut faire ceci pour n'importe quel intervalle contenant $L$, $h$ a forcément pour limite $L$.

La démonstration est identique si on veut appliquer à $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$, la seule différence provient du comportement de $x$ : on dira alors que $x$ est aussi proche que l'on veut de $a$, soit que $x$ est dans un intervalle de la forme $\left]a-\delta\,;a+\delta\right[$, le reste étant identique.

Exercice

1. On considère la fonction numérique $f$ définie sur $(1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On note C la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ du plan.

Pour tout réel $\alpha \ge 1$ , on considère les intégrales

$$J(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x}\,dx \ \text{ et } \ K(\alpha) = \int_{\alpha}^{2\alpha} \frac{1}{x}\exp\left(\frac{1}{x}\right)dx \,.$$

Le but de l'exercice est d'étudier, sans chercher à la calculer, l'intégrale $K(\alpha)$ .

a. Déterminer la limite de $f$ en $+\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat.

b. Etudier le sens de variation de $f$.

c. Donner l'allure de la courbe C.

2. a. Interpréter géométriquement le nombre $K(\alpha)$ .

b. Soit $\alpha \ge 1$ , montrer que $\dfrac{1}{2}\exp\left(\dfrac{1}{2\alpha}\right) \le K(\alpha) \le \exp\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$.

c. En déduire que $\dfrac{1}{2} \le K(\alpha) \le e$ .

3. a. Calculer $J(\alpha)$.

b. Démontrer que pour tout réel $\alpha \geq 1$, $\exp\left(\frac{1}{2\alpha}\right)\ln(2) \leq K(\alpha) \leq \exp\left(\frac{1}{\alpha}\right)\ln(2)$.

4. **Démonstration de cours**.

Démontrer le théorème suivant : soient $u$, $v$ et $w$ des fonctions définies sur $[1\,;+\infty[$ telles que pour tout réel $x \geq 1$, $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$. S'il existe un réel $l$ tel que $\lim_{x\to+\infty} u(x) = l$ et $\lim_{x\to+\infty} w(x) = l$ alors $\lim_{x\to+\infty} v(x) = l$.

5. Déduire de ce qui précède la limite de $K(\alpha)$ lorsque $\alpha$ tend vers $+\infty$.

***1-c : Théorème des valeurs intermédiaires / Corollaire du théorème***

L'énoncé du théorème est le suivant : soit $f$ continue sur un intervalle I, $a$ et $b$ deux réels de I ; pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c$ compris entre $a$ et $b$ tel que $f(c) = k$.

Démonstration avec des suites

Choisissons $a \leq b$ et définissons deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que $a_0 = a$ et $b_0 = b$ ; on fait maintenant une utilisation du balayage : supposons qu'à un moment (soit pour une valeur de $n$) on soit sûr que $k \in [\,f(a_n)\,;f(b_n)\,]$ ; plaçons nous alors dans l'intervalle $[\,a_n\,;b_n\,]$ et calculons $u = f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)$ : soit $k$ est supérieur à $u$, auquel cas nous prenons $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1} = b_n$, soit il lui est inférieur auquel cas nous prenons $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$. Dans tous les cas on sera sûr que $k \in [\,f(a_{n+1})\,;f(b_{n+1})\,]$.

En faisant une récurrence il est alors clair que $a_n$ est croissante, $b_n$ est décroissante et en plus, comme à chaque fois on prend le milieu de l'intervalle, l'écart entre les deux est tel que $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$, soit que $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0)$. Cette suite géométrique tend vers 0 et par utilisation des gendarmes on a $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c$ ; enfin comme $f$ est continue,

$$k \in \left[\,\lim_{n\to\infty} f(a_n)\,;\lim_{n\to\infty} f(b_n)\,\right] = \left[\,f(\lim_{n\to\infty} a_n)\,;f(\lim_{n\to\infty} b_n)\,\right] = [\,f(c)\,;f(c)\,] = f(c).$$

Corollaire : l'équation $f(x) = k$ a une unique solution $c$ dans $[a\,;b]$ si $k \in [f(a)\,;f(b)]$ et $f$ est strictement monotone.

Le théorème précédent justifie l'existence de $c$ mais pas son unicité. Supposons qu'il existe $c'$ tels que $f(c') = k$, alors entre $c$ et $c'$, soit $f$ est constante (interdit par le strictement) soit elle n'est pas monotone… autrement dit pour tout $c'$ de $[a\,;b]$, si $c' \neq c$ alors $f(c') \neq f(c)$.

Exercice : la *Règle de L'Hopital* (mathématicien français du 18ème siècle)

Préliminaire : le *Théorème de Rolle*.

Soit $f$ continue sur $[a\,;b]$, dérivable sur $]a\,;b[$ et $f(a) = f(b)$, alors il existe au moins un point $c$ de $]a\,;b[$ tel que $f'(c)=0$.

*Si f est constante tous les points x donnent f'(x) = 0. Sinon, comme f est continue sur [a ; b], il existe un point c tel que pour tout x de [a ; b],* $f(x) \leq f(c) = M$ *(si f(a) est différent de M, sinon on fait le même raisonnement avec* $f(x) \geq f(c) = m$*).*

*Soit* $g(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$, *si* $x>c$, $g(x) \leq 0$, *et si* $x<c$, $g(x) \geq 0$ ; *on a donc* $\lim_{x\to c^+} g(x) \leq 0$ *et* $\lim_{x\to c^-} g(x) \geq 0$ *d'où* $\lim_{x\to c} g(x) = 0 = f'(c)$.

A quel(s) endroit(s) de cette démonstration a-t-on utilisé le TVI ?

Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues sur $[a\ ;\ b]$, dérivables sur $]a\ ;\ b[$.

1. Soit la fonction $\varphi$ définie par $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$. Calculer $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

2. Montrer que $\varphi'(x)$ s'annule sur $]a\ ;\ b[$ et qu'il existe $c$ dans $]a\ ;\ b[$ tel que

$$g'(c)(f(b)-f(a))=f'(c)(g(b)-g(a)).$$

3. Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur un intervalle I , $a$ un point de I, $f$ et $g$ dérivables sur I sauf en $a$ et telles que $f(a) = g(a) = 0$ et $\forall x\in I, x\neq a \Rightarrow g'(x)\neq 0$.

a. Montrer que si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$.

b. Montrer que la réciproque est fausse en considérant les fonctions $f(x)=x^2\sin(\frac{1}{x})$ et $g(x) = \sin x$.

c. Application : déterminer la limite en 0 de $u(x)=\dfrac{\cos(x^3)-1}{x^3e^x}$.

***1-d : Dérivation d'une fonction composée / dérivation du produit de deux fonctions***

*La méthode de démonstration étant semblable on donne les deux pour le prix d'une…*

Démonstration du produit

Avant de faire quoi que ce soit revenons à la définition du nombre dérivé : pour $f$ continue et dérivable en $x_0$, on a

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\Leftrightarrow\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)+\varphi(h)\Leftrightarrow f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+h\varphi(h)$$

où $\varphi(h)$ tend vers 0 lorsque $h$ tend vers 0.

Soient maintenant deux fonctions $u$ et $v$ dérivables en $x_0$, on a :

$$u(x_0+h)=u(x_0)+hu'(x_0)+h\varphi_1(h)\ \text{ et }\ v(x_0+h)=v(x_0)+hv'(x_0)+h\varphi_2(h)$$

où $\varphi_1(h)$ et $\varphi_2(h)$ tendent vers 0 quand $h$ tend vers 0.

Effectuons le produit : $uv(x_0+h)=\left[u(x_0)+hu'(x_0)+h\varphi_1(h)\right]\left[v(x_0)+hv'(x_0)+h\varphi_2(h)\right]$, développons et mettons $h$ en facteur :

$$uv(x_0+h)=u(x_0)v(x_0)+h\left[u'(x_0)v(x_0)+u(x_0)v'(x_0)\right]+h\left[\varphi_1(h)v(x_0+h)+\varphi_2(h)u(x_0+h)\right]\ ;$$

le bloc $\left[\varphi_1(h)v(x_0+h)+\varphi_2(h)u(x_0+h)\right]$ tend vers 0 lorsque $h$ tend vers 0 et représente une fonction $\varphi_3(h)$ qui tend vers 0 lorsque $h$ tend vers 0 (en fait on sépare les termes constants et les termes variables).

Finalement on a quelque chose de la forme $uv(x_0+h)=uv(x_0)+h(u'v+uv')(x_0)+h\varphi_3(h)$ donc le nombre dérivé de $uv$ en $x_0$ est $(u'v+uv')(x_0)$, ce qui donne la formule bien connue.

Remarque : pour obtenir les autres formules on prend tout d'abord la fonction $v=\dfrac{1}{u}$ et donc telle que $u.v = 1$ ; on dérive ce qui donne $u'v+uv'=0\Rightarrow\left(\dfrac{1}{u}\right)'=v'=-\dfrac{u'}{u}v=-\dfrac{u'}{u^2}$ ; en réutilisant cela on a $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\left(u.\dfrac{1}{v}\right)'=u'\dfrac{1}{v}+u\left(\dfrac{1}{v}\right)'=\dfrac{u'}{v}-u\dfrac{v'}{v^2}=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$.

Démonstration de la composée

Soient $u$ dérivable en $x_0$ avec $y_0=u(x_0)$ et $v$ dérivable en $y_0$ : on a

$$v(y_0+H)=v(y_0)+Hv'(y_0)+H\varphi_2(H) \text{ et } u(x_0+h)=u(x_0)+hu'(x_0)+h\varphi_1(h).$$

Ecrivons $v(u(x_0+h)=v\left[u(x_0)+hu'(x_0)+h\varphi_1(h)\right]=v\left[u(x_0)+H\right]$ avec $H=hu'(x_0)+h\varphi_1(h)$ ; on a alors

$$v(y_0+H)=v(y_0)+h\left(u'(x_0)+\varphi_1(h)\right)v'(y_0)+H\varphi_2(H)=v(y_0)+hu'(x_0)v'(y_0)+h\varphi_1(h)v'(y_0)+H\varphi_2(H)$$

où l'on voit apparaître le terme dérivé $u'(x_0)v'(y_0)$. On récupère donc la formule $(v\circ u)'=u'.\left(v'\circ u\right)$.

Exercice 1

On considère une fonction *f* définie sur un intervalle I et un nombre réel *a* appartenant à I.

1. Rappeler la définition de « *f* est dérivable en *a* ».

2. Dans chacun des cas suivants, indiquer si les deux propriétés citées peuvent être vérifiées simultanément ou non. Si la réponse est « oui », donner un exemple (un graphique sera accepté) ; dans le cas contraire, justifier la réponse.

- *f* est continue en *a* et *f* est dérivable en *a* ;
- *f* est continue en *a* et *f* n'est pas dérivable en *a* ;
- *f* n'est pas continue en *a* et *f* est dérivable en *a* ;
- *f* n'est pas continue en *a* et *f* n'est pas dérivable en *a*.

Exercice 2

On considère la fonction $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Etudier les variations de *f* ; montrer que pour tout *x* réel on peut trouver un unique *y* tel que $y=f(x)$.

2. Soit *g* la fonction telle que $g(y)=x$. Vérifier que $g(y)=\ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$.

3. Rappeler la formule de dérivation des fonctions composées. Montrer alors que si *u* et *v* sont deux fonctions dérivables telles que $v(u(x))=x$ alors $u'(x)=\dfrac{1}{v'(u(x))}$.

4. Appliquer ce résultat aux fonctions *f* et *g* précédentes.

***1-e : Théorème : « il existe une unique fonction* f *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *telle que* f' = f *et* f*(0) = 1***

Le problème est double : existence et unicité.

Existence

Lors de la présentation de l'exponentielle on part de la méthode d'Euler et après de nombreuses manipulations sur les suites on obtient l'existence de exp(*x*)… Ici nous allons partir du logarithme néperien, ce qui sera plus simple.

La fonction 1/*x* est continue sur $]0\,;+\infty[$, elle admet donc une unique primitive (théorème admis) sur cet intervalle, primitive appelée ln*x*, telle que ln1 = 0 (voir **1.*f***). Par dérivation des fonctions composées on a :

$$\left(\ln|f|\right)'=\frac{f'}{f}.$$

Notre équation se transforme alors : $f'(x)=f(x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=1\Rightarrow\ln|f(x)|=x+K$ ; comme *f*(0) = 1, il vient $\ln 1=0+K\Rightarrow K=0$.

La fonction ln est bijective et a donc une fonction réciproque appelée *exponentielle* d'où $|f(x)|=\exp(x)\Leftrightarrow f(x)=\pm\exp(x)$. Comme *f*(0) = 1, il reste uniquement $f(x)=e^x$. Enfin $e^x$ est solution de

$f' = f$, on a donc $\left(e^x\right)' = e^x$ ; de plus comme ln est croissante, exp l'est également ; pour finir, avec exp(0) = 1 et exp croissante il est immédiat que $e^x > 0$.

Unicité

Supposons qu'il existe une fonction $g$, autre solution de notre équation $f' = f$ ; nous pourrons toujours écrire $g(x) = h(x)e^x$, d'où en remplaçant dans l'équation :

$$g' = g \Rightarrow h'(x)e^x + h(x)e^x = h(x)e^x \Leftrightarrow h'(x)e^x = 0 .$$

Comme $e^x > 0$, il reste $h'(x) = 0$ d'où $h(x) = C$ = constante. On a alors $g(x) = Ce^x$ et comme $g(0)=1$, il reste $C = 1$ et $g$ = exp.

Exercice

Une *exsanguino-transfusion* peut se schématiser de la façon suivante : un récipient R contient un liquide L dans lequel se trouve une substance S dont on veut diminuer la concentration. Le volume de R est de $p$ litres (genre le corps humain…) et la concentration initiale de S est de $a$ gramme par litre dans L.

1. *Première méthode* : on injecte dans R de manière continue du liquide L ne contenant pas la substance S et on prélève simultanément la même quantité de mélange par un tuyau de sortie de sorte que le volume de liquide dans R reste constant. Les tuyaux d'arrivée et de sortie ont des débits de $d$ litres par heure.

On note $m(t)$ la quantité de S dans L au bout du temps $t$ et $C(t)$ sa concentration.

a. Montrer que $m(t+h) - m(t) = -dhC(t)$ ; en déduire que $m'(t) = -dC(t)$ puis que $C'(t) = -\dfrac{d}{p}C(t)$ (**E**).

b. **Démontrer** que l'unique solution de (**E**) est $C(t) = a\exp\left(-\dfrac{d}{p}t\right)$.

c. Au bout de combien de temps la concentration de S est-elle inférieure à 5 % de sa valeur initiale ?

d. Cette méthode permet-elle d'éliminer complètement S ?

2. *Deuxième méthode* : toutes les minutes on prélève dans R un pourcentage fixe $q$ de mélange que l'on remplace par la même quantité de L ne contenant pas S. A la minute n on appelle $m_n$ la masse de S restant dans R et $C_n$ sa concentration.

a. Exprimer en fonction de $n$ et des autres paramètres la masse $\Delta m_n$ de S prélevée à la minute $n$.

b. Exprimer $m_{n+1}$ en fonction de $m_n$ puis $C_{n+1}$ en fonction de $C_n$. En déduire $C_n$ en fonction de $n$, $a$, $p$ et $q$.

c. Au bout de combien de minutes la concentration de S est-elle inférieure à 5 % de sa valeur initiale ?

d. En posant $n = 60t$ donner une expression de $C_n$. Comparer au résultat du 1.

### *1-f : Propriétés de exp et ln*

On admet l'existence d'une fonction solution de $f' = f$ avec $f(0) = 1$ (méthode d'Euler). Cette fonction est notée exp : $f(x) = \exp(x) = e^x$. Voir thème précédent.

* Du fait de sa définition, il est immédiat que $(e^x)' = e^x$.

* Cette fonction est positive. On a évidemment $f'(0) = f(0) = 1$ ; par ailleurs prenons $g(x) = f(x)f(-x)$ et dérivons $g$ : $g'(x) = f'(x)f(-x) + f(x)(-f'(-x)) = e^x e^{-x} - e^x e^{-x} = 0$ (dérivation des fonctions composées : $[f(-x)]' = -f'(-x)$).

Conclusion $g$ est une constante ; calculons $g(0) = f(0)f(-0) = 1.1 = 1$ d'où $e^x e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

* Par ailleurs la relation précédente montre qu'elle ne s'annule pas puisque s'il existait une valeur $a$ de $x$ pour laquelle on a $e^a = 0$ alors on aurait $e^a e^{-a} = 1 \Leftrightarrow 0 = 1$ …bof !

* Puisqu'elle ne s'annule pas elle garde un signe constant et comme $e^0 = 1$ elle est positive.

* Comme $e^x > 0$, sa dérivée l'est également, elle est donc strictement croissante.

* Réutilisons $g(x) = f(x)f(-x)$ en prenant cette fois $g(x) = f(x+a)f(-x)$ ;

on dérive : $g'(x) = f'(x+a)f(-x) + f(x+a)(-f'(-x)) = e^{x+a}e^{-x} - e^{x+a}e^{-x} = 0$ donc $g$ est constante et vaut $g(0) = f(a)f(0) = e^a.1 = e^a$. Par conséquent on a $e^{x+a}e^{-x} = e^a \Leftrightarrow e^{x+a}e^{-x}e^x = e^a e^x \Leftrightarrow e^{x+a} = e^x e^a$.

Les autres propriétés viennent facilement.

Pour ln, c'est la réciproque de exp et ses principales propriétés découlent de cela.

* Comme exp est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]0\,;+\infty[$, ln l'est de $]0\,;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

* Sa dérivée est telle que $1 = (x)' = \left(e^{\ln x}\right)' = (\ln x)' e^{\ln x} = x(\ln x)' \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$ (dérivation des fonctions composées et utilisation de $x = e^{\ln x}$).

* Posons $x = \ln u$ et $a = \ln v$ dans $e^{x+a} = e^x e^a$ :

$$e^{\ln u + \ln v} = e^{\ln u}e^{\ln v} \Leftrightarrow e^{\ln u + \ln v} = uv \Leftrightarrow \ln\left(e^{\ln u + \ln v}\right) = \ln(uv) \Leftrightarrow \ln u + \ln v = \ln(uv).$$

<u>Exercice</u>

Prérequis : la fonction exponentielle, notée exp, a les trois propriétés suivantes :

1. exp est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ ;
2. sa fonction dérivée, notée exp', est telle que, pour tout nombre réel $x$, $\exp'(x) = \exp(x)$ ;
3. $\exp(0) = 1$.

En n'utilisant que ces trois propriétés de la fonction exp, démontrer successivement que :

– Pour tout nombre réel $x$, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

– Pour tout nombre réel $a$ et tout nombre réel $b$, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

***1-g : Croissances comparées :*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

<u>Démonstrations</u>

1. La limite la plus importante est $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$ : en fait il s'agit de comparer ln$x$ et $x$ ; lorsqu'on trace ln, on voit que sa courbe ressemble pas mal à celle de $\sqrt{x}$ d'où l'idée de regarder plutôt $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Etudions la fonction $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ ; $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}}$, donc $f$ a un maximum en $x = e^2$, $f(e^2) = \frac{2}{e}$. Par ailleurs si on prend $x > 1$, il est clair que $f$ est positive. On peut donc écrire $0 \le f(x) \le \frac{2}{e}$ d'où en divisant tout par $\sqrt{x}$ qui est positif, $0 \le \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le \frac{2}{e\sqrt{x}} \Leftrightarrow 0 \le \frac{\ln x}{x} \le \frac{2}{e\sqrt{x}}$. Il reste à appeler les gendarmes et à passer à la limite lorsque $x$ tend vers $+\infty$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. En multipliant par $\frac{1}{x^{n-1}}$ qui tend également vers 0 on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

3. En faisant le changement de variable $X=\frac{1}{x}$, $X$ tend vers $0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} -X^n \ln X = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$.

4. En faisant le changement de variable $x=e^X \Leftrightarrow X=\ln x$ on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{X}{e^X} \Rightarrow \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ ;

en posant $Y=-X$, $\lim\limits_{Y\to-\infty} \frac{e^{-Y}}{-Y} = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{Y\to-\infty} \frac{1}{Ye^Y} = -\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{Y\to-\infty} Ye^Y = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ ;

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{n\frac{x}{n}}\right)^n = \frac{1}{n^n} \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = \frac{1}{n^n} \lim\limits_{X\to+\infty} \left(\frac{e^X}{X}\right)^n = +\infty$ ; de la même manière que précédemment on a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$.

Remarque : grosso-modo on peut résumer la situation en disant qu'à l'infini (+ ou –) l'exponentielle l'emporte sur n'importe quel polynôme, lequel l'emporte toujours sur ln en $+\infty$ .

On pourrait partir de l'exponentielle définie par $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$, mais les calculs sont vraiment déplaisants. Par contre si on utilise la définition suivante nettement plus efficace de exp : $e^x = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right)$, la plupart des limites du 4. viennent immédiatement.

Exercice

Soit les fonctions $f$ et $g$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-e^x$ et $g(x)=(1-x)e^x$.

1. a. **Démonstration de cours** : en utilisant seulement $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, déterminer les limites de $f$ et $g$ en $+\infty$ et $-\infty$.

b. Montrer que la droite D($y = x$) est asymptote de $C_f$.

c. Dresser le tableau de variation de $f$ et $g$.

2. a. Pour tout réel $x$, on pose $h(x)=f(x)-g(x)$. Déterminer le sens de variation de $h$.

b. Montrer que $C_f$ et $C_g$ ont un unique point d'intersection d'abscisse $\alpha$ et que $\alpha \in [1\,;2]$.

c. Etudier suivant les valeurs de $x$ la position relative de $C_f$ et $C_g$. Tracer D, $C_f$ et $C_g$.

3. a. En utilisant les variations de $f$, montrer que pour tout $x$ dans [0 ; 1] on a $1+x \le e^x$.

b. En utilisant les variations de $g$, montrer que pour tout $x$ dans [0 ; 1] on a $e^x \le \frac{1}{1-x}$.

c. On pose $x=\frac{1}{k}$, $k$ entier naturel. Déduire des questions précédentes que

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \le \frac{1}{k} \le \ln\left(\frac{k}{k-1}\right).$$

4. On s'intéresse à la suite $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$.

a. A l'aide de votre calculatrice donner des valeurs approchées à $10^{-4}$ près de $S_{10}, S_{20}, S_{30}$. Quelles conjectures pouvez vous faire sur le comportement de $S_n$ ?

b. En utilisant les inégalités du 3. c. Montrer que $(S_n)$ est décroissante et que $0 \le S_n \le 1$. Qu'en concluez-vous ?

***1-h : Théorème : « si* f *est continue sur un intervalle I et si* a *est un point de I, la fonction* F *telle que*** $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ ***est l'unique primitive de* f *sur I s'annulant en* a *».***

Démonstration

Soit $G$ une primitive de $f$ sur I ; la fonction $F(x)=\int_0^x f(t)dt = G(x)-G(a)$ est une primitive de $f$ telle que $F(a)=0$ : comme $G(a)$ est une constante, $F'(x)=G'(x)-0=f(x)$ et $F(a)=G(a)-G(a)=0$.

Cette primitive est unique : supposons qu'il existe une fonction $H$ différente de $F$ qui satisfasse les mêmes conditions, alors $H(x)=F(x)+k$ où $k$ est une constante ; en particulier on a $H(a)=F(a)+k=k$, mais comme $H(x)=\int_a^x f(t)dt$, on a également $H(a) = 0$ donc $k = 0$ et $H = F$.

Exercice

Le but de l'exercice est d'établir dans un cas particulier le lien existant entre aire sous la courbe et primitive. On rappelle que :

> $H$ est une primitive de $h$ sur $[a ; b]$ si et seulement si $H$ est dérivable sur $[a ; b]$ et pour tout $x$ de $[a ; b]$ on a $H'(x) = h(x)$.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\ln(1+t^2)$.

1. Expliquer pourquoi $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f$ est croissante sur $[0 ; +\infty[$.

La fonction $f$ est représentée ci-dessous.

Pour $\alpha \ge 0$, on note $A(\alpha)$ l'aire de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de $f$ et la droite d'équation $x=\alpha$.

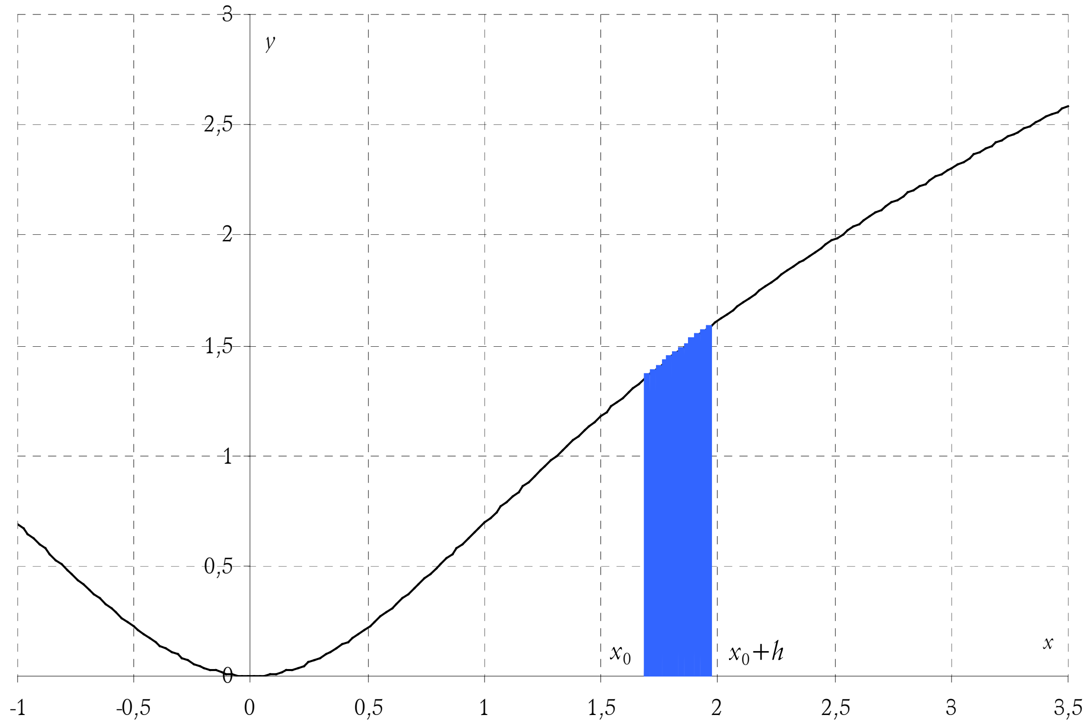
3. a. Soit $x_0$ et $h$ deux réels strictement positifs. En utilisant un rectangle convenable, établir l'encadrement

$$\ln(1+x_0^2) \le \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \le \ln(1+(x_0+h)^2).$$

b. En utilisant une propriété géométrique de la courbe de $f$ donner un encadrement similaire lorsque $x_0+h<x_0<0$.

c. **Démontrer** que $A$ est dérivable en $x_0$. Quel est le nombre dérivé de $A$ en $x_0$ ?

4. Expliquer pourquoi $0 \le A(1) \le \ln 2$ et $\ln 2 \le A(2) \le \ln 2+\ln 5$.




### *1-i : Intégration par parties*

Résultat et démonstration

Soit $u$ et $v$ deux fonctions dérivables sur $[a\ ;\ b]$ admettant des dérivées $u'$ et $v'$ continues, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = \left[\, u(t)v(t)\,\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt\ .$$

Du fait que $\left[\, u(t)v(t)\,\right]' = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ et que toutes les fonctions considérées sont continues on peut intégrer cette relation entre $a$ et $b$, ce qui donne le résultat.

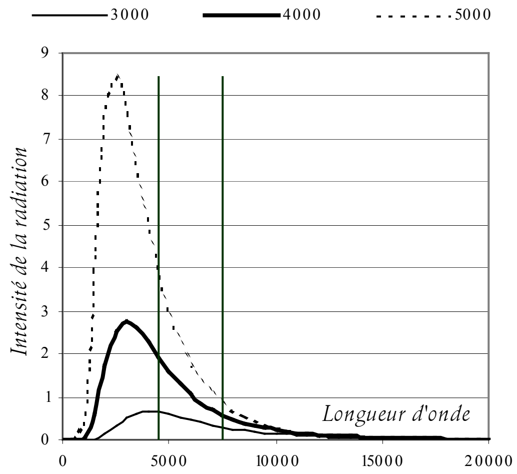
Exercice

La répartition de l'énergie rayonnée par une étoile en fonction de la couleur (ou la longueur d'onde) du rayonnement est donnée par la *loi de Planck* dont une loi approchée est la *loi de Wien*. Pour chaque longueur d'onde $\lambda$ une étoile de température $T$ (en degrés Kelvin) donne un rayonnement d'intensité $I_\lambda = \dfrac{C_1}{\lambda^5 e^{(\frac{C_2}{\lambda T}-1)}}$,

où $C_1$ et $C_2$ sont des constantes : $C_1 = 3740.10^{-12}\, W.cm^2$ et $C_2 = 1,438\ cm.K$.

Einstein avait fait remarquer que cette loi était fausse (que se passe-t-il si λ devient très petit ¿), mais donne une approximation pour certains λ. Comme $\dfrac{C_2}{\lambda T}$ est très supérieur à 1, on peut également écrire $I_\lambda = \dfrac{C_1}{\lambda^5} e^{-\frac{C_2}{\lambda T}}$.

1. En dérivant $I_\lambda$ par rapport à $\lambda$ trouver la valeur de $\lambda$ pour laquelle $I_\lambda$ est maximale. En déduire la *loi de Wien* : $\lambda_m T = constante = 2897\ \mu m.K$.




Entre les deux traits verticaux on a les longueurs d'onde visibles (en Angström). Les courbes correspondent à différentes valeurs de $T$. Les valeurs $\lambda_m$ de $\lambda$ pour lesquelles $I$ est maximale décroissent quand la température augmente.

L'énergie totale $E$ émise par seconde par unité de surface de l'étoile croît avec la température $T$ ; cette énergie est égale à $E = \lim_{u\to+\infty} \int_0^u I_\lambda d\lambda$ .

1. **Démonstration de cours**.

Démontrer à l'aide de deux intégrations par parties successives que que $\int_a^b uv''dt = [uv' - u'v]_a^b + \int_a^b u''vdt$ .

(pour avoir une écriture plus lisible on a omis d'écrire les ($t$)…).

2. Calculer $\int_a^b I_\lambda d\lambda$ pour $T$ fixé en faisant une succession d'intégrations par parties : on posera tout d'abord $u = \frac{1}{\lambda^3}$ , $v' = \frac{1}{\lambda^2}e^{\frac{k}{\lambda}}$ .

3. $\lim_{a\to 0}\int_a^b I_\lambda d\lambda$ puis $\lim_{b\to+\infty}\int_0^b I_\lambda d\lambda$ .

4. En déduire la loi de *loi de Stefan-Boltzmann* : $E = \int_0^{+\infty} I_\lambda d\lambda = C_1 . \frac{6T^4}{C_2^4} = k_B T^4$ où $k_B$ est la constante de Boltzmann.

*D'une façon générale, tous les corps chauffés émettent de l'énergie suivant des lois qui se rapprochent plus ou moins des lois précédentes. La brillance énergétique $I'_\lambda$ est toujours plus petite que la brillance énergétique $I_\lambda$ du corps noir, et le rapport entre les deux définit le facteur d'émission spectrale ; il dépend de la nature du corps émissif, de son état de surface, de la température, de la longueur d'onde, etc.*

### *1-j : Equation* y' = ay + b *: existence et unicité de la solution passant par un point donné.*

Résultat et démonstration

Dans ce type d'équation la méthode la plus générale est la plus rentable ; on résout tout d'abord $y' = ay$, soit $\frac{y'}{y} = a \Rightarrow \ln|y| = ax + K \Leftrightarrow |y| = e^{ax+K} = e^K e^{ax} \Leftrightarrow y = \pm Ce^{ax}$ , $C$ réel positif non nul. Pour trouver la solution de l'équation initiale on pose $C = h(x)$, soit $y = h(x)e^{ax}$ et on remplace dans l'équation :

$$y' = h'(x)e^{ax} + ah(x)e^{ax}\text{, soit } h'(x)e^{ax} + ah(x)e^{ax} = ah(x)e^{ax} + b \Leftrightarrow h'(x)e^{ax} = b \Leftrightarrow h'(x) = be^{-ax}\ ;$$

il reste à intégrer *h'* : $h(x) = -\frac{b}{a}e^{-ax} + K'$ d'où la solution

$$y = \left(-\frac{b}{a}e^{-ax} + K'\right)e^{ax} = K'e^{ax} - \frac{b}{a}.$$

Connaissant un point tel que $y(x_0) = y_0$ on remplace et on trouve $K'$ ce qui est toujours possible dans ce cas. Comme *K'* est unique la solution est unique.

Remarque : l'intérêt de la méthode vue ici est qu'elle permet de résoudre de nombreuses équations différentielles de ce type, voire nettement plus compliquées.

Exercice 1

Une étude sur le comportement de bactéries placées dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence a conduit à proposer une loi d'évolution de la forme

$$\frac{dN(t)}{dt} = 2N(t) - 0,0045N(t)^2 \qquad (\mathbf{1})$$

où $t$ est le temps exprimé en heures. $N(t)$ représente le nombre d'individus présents dans l'enceinte à l'instant $t$ ; à $t = 0$ on a $N(0)=1$ (en milliers).

1. On pose $y(t) = \frac{1}{N(t)}$ ; montrer que $y$ est solution d'une équation différentielle (E) du type $y' = ay+b$.

2. Résoudre (E).

3. En déduire la solution $N(t)$ de (1).

4. Etudier les variations de $N$.

5. Montrer que $N(t) = \frac{e^{2t}}{0,0025e^{2t} - 0,00125}$. Déduisez-en une primitive de $N(t)$.

6. On appelle *nombre moyen* de bactéries la limite quand $T$ tend vers $+\infty$ de $\frac{1}{T}\int_0^T N(t)dt$. Calculer cette intégrale et en déduire le nombre moyen de bactéries dans l'enceinte.

Exercice 2

Dans une pièce à la température constante de 20°C, à l'instant initial noté 0 la température $\theta(0)$ d'un liquide est égale à 70°C. Cinq minutes plus tard elle est de 60°C.

On admet que la température $\theta$ du liquide est une fonction dérivable du temps $t$, exprimé en minutes, et que sa dérivée $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température $\theta(t)$ et celle de la pièce.

On notera $a$ le coefficient de proportionnalité, $a \in \mathbb{R}$.

1. **Démonstration de cours**.

Soit (E) l'équation différentielle $z' = az$.

On rappelle que la fonction $x \to e^{ax}$ est une solution de l'équation (E).

Démontrer que toute solution de (E) est de la forme $x \to Ce^{ax}$, où $C$ est une constante réelle.

2. Résoudre l'équation différentielle : $y' = ay - 20a$.

3. Quelle sera la température du liquide 30 minutes après l'instant initial ?

Exercice 3

Soit $E_1$ l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = y$.

Soit $E_2$ l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' = y$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe une unique fonction $f$ qui appartient à $E_2$ et qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

1. Vérifier que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \to e^x$ et $x \to e^{-x}$ sont des éléments de $E_2$.

2. Soit $f$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $u = f + f'$.

a. Démontrer que $f$ appartient à $E_2$ si et seulement si $u$ appartient à $E_1$.

b. **Démonstration de cours.**

On rappelle que la fonction $x \to e^x$ est une solution de $E_1$.

Démontrer l'unicité de la fonction $u$ élément de $E_1$ qui vérifie $u(0) = 1$.

3. Soit $f$ un élément de $E_2$. On pose, pour tout réel $x$, $g(x) = f(x)e^x$.

a. Démontrer que si $f$ vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, alors $g'(x) = e^{2x}$.

b. Démontrer qu'il existe une seule fonction $f$ répondant au problème posé et déterminer son expression.