Concours ADVANCE : Esme Sudria, Epita, IPSA.

http://www.concours-advance.fr/annales-corriges-concours-advance.aspx

Durée 1 h 30. La calculatrice n'est pas autorisée. Le QCM comporte 6 questions obligatoires et 6 questions à choisir parmi les questions numérotées 7 à 14. Dire pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse. Une réponse juste entraine une bonification, une réponse fausse une pénalité. Les cinq propositions peuvent être toutes vraies ou toutes fausses.

1. Questions obligatoires

1.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-2x-1}{x-3}=0$ b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}=0$ c. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0$

d. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$ e. $\lim\limits_{x\to +\infty} xe^{-x}=+\infty$

2. Soit f une fonction numérique de la forme $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+2}$ où $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$, définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ dont le tableau de variation est :

x	$-\infty$		0		-2		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

a. $f(-2)=-3$ b. $a>0$ c. $f(0)>0$

d. $c>0$ e. $b^2-4ac>0$

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{2e^x}{e^x+1}$. Alors :

a. $f(x)=\dfrac{2}{1+e^{-x}}$ pour tout x ; b. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$; c. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$;

d. $f'(x)<0$ pour tout x ; e. $f'(0)=1$

4. Soit pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)-x$, alors :

a. pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\dfrac{1}{x^2+1}-1$; b. f est décroissante sur $\mathbb{R}$; c. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$;

d. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; e. il existe un unique a réel tel que $f(a)=0$.

5.Pour tous réels non nuls a, b, c, d, on a :

a. Si $a<b$ alors $a^2<b^2$; b. Si $a^2<b^2$ alors $a<b$; c. Si $a<b$ et $c<d$ alors $ac<bd$;

d. si $a<0<b$ alors $\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{a}$; e. si $ac<bd$ alors $\dfrac{c}{b}<\dfrac{d}{a}$.

6. a. « Il existe $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ » est une proposition vraie.

b. « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ » est une proposition vraie.

c. « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ » est une proposition vraie.

d. « Il existe $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ » est une proposition vraie.

e. « Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ » est équivalent à « Il existe $x \in \mathbb{R}$, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x < y$ ».

2. Questions à choisir [6 questions à choisir parmi les suivantes]

7. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0)=0$ et $f(1)=4$. On pose g la fonction définie par $g(x)=f\left(x+\frac{1}{2}\right)-f(x)-2$. Alors :

a. g est continue sur $\mathbb{R}$; b. $g(0)<0$; c. $g(0)g\left(\frac{1}{2}\right)\leq 0$;

d. il existe c réel tel que $f\left(c+\frac{1}{2}\right)-f(c)=2$; e. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)=4x$.

8. Soit f la fonction définie par $f(x)=4\cos^2 x-3$. Alors :

a. On peut se contenter d'étudier f sur $[0\,;\pi]$; b. pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x-\pi)=f(x)$;

c. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-4\sin(2x)$;

d. f est décroissante sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$; e. f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$.

9. Pour toute suite réelle (u_n), on a :

a. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=1$ alors $u_n=1$ à partir d'un certain rang ;

b. si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\frac{1}{2}$ alors $u_n\geq 0$ à partir d'un certain rang ;

c. si pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et (u_n) converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n>0$;

d. si (u_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$;

e. si (u_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$.

10.

a. $\int_{-18}^{18}\left(x^2+1\right)^{24}dx=0$; b. $\int_{-5}^{5}\left(x^3+x\right)^{15}dx=0$; c. $\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\ln 2$;

d. $\int_1^2\frac{dx}{x^3}=1-\frac{1}{4}$; e. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\ln\sqrt{2}$.

11. Un facteur doit distribuer 3 lettres adressées à 3 destinataires distincts. Ayant égaré ses lunettes, il dépose une lettre au hasard dans chaque boîte. Alors la probabilité :

a. que chaque lettre arrive à son destinataire est $\frac{1}{3}$;

b. qu'exactement une lettre arrive au bon destinataire est $\frac{1}{3}$;

c. qu'au moin une lettre arrive au bon destinataire est $\frac{1}{2}$;

d. qu'aucune lettre n'arrive au bon destinataire est $\frac{1}{3}$;

e. qu'exactement deux lettres arrivent à leur destinataire est 0 ;

12. Dans une classe, 75 % des étudiants ont préparé l'examen. Un étudiant n'ayant pas préparé l'examen le réussit avec une probabilité 0,2 ; un étudiant ayant préparé l'examen le réussit avec une probabilité 0,9. Alors la probabilité :

a. qu'un étudiant ne prépare pas l'examen et le réussisse est 0,8 ;

b. qu'un étudiant réussisse l'examen est 0,8 ;

c. qu'un étudiant n'a pas préparé l'examen sachant qu'il a réussi est 0,25 ;

d. qu'un étudiant échoue à l'examen est 0,275 ;

e. qu'un étudiant prépare l'examen et échoue est 0,075.

13. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0,5u_n + 1$. On considère les deux algorithmes suivants :

	Algo 1	Algo 2
Variables	n et k entiers naturels, u réel	i et r entiers naturels, u réel
Initialisation	u ← 0	u ← 0, i ← 0
Entrée	saisir k	saisir r
Traitement	Pour n variant de 1 à k u ← 0,5u+1 fin pour.	Tant que u< $2-10^{-r}$ u ← 0,5u+1 i ← i+1 fin Tant que.
Sortie	Afficher u.	Afficher i.

a. L'algo 1 calcule le terme u_k de la suite (u_n).

b. pour $k = 3$, l'algo 1 affiche 1,75 ;

c. l'algo 2 affiche le terme u_n tel que $u_n \geq 2-10^{-r}$;

d. l'algo 2 s'arrête parceque (u_n) est majorée par 2 ;

e. après avoir déroulé l'algo 2, si on prend $k = i$ dans l'algo 1, alors la valeur affichée de l'algo 1 vérifie $u \geq 2-10^{-r}$.

14. On veut construire un algorithme permettant de trouver une valeur approchée à 10–2 près de la solution de l'équation $x^5 - 4x^3 + 2 = 0$ appartenant à $[0\,;1]$. L'algorithme se présente ainsi :

	Algo
Variables	a, b réels
Initialisation	a ← 0, b ← 1
Traitement	Tant que *condition 1* Si $\left(\frac{a+b}{2}\right)^5 - 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 + 2 > 0$ alors *affectation 1* sinon *affectation 2* Fin si Fin tant que
Sortie	Afficher a et b.

a. la condition 1 est $b - a < 10^{-2}$;

b. l'affectation 1 est $b \leftarrow \frac{a+b}{2}$;

c. L'affectation 1 et l'affectation 2 sont les mêmes ;

d. l'algorithme affiche le résultat au bout de 6 itérations ;

e. les valeurs affichées peuvent avoir, a priori, leur premier chiffre après la virgule différents.

Concours ADVANCE : Esme Sudria, Epita, IPSA.

La calculatrice n'est pas autorisée. Le QCM comporte 8 *questions obligatoires et* 4 *questions à choisir parmi les* 8 *dernières. Le barème est le suivant :* 3 *points pour une réponse juste,* –1 *point pour une réponse fausse et* 0 *point pour une non réponse.* ***Une question peut comporter plusieurs réponses justes.***

1. Questions obligatoires

1. À l'auberge « L'hirondelle heureuse », le prix de la fricassée de moustiques coûte 2 becos en 2012. En 2013, le prix de la fricassée a baissé de 30 %, puis a augmenté de 50 % l'année suivante. Depuis 2010, tout client ayant une carte de fidélité a une réduction de 10 % sur la fricassée et tout client ayant une carte bonus a une fricassée gratuite pour 10 achetées. Alors :

a. En 2013, la fricassée coûte 0,60 becos.

b. Entre 2012 et 2014, le prix de la fricassée a augmenté de 20 %.

c. Un client ayant une carte de fidélité depuis 2010 paye sa fricassée en 2014 au même prix qu'en 2012.

d. En 2014, la fricassée coûte 2,10 becos.

e. En 2014, il est financièrement plus intéressant d'avoir une carte bonus qu'une carte de fidélité lorsque l'on achète 11 fricassées par an.

2.

a. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

b. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}=0$

c. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}=1$

d. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}=\dfrac{1}{2}$

e. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln(1+x)}=1$

3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	4	↘	-1	↗	5

a. $f(4)=0$.

b. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\leq 5$.

c. L'équation $f(x)=0$ admet exactement 2 solutions.

d. L'équation $f(x)=4$ admet exactement 2 solutions.

e. Les données ne permettent pas de connaître le signe de $f(1)\times f(3)$.

4. Soit f une fonction définie sur $]-3\,;3[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{3-x}{3+x}\right)$. Alors :

a. $f(0)=0$.

b. Pour tout $x\in]-3\,;3[$, $f(-x)=-f(x)$.

c. Pour tout $x\in]-3\,;3[$, $f'(x)=\dfrac{1}{3-x}-\dfrac{1}{3+x}$.

d. f est croissante sur $]0\,;3[$.

e. f est décroissante sur $x \in]-3;0[$.

5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-2x}$. Alors :

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)+2f(x)=e^{-2x}$.

b. $\int_0^1 -2e^{-2x}dx=e^{-2}-1$.

c. $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\left[f(0)-f(1)+\int_0^1 e^{-2x}dx\right]$

d. $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1-2e^{-2}}{2}$.

e. $\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-2x}dx$.

6. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 1$ et de premier terme $u_1=2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n=u_1+u_2+...+u_n=\sum_{k=1}^{k=n}u_k$. Alors :

a. $u_{16}=q^{10}u_6$.

b. $u_5u_7=u_3u_9$.

c. Si $q = 2$, alors $S_3=14$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, S_n est un entier naturel pair.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n}=(1+q^n)S_n$.

2. Questions à choisir [6 questions à choisir parmi les suivantes]

7. Soit $m \in \mathbb{R}$ et f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x)=x^2+2mx+9$.

a. $f_5(x)=(x+1)(x+9)$.

b. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, la courbe de f_m passe par le point I(0 ; 9).

c. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_m(x) \geq 0$.

d. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'équation $f'_m(x)=0$ admet une seule solution.

e. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{m+1}(x) \geq f_m(x)$.

8. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ de moyenne 4 sur $[-2;2]$. Alors on peut affirmer que :

a. $\int_{-2}^{2} f(x)dx=2$.

b. Pour tout $x \in [-2;2]$, $f(x) \geq 0$.

c. f n'est pas une fonction impaire.

d. Il existe $a \in [-2;2]$, $f(a)=4$.

e. La valeur moyenne de f^2 ($f^2 : x \mapsto f(x)^2$) sur $[-2;2]$ est 16.

9. Soit f la fonction définie sur $[-1;1]$ par $f(x)=x^3-3x+2$. Alors :

a. f est croissante sur $[-1;1]$.

b. Pour tout $x \in [-1;1]$, $f(x) \geq 0$.

c. Pour tout $a \in [0;4]$, l'équation $f(x)=a$ admet une unique solution sur $[-1;1]$.

d. Pour tout $x \in [-1;1]$, si $f(x) \leq 2$, alors $x \leq 0$.

e. Pour tout $x \in [-1;1]$, si $x \geq -\frac{1}{2}$, alors $f(x) \leq \frac{27}{8}$.

10. On appelle octet une liste de 8 éléments pris dans l'ensemble {0, 1} (exemple d'octet : 00110011). Alors il y a :

a. $\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ octets se terminant par 1000.

b. 2^5 octets se terminant par 100.

c. $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$ octets commençant par 100.

d. $(5!)(2^5)$ octets contenant 100 (remarque : 10101111 ne contient pas 100).

e. 4! octets contenant exactement quatre 0.

11. Dans un jeu, on lance une bille dans un appareil comportant 6 portes de sortie numérotées de 1 à 6. La probabilité que la bille sorte par la porte 2 est 1/6.

La règle du jeu est : un joueur mise 1 €, il reçoit 3 € si la bille sort par la porte 2, sinon il ne reçoit rien.

Yves fait 6 parties successives. X est la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées par Yves. Alors :

a. $\mathbb{P}(X=2)=\dfrac{1}{3}$

b. $\mathbb{P}(X\geq 1)=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^6$.

c. La probabilité qu'Yves ne perde pas d'argent est $\mathbb{P}(X\geq 2)$.

d. Yves peut gagner au plus 12 €.

e. La probabilité qu'Yves gagne de l'argent est égale à celle qu'il en perde.

12. Dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan P d'équation $x-y+2z-4=0$ et Δ la droite passant par $I(1;1;b)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;a;1)$ où a et b sont des réels. Alors :

a. Si $a\neq 1$, alors pour tout $b\in\mathbb{R}$, l'intersection de Δ et P est un point.

b. Si $b=2$, alors pour tout $a\in\mathbb{R}$, l'intersection de Δ et P est un point.

c. Si $b\neq 2$, alors pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\Delta\cap \mathrm{P}=\varnothing$.

d. Si $a=1$ et $b=2$, alors $\Delta\cap \mathrm{P}=\varnothing$.

e. Si $a=1$ et $b\neq 2$, alors $\Delta\cap \mathrm{P}=\varnothing$.

13. Pour tout nombre complexe z :

a. $|z^2+1|\geq|z+1|$.

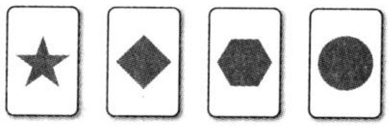
b. $|z+1|\geq|z-2|$.

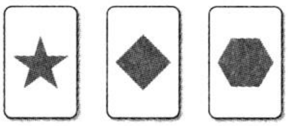
c. Si $|z+1|=2$, alors il existe $\theta\in[0;2\pi[$, $z=e^{i\theta}+1$.

d. S'il existe $\theta\in[0;2\pi[$, $z=-5e^{i\theta}+1$, alors $|z|=4$.

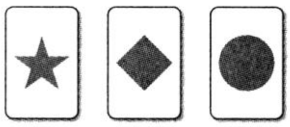
e. Si $|z|=2$, alors $|z-1|=1$.

14. On dispose de 4 cartes : chaque carte vaut un nombre entier strictement positif de points. On donne ci-dessous la somme des points des 3 cartes.

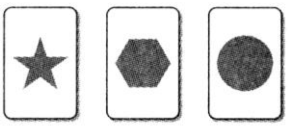




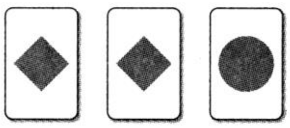
200



150



100



n

Alors :

a. Il est impossible que $n = 50$.

b. $n \geq 150$.

c. n est un multiple de 3.

d. Si $n = 210$, alors une des cartes vaut 10 points.

e. Si $n = 210$, alors une des cartes vaut 30 points.