Intégration

1. EXANA020 - Exemples. 1
2. EXANA021 – Mons, questions-types 2000-2001. 1
3. EXANA022 – Mons, questions-types 2000-2001. 1
4. EXANA023 – Mons, questions-types 2000-2001 2
5. EXANA024 – Mons, questions-types 2000-2001 2
6. EXANA025 – Compléments 2
7. EXANA026 – Compléments 4
8. EXANA028 – Mons, questions-types 2000-2001. 5

1. EXANA020 - Exemples

A. Calculer $F(x)=\int xe^x dx$.

B. Calculer $F(x)=\int xe^{ax} dx$.

Correction

A. $f : x \rightarrow f' : 1 ; g' : e^x \rightarrow g : e^x \Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$ donc $F(x)=e^x(x-1)$.

B. $f : x \rightarrow f' : 1 ; g' : e^{ax} \rightarrow g : \frac{e^{ax}}{a} \Rightarrow F(x) = \frac{xe^x}{a} - \frac{1}{a}\int e^{ax} dx = \frac{xe^x}{a} - \frac{1}{a^2}e^{ax}$ donc $F(x)=\frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1)$.

2. EXANA021 – Mons, questions-types 2000-2001

Calculer $F(x)=\int \ln^3 x\, dx$.

Correction

$f : \ln^3 x \rightarrow f' : \frac{3\ln^2 x}{x} ; g' : 1 \rightarrow g : x \Rightarrow F(x) = x\ln^3 x - \int x\frac{3\ln^2 x}{x} dx = x\ln^3 x - 3\int \ln^2 x\, dx$; on recommence :

$f : \ln^2 x \rightarrow f' : \frac{2\ln x}{x} ; g' : 1 \rightarrow g : x \Rightarrow F(x) = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6\int \ln x\, dx$; encore une fois :

$f : \ln x \rightarrow f' : \frac{1}{x} ; g' : 1 \rightarrow g : x \Rightarrow F(x) = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6\int dx$ et finalement

$F(x) = x\ln^3 x - 3x\ln^2 x + 6x\ln x - 6x$.

3. EXANA022 – Mons, questions-types 2000-2001

Calculer $F(x)=\int \frac{x^6}{x^4-1} dx$.

Correction

$F(x)=\int \frac{x^6}{x^4-1} dx = \int x^2 dx + \int \frac{x^2}{x^4-1} dx = \int x^2 dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+1} dx - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1} dx + \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1} dx$ d'où

$$F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|.$$

4. EXANA023 – Mons, questions-types 2000-2001

Calculer $F(x)=\int\cos^2 x\,dx$.

Correction

$f:\cos x\to f':-\sin x\ ;\ g':\cos x\to g:\sin x$

$$F(x)=\int\cos^2 x\,dx=\cos x\sin x+\int\sin^2 x\,dx=\cos x\sin x+\int(1-\cos^2 x)\,dx=\cos x\sin x+x-\int\cos^2 x\,dx$$

donc $F(x)=\frac{1}{2}(\cos x\sin x+x)=\frac{1}{4}(\sin 2x+2x)$.

5. EXANA024 – Mons, questions-types 2000-2001

Calculer $F(x)=\int\frac{1}{x^2+2x+\lambda}dx$.

Correction

1. $\lambda=1$: $\int\frac{1}{x^2+2x+1}dx=\int\frac{dx}{(1+x)^2}=-\frac{1}{x+1}+C.$

2. $\lambda>1$: $\int\frac{1}{x^2+2x+\lambda}dx=\int\frac{dx}{(x+1)^2+\lambda-1}$; on pose $y=x+1$:

$$F(x)=\frac{1}{\lambda-1}\int\frac{dy}{\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda-1}}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\int\frac{d\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda-1}}\right)}{\left(\frac{y}{\sqrt{\lambda-1}}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\arctan\frac{y}{\sqrt{\lambda-1}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda-1}}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{\lambda-1}}+C.$$

3. $\lambda<1$: $x^2+2x+\lambda$ admet deux racines réelles : $x=-1\pm\sqrt{1-\lambda}$.

$$\frac{1}{x^2+2x+\lambda}=\frac{a}{x+1-\sqrt{1-\lambda}}+\frac{b}{x+1+\sqrt{1-\lambda}}\Rightarrow\begin{cases}a+b=0\\a\left(1+\sqrt{1-\lambda}\right)+b\left(1-\sqrt{1-\lambda}\right)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\\b=-\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\end{cases}$$

$$F(x)=\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\ln\left|x+1-\sqrt{1-\lambda}\right|-\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\ln\left|x+1+\sqrt{1-\lambda}\right|=\frac{1}{2\sqrt{1-\lambda}}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{1-\lambda}}{x+1+\sqrt{1-\lambda}}\right|+C.$$

6. EXANA025 – Compléments

A. Calculer $F(x)=\int\frac{1}{1+\sin x}dx$.

B. Calculer $F(x)=\int\frac{1}{a+b\sin x}dx$.

Correction

A. $F(x)=\int \frac{1}{1+\sin x}dx=\int \frac{dx}{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}+2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}dx$

$$=2\int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}+1}=2\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2}=-\frac{2}{\tan\frac{x}{2}+1}+C.$$

B. $F(x)=\int \frac{1}{a+b\sin x}\mathrm{dx}=\int \frac{dx}{a+2b\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\int \frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{a}{\cos^2\frac{x}{2}}+2b\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}dx=2\int \frac{d\tan\frac{x}{2}}{a\tan^2\frac{x}{2}+2b\tan\frac{x}{2}+a}.$

Changement de variable : $\tan\frac{x}{2}=y \quad\rightarrow\quad F(x)\rightarrow 2\int \frac{dy}{ay^2+2by+a}.$

Premier cas : $\underline{\underline{b^2>a^2}}$; le dénominateur s'écrit $a\left(y+\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)\left(y+\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)$. On décompose :

$$\frac{1}{ay^2+2by+a}=\frac{1}{a}\left(\frac{\alpha}{y+\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}}+\frac{\beta}{y+\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\frac{\alpha y+\alpha\left(\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)+\beta y+\beta\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)}{\left(y+\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)\left(y+\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}\right)}=\frac{1}{a}\frac{(\alpha+\beta)y+\alpha\left(\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)+\beta\left(\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)}{\left(y+\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)\left(y+\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}\right)}.$$

$$\Rightarrow \alpha=-\beta,\ \alpha=-\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}},\ b=\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\Rightarrow F(y)=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\int\left(-\frac{1}{y+\frac{b}{a}+\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}}+\frac{1}{y+\frac{b}{a}-\sqrt{\frac{b^2}{a^2}-1}}\right)dy \text{ et}$$

$F(y)=\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\left(-\int \frac{dy}{ay+b+\sqrt{b^2-a^2}}+\int \frac{dy}{ay+b-\sqrt{b^2-a^2}}\right)$, soit enfin

$$F(x)=\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{a\tan\frac{x}{2}+b-\sqrt{b^2-a^2}}{a\tan\frac{x}{2}+b+\sqrt{b^2-a^2}}\right|+C.$$

Deuxième cas : $\underline{\underline{b^2<a^2}}$, le dénominateur n'a pas de racines réelles :

$$\frac{2}{a}\frac{1}{y^2+2\frac{b}{a}y+1}=\frac{2}{a}\frac{1}{\left(y+\frac{b}{a}\right)^2+\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{2}{a}\frac{a^2}{a^2-b^2}\frac{1}{\left(\frac{y+\frac{b}{a}}{\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}}\right)^2+1}.$$

On obtient un arc tangente : $F(x)=\frac{2}{a}\frac{a^2}{a^2-b^2}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\int\frac{d\left(\frac{ay+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)}{\left(\frac{ay+b}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^2+1}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{ay+b}{\sqrt{a^2-b^2}}$ d'où

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{a\tan\frac{x}{2}+b}{\sqrt{a^2-b^2}}+C.$$

7. EXANA026 – Compléments

Calculer $F(x)=\int\frac{1}{a+b\cos x}dx$.

Correction

$$F(x)=\int\frac{1}{a+b\cos x}\mathrm{dx}=\int\frac{dx}{a+b\cos^2\frac{x}{2}-b\sin^2\frac{x}{2}}=\int\frac{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\frac{a}{\cos^2\frac{x}{2}}+b-b\tan^2\frac{x}{2}}dx=2\int\frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{(a-b)\tan^2\frac{x}{2}+(a+b)}.$$

Changement de variable : $\tan\frac{x}{2}=y\Rightarrow F(x)=2\int\frac{dy}{(a-b)y^2+(a+b)}$.

Premier cas $\underline{\underline{b^2>a^2}}$: le dénominateur a deux racines réelles : $(a-b)y^2=-(a+b)\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}=\pm t$; on décompose en fractions rationnelles :

$$\frac{1}{(a-b)y^2+(a+b)}=\frac{2}{a-b}\left(\frac{\alpha}{y-t}+\frac{\beta}{y+t}\right)\Rightarrow\alpha=-\beta\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2t},\beta=-\frac{1}{2t}.$$

Donc $F(y)=\frac{1}{t(a-b)}\left(\int\frac{dy}{y-t}-\int\frac{dy}{y+t}\right)=\frac{1}{t(a-b)}\ln\left|\frac{y-t}{y+t}\right|=\frac{1}{(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\ln\left|\frac{y-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{y+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right|$, soit

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}+\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}{\tan\frac{x}{2}-\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}}\right|+C.$$

Deuxième cas : $\underline{\underline{b^2<a^2}}$, $F(y)=\frac{2}{a+b}\int\frac{dy}{\frac{a-b}{a+b}y^2+1}=\frac{2t}{a+b}\int\frac{d(ty)}{(ty)^2+1}$ d'où

$$F(x)=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\frac{\sqrt{a^2-b^2}\tan\frac{x}{2}}{a+b}+C.$$

8. EXANA028 – Mons, questions-types 2000-2001

1. Calculer l'aire S comprise entre l'aire x et la courbe $y = \sin x$ pour des valeurs de x comprises entre 0 et π.
2. Déterminer le volume V_x obtenu en faisant tourner cette partie du plan autour de l'axe x.
3. Déterminer le volume V_y obtenu en faisant tourner cette partie autour de l'axe y.

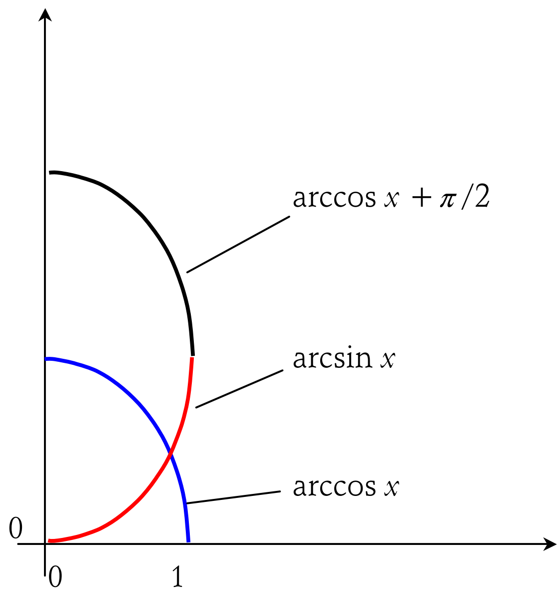
Correction

1. $F(x) = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -[\cos x]_0^{\pi} = 2$.

2. $V_x = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx$, iPP : $f = \sin x \Rightarrow f' = -\cos x$; $g' = \sin x \Rightarrow g = \cos x$.

$I = \int \sin^2 x \, dx = \sin x \cos x + \int \cos^2 x \, dx = \sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \, dx \Rightarrow I = \frac{1}{2}(\sin x \cos x + x)$,

soit $V_x = \frac{\pi}{2}[\sin x \cos x + x]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}$.



3. Il faut permuter les axes Ox et Oy : on travaille donc avec les fonctions réciproqies. Pour obtenir V_y, on calcule le volume engendré par $\arccos x + \frac{\pi}{2}$ diminué du volume engendré par $\arcsin x$.

$$A = \pi \int_0^1 (\arcsin x)^2 \, dx : \begin{cases} x = \sin t,\ dx = \cos t \, dt \\ x = 0 \Leftrightarrow t = 0,\ x = 1 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{cases} ;$$

$$A = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t \, dt : \begin{cases} f = t^2 & \Rightarrow f' = 2t \\ g' = \cos t & \Rightarrow g = \sin t \end{cases}$$

$$A = \pi \left([t^2 \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt \right) : \begin{cases} f = t & \Rightarrow f' = 1 \\ g' = \sin t & \Rightarrow g = -\cos t \end{cases}$$

$$A = \frac{\pi^3}{4} + 2\pi [t \cos t]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{4} + 2\pi.$$

Volume engendré par $\arccos x + \frac{\pi}{2}$:

$$B = \pi \int_0^1 \left(\arccos x + \frac{\pi}{2} \right)^2 dx = \pi \int_0^1 \left(\arccos x \right)^2 dx + \pi^2 \int_0^1 \arccos x \, dx + \frac{\pi^3}{2} \int_0^1 dx .$$

Calculons le premier terme (changement de variable puis deux IPP) :

$$T_1 = \pi \int_0^1 \left(\arccos x \right)^2 dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \sin t \, dt = \pi \left(\left[-t^2 \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \, dt \right)$$

$$= 2\pi \left[t \sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \pi^2 + 2\pi \left[\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi^2 + 2\pi .$$

Le deuxième (changement de variable puis une IPP) :

$$T_2 = \pi^2 \int_0^1 \arccos x \, dx = -\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, dt = -\pi^2 \left[t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = \pi^2 .$$

Le troisième : $T_3 = \frac{\pi^3}{4} \int_0^1 dx = \frac{\pi^3}{4}$.

Finalement $B = \frac{\pi^3}{4} + 2\pi^2 + 2\pi$ et $V_y = B - A = \frac{\pi^3}{4} + 2\pi^2 + 2\pi - \frac{\pi^3}{4} - 2\pi = 2\pi^2$.

9. EXANA029 – Mons, questions-types 2000-2001

1. Retrouver la dérivée de arctan x à partir de la connaissance de la dérivée de tan x.
2. Exploiter le résultat obtenu au point 1. pour résoudre la problème suivant :

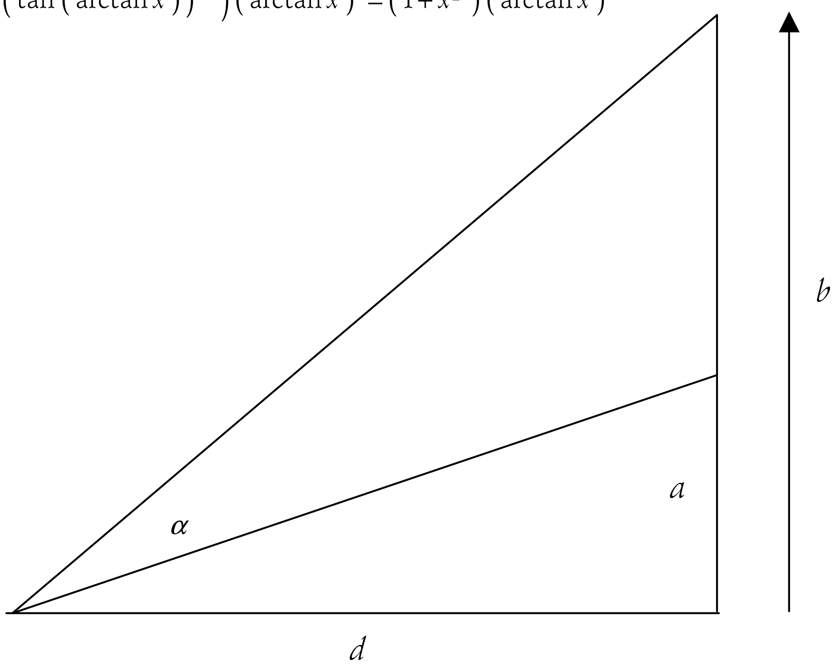
Un building est caractérisé par une hauteur b. Un passant se place à une distance d de ce building et voit sous un angle a la partie haute du building entre le sommet et l'un des étages situé à une hauteur a du sol. On demande de déterminer la distance d pour laquelle l'angle a est maximum.

Correction

1. On utilise la dérivée des fonctions composées :

$$x = \tan\left(\arctan x \right) \Rightarrow 1 = \left(1 + \left(\tan\left(\arctan x \right) \right)^2 \right) \left(\arctan x \right)' = \left(1 + x^2 \right) \left(\arctan x \right)'$$

d'où $\left(\arctan x \right)' = \frac{1}{1+x^2}$.



2. On a

$$\alpha(d) = \arctan\frac{b}{d} - \arctan\frac{a}{d} \Rightarrow \alpha'(d) = \frac{1}{1+\left(\frac{b}{d}\right)^2}\left(-\frac{b}{d^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{a}{d}\right)^2}\left(-\frac{a}{d^2}\right) = \frac{(b-a)(ab-d^2)}{(d^2+a^2)(d^2+b^2)} = 0$$

d'où $d = \pm\sqrt{ab}$. La solution positive est seule acceptable ; c'est un maximum car

$$d < \sqrt{ab} \Rightarrow \alpha'(d) > 0 \; ; \; d > \sqrt{ab} \Rightarrow \alpha'(d) < 0 \, .$$