Géométrie dans l'espace

1. GSE020, Mons, questions-types 2000-2001

Construire une sphère passant par quatre points non colinéaires.

Correction

On choisit trois couples de points. Chaque couple définit une droite.

Chaque droite définit un plan médiateur.Les trois plans médiateurs se coupent un point qui est le centre de la sphère.

2. GSE021, Mons, questions-types 2000-2001

Par une droite (d) donnée, construire un plan tangent à une sphère donnée.

Correction

1. La droite est sécante à la sphère.

Dans ce cas le plan tangent est imaginaire.

2. La droite est tangente à la sphère au point A.

Soit la droite (p) qui joint le centre de la sphère au point de tangence A. Le plan perpendiculaire à la droite (p) au point A est le plan cherché.

3. La droite est extérieure à la sphère.

Par le centre de la sphère, on construit le plan (a) perpendiculaire à la droite. Le point de percée de la droite dans le plan (a) définit le point A. L'intersection du plan (a) et de la sphère est un cercle. Dans le plan (a), on trace les tangences (x) et (y) au cercle, issues de A (il suffit de tracer le cercle dont le diamètre AO avec O centre de la sphère). Les deux plans tangents sont définis par (d), (x) et (d), (y).

3. GSE022, Mons, questions-types 2000-2001

Démontrer que le plan défini par une arête et le milieu de l'arête opposée d'un tétraèdre quelconque divise ce volume en deux tétraèdres équivalents.

Correction

Le plan détermine avec la base du tétraèdre une médiane.

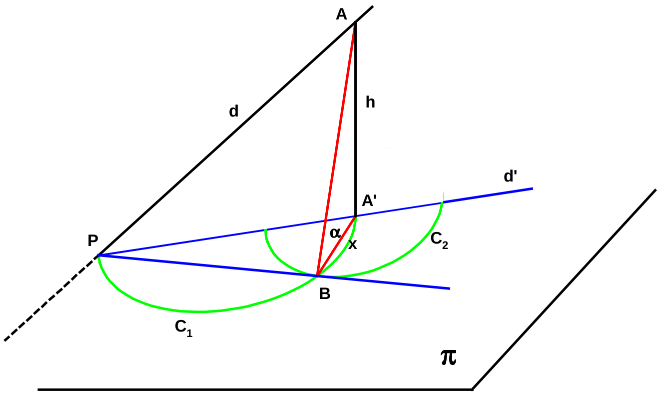
Un triangle est divisé par une médiane en deux triangles de surface égale. (Les bases sont égales et la hauteur est la même).

Les deux tétraèdres ont donc même volume puisque l'aire des bases est égale et que la hauteur (dans le sens vertical) est la même.

4. GSE023, Mons, questions-types 2000-2001

Construire un dièdre connaissant l'angle de son rectiligne, une de ses faces et une droite quelconque appartenant à l'autre face.

Correction



Soit π la face du dièdre. La droite donnée d perce π en P. Soit A' la projection orthogonale de A, point quelconque de d et $AA' = h$.

Construisons C_1, le cercle de diamètre PA' dans π et C_2, le cercle de de centre A' et de rayon $x = \dfrac{h}{\tan\alpha}$ où α est l'angle indiqué sur la figure.

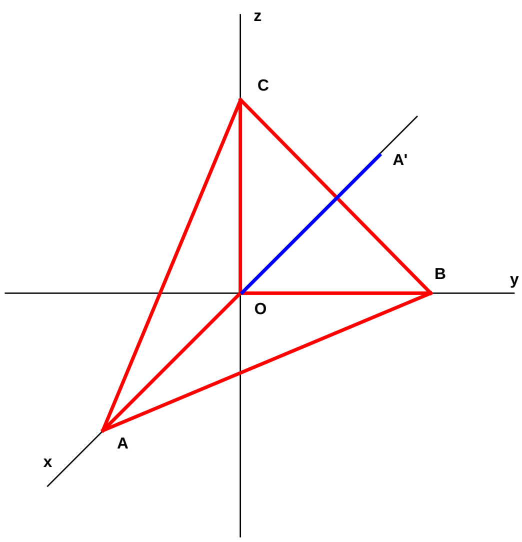
On pose $B = C_1 \cap C_2$: $A'B$ est perpendiculaire à PB, AA' est perpendiculaire à PB, donc le plan $AA'B$ est orthogonal à PB, soit également au plan π et au plan ABP.

Les plans π et ABP forment le dièdre cherché et $\alpha = \arctan\dfrac{h}{x}$.

5. GSE024, Mons, questions-types 2000-2001

Montrer que le produit des symétries autour des arêtes d'un trièdre trirectangle est la transformation identique.

Correction



Soit le tétraèdre $OABC$ supporté par les axes Ox, Oy et Oz de l'espace : la symétrie par rapport à une des arètes d'un point $M(x, y, z)$ a pour effet de changer deux des coordonnées en leurs opposées : par ex. dans la symétrie d'axe (Ox) M devient $M'(x, -y, -z)$. En répétant cela sur les trois axes on retombe évidemment sur M.

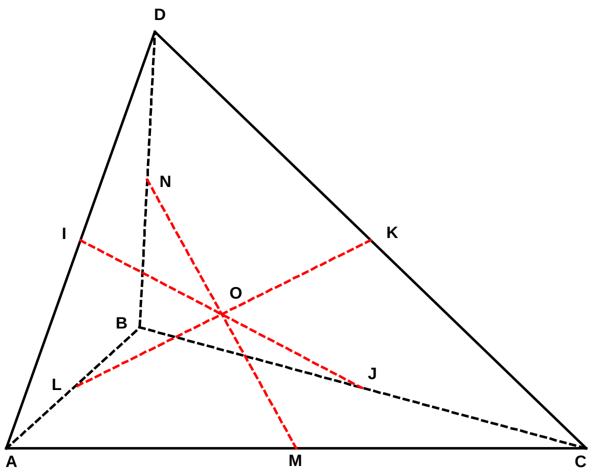
$(x, y, z) \to (x, -y, -z) \to (-x, -y, -(-z)) \to (-(-x), -(-y), -(-z)) = (x, y, z)$.

6. GSE025, Mons, questions-types 2000-2001

Soit un tétraèdre dont les arêtes opposées sont deux à deux égales.

Démontrer que les droites qui joignent les milieux de ces arêtes forment des couples d'arêtes égales se coupant en un seul point commun, et que ces droites forment dans l'espace un trièdre trirectangle.

Correction



$$\left.\begin{array}{l} IN // AB,\ IN = \dfrac{AB}{2} \\ MJ // AB,\ MJ = \dfrac{AB}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow IN = MJ \text{ et } IN // MJ$$; même chose pour montrer que $NK = LM$ et $NK // LM$ ainsi que $IL = KJ$ et $IL // KJ$.

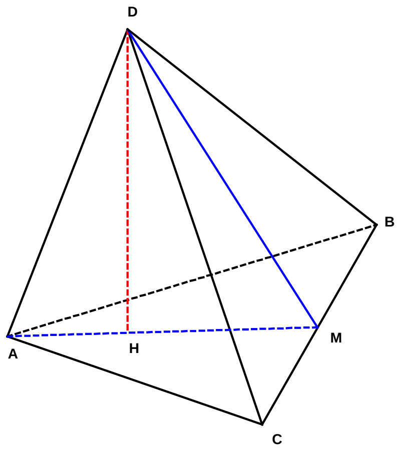
$INMJ$, $LMKN$ et $IKJL$ sont trois parallélogrammes dont les diagonales se coupent en un même point O.

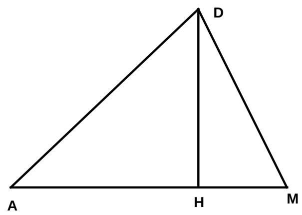
$NK = BJ = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AD}{2} = ID = KM = NL = LM$, etc. Les parallélogrammes sont des carrés, or les diagonales d'un carré se coupent à angle droit donc IL, LK et MN forment un trièdre trirectangle.

7. GSE026, Mons, questions-types 2000-2001

Calculer l'aire totale et le volume d'un tétraèdre régulier connaissant le rayon R de la sphère qui lui est circonscrite.

Correction





Tétraèdre régulier : tous les côtés sont égaux à c ;

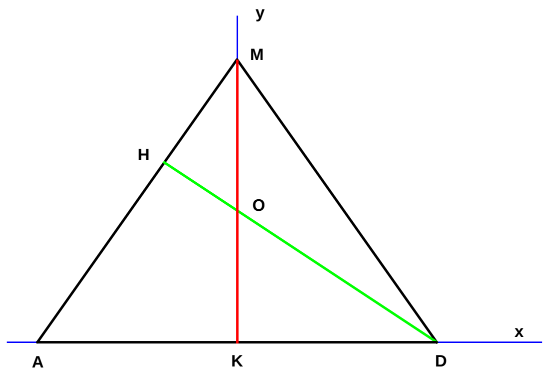
ABC triangle équilatéral, base = c, hauteur = $\dfrac{\sqrt{3}}{2}c$, aire = $A=\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Dans le plan ADM on cherche DH :

$$\begin{cases} DH^2=\dfrac{3}{4}c^2-HM^2 \\ DH^2=c^2-AH^2 \\ HM=\dfrac{\sqrt{3}}{2}c-AH \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{3}{4}+1\right)c^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}c-AH\right)^2-AH^2=0 \Rightarrow AH=\frac{\sqrt{3}}{3}c \Rightarrow DH=\sqrt{\frac{2}{3}}\,c\,.$$

Le volume du tétraèdre est donc $V=\dfrac{1}{3}Base\times Hauteur=\dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2\ \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,c \Leftrightarrow \boxed{V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}c^3}$ et l'aire latérale est

$A_L=4\,.\,Base\quad\rightarrow \boxed{A_L=\sqrt{3}\,c^2}$.



Il reste àétablir une relation entre le rayon R de la sphère circonscrite et c : sachant que R est égal à la distance de l'orthocentre du tétraèdre à un de ses sommets, on reprend ADM et on cherche OH.

Prenons le repère $\left(K,\overrightarrow{KD},\vec{v}\right)$ de sorte que les coordonnées des points sont :

$$M\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right), A\left(-\frac{c}{2},0\right), K(0,0), D:\left(\frac{c}{2},0\right).$$

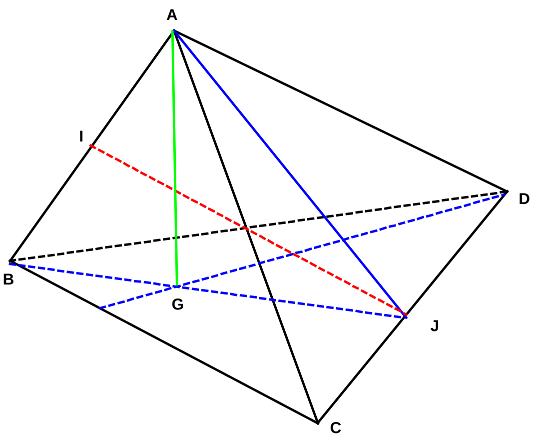
O est à l'intersection de KM et HD d'où l'on tire facilement ses coordonnées : $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{4}c\right)$. On a donc $OB = \frac{c^2}{4} + \frac{2}{16}c^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{6}}{4}c \Leftrightarrow c = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$ et enfin $V = \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}R\right)^3 = \sqrt{3}\left(\frac{2R}{3}\right)^3$ ainsi que l'aire latérale : $A_L = \frac{8\sqrt{3}}{3}R^2$.

8. GSE027

Soit $ABCD$ un tétraèdre régulier (les 6 arêtes sont égales et valent c). On demande :

1. De démontrer que AB est orthogonal à CD.
2. De démontrer que la droite IJ, qui joint les milieux des côtés AB et CD est perpendiculaire à AB et CD.
3. Calculer la hauteur du tétraèdre en fonction de c.

Correction



1. Première méthode : toutes les faces sont des triangles équilatéraux. Traçons les hauteurs AJ et BJ : le plan BJA est orthogonal à CD donc AB est orthogonal à CD.

Deuxième méthode : calcul du produit scalaire

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = c^2\cos 60° - c^2\cos 60° = 0.$$

2. Première méthode : comme IJ appartient au plan DIC, IJ est orthogonal à AB.

Deuxième méthode : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$;

$$\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}AB^2 + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}c^2 - c^2\cos 60° + 0 = 0.$$

c. La hauteur h d'un triangle équilatéral vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}c$. Par ailleurs la hauteur du tétraèdre est liée à l'arête c et à la hauteur h par $h_{tetra}^2 = c^2 - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \Leftrightarrow h_{tetra} = \sqrt{\frac{2}{3}}c$.

9. GSE029 – Mons, questions-types 2000-2001.

On considère une pyramide $SABCD$.

La base $ABCD$ est carrée et la longueur de côté L. Le sommet S est situé sur la perpendiculaire menée de A au plan $ABCD$. La distance entre S et A est égale à $\sqrt{2}.L$.

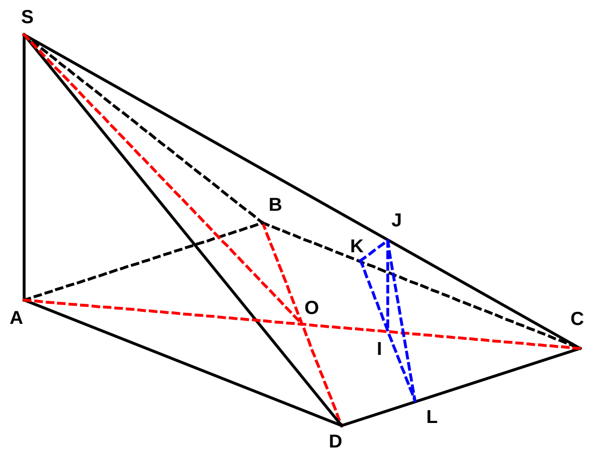
On appelle O le centre de gravité du carré $ABCD$.

1. Démontrer que DS est orthogonal à CD.

2. Par un point quelconque I de OC, on mène un plan perpendiculaire à la diagonale AC.

Démontrer que les droites d'intersection de ce plan perpendiculaire à AC avec les faces SDC et SCB de la pyramide ne sont pas parallèles respectivement à SD et SB.

<u>Correction</u>



1. $SA \perp plan\ ABCD \Rightarrow plan\ SAD \perp plan\ ABCD \Rightarrow plan\ SAD \perp DC \Rightarrow SD$ orthogonal à DC

2. Plan $KJL//SA$; le rectiligne du dièdre formé par les plans ABD et SBD est l'angle $\widehat{SOA}$ qui est inférieur à 90° puisque $\widehat{SAO} = 90°$. Le plan SBD n'est donc pas parallèle au plan KJL.

10. GSE030, Mons, questions-types 2000-2001.

Dans l'espace, on considère un plan (a) et une droite (d_1) perpendiculaire à ce plan et passant par un point A de ce plan. Une seconde droite (d_2) appartient au plan (a), mais ne passe pas par A. Soit d la distance de ce point à (d_2).

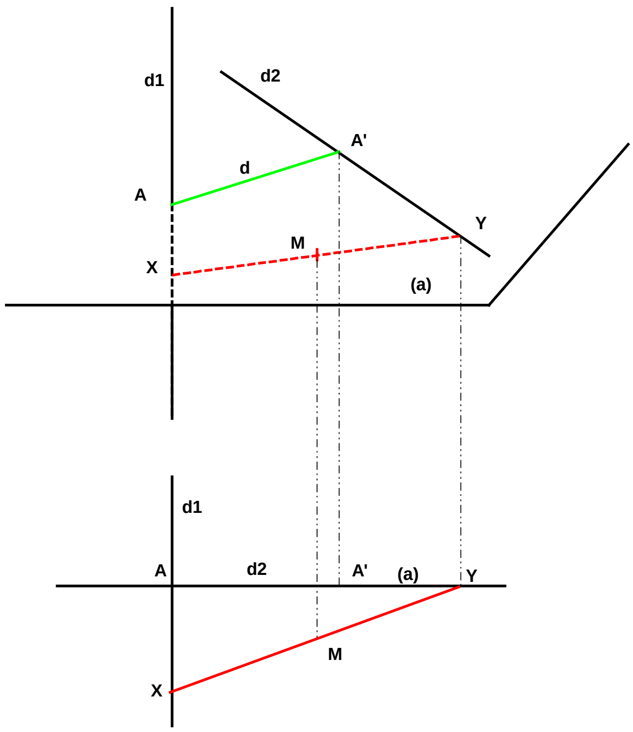
Un segment de longueur constante L s'appuie par ses extrémités sur (d_1) et (d_2) ; les extrémités de ce segment se déplacent en glissant le long de (d_1) et (d_2). Le segment [d] se déplace donc dans l'espace.

On appelle M le point milieu de ce segment. On demande :

1. de déterminer dans quel plan se déplace le point M ;

2. de déterminer, pour chaque position de la droite, à quelle hauteur se situe le point M par rapport au plan (a).

<u>Correction</u>



Il faut bien sûr supposer que $L > d$. Soit X l'extrémité de [d] qui s'appuie sur (d_1) et Y l'extrémité qui s'appuie sur (d_2).

M se déplace dans le plan médiateur du segment [d]. Notons $x = AX$, la hauteur de M par rapport à (a) est $\frac{x}{2}$. Les valeurs extrèmes de x sont $-\sqrt{L^2 - d^2} \le x \le \sqrt{L^2 - d^2}$.

11. GSE031, Mons, questions-types 2000-2001.

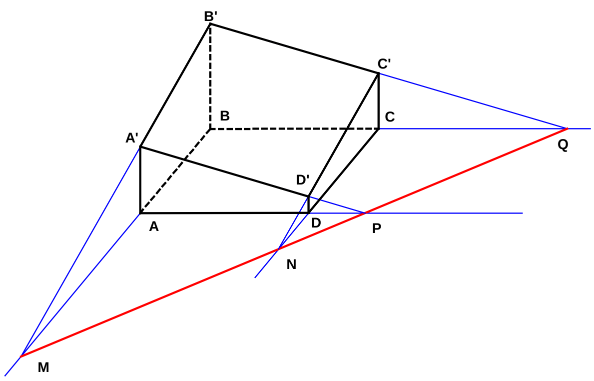
Soit un parallélogramme $ABCD$ appartenant à un plan P_1. Les côtés de ce parallélogramme sont tels que $AB = 2$ et $AD = 1$ et l'angle $BAD = 60°$.

Par chacun des sommets du parallélogramme, on mène une droite perpendiculaire à P_1.

Un second plan P_2 distinct de P_1 coupe ces quatre droites en les points A', B', C' et D'.

1. Démontrer que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.
2. Déterminer la relation liant AA', BB', CC' et DD'.

<u>Correction</u>



1. AA', BB', CC' et DD' sont orthogonaux à P_1 donc les plans $AA'DD'$ et $BB'CC'$ sont parallèles. P_2 est coupé par des plans parallèles donc $A'D' // B'C'$; de même $A'B' // C'D'$ donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

2. $AA'//DD' \Rightarrow \dfrac{AA'}{DD'} = \dfrac{A'D'}{AD}$; $BB'//CC' \Rightarrow \dfrac{BB'}{CC'} = \dfrac{B'C'}{BC}$, or $\dfrac{A'D'}{AD} = \dfrac{B'C'}{BC}$ (car $AD = BC$ et $A'D' = B'C'$)
$\Rightarrow \dfrac{AA'}{DD'} = \dfrac{BB'}{CC'}$.

12. GSE032, Mons, questions-types 2000-2001.

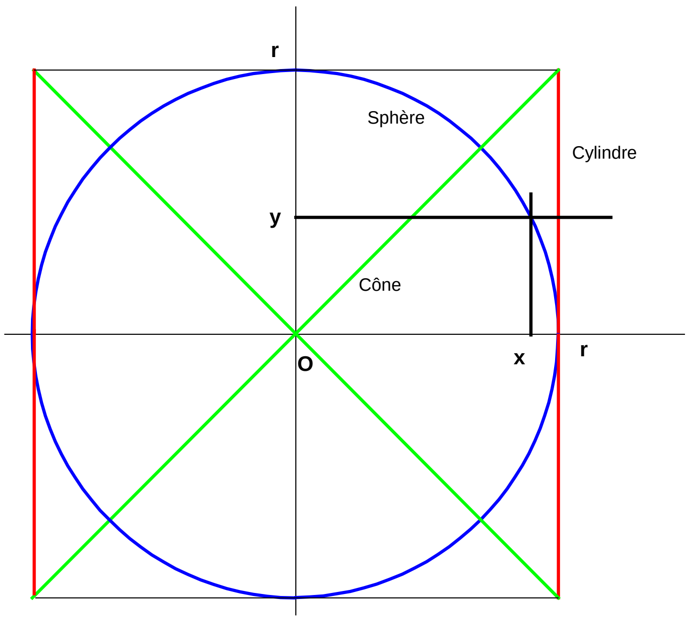
On considère un cylindre de révolution circonscrit à une sphère et le double cône dont le sommet est le centre de la sphère, les deux bases étant celles du cylindre.

On coupe les trois corps (cylindre, sphère et double-cône) par un plan perpendiculaire à leur axe commun.

1. Montrez que l'aire de la section totale dans le cylindre est égale à la somme des deux autres.

2. Si on note R le rayon de sphère, calculez le volume du cylindre et celui du double-cône.

Correction



1. Coupons les solides par un plan passant par l'axe du cylindre. Vu dans ce plan le cône a pour équation $y = x$, la sphère $x^2 + y^2 = R^2$, le cylindre $x = R$.

Si maintenant on coupe par un plan perpendiculaire à l'axe les aires sont : pour le cylindre πR^2 , pour le cône πy^2 et pour la sphère $\pi\left(R^2 - y^2\right)$. On vérifie immédiatement que aire du cylindre est la somme des aires du cône et de la sphère (dans ce plan…).

2. De même on a $V_{cylindre} = 2R \times \pi R^2 = 2\pi R^3$, $V_{cône} = 2\dfrac{1}{3}\pi R^2 \times R = \dfrac{2}{3}\pi R^3$ et $V_{sphère} = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ d'où

$$V_{cyl} = V_{cône} + V_{sph} .$$

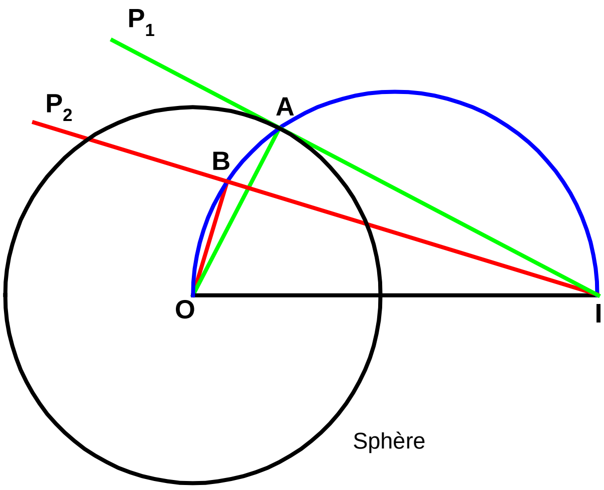
13. GSE033, Mons, questions-types 2000-2001.

Soit une sphère de centre O et un point I situé à l'extérieur de celle-ci à une distance l de O. On demande :

1. Quel est le lieu des centres des cercles sections de cette sphère avec l'ensemble des plans passant par I.

2. De calculer le volume engendré par la rotation autour de OI, du triangle équilatéral dont OI est un des côtés (Le volume sera calculé en fonction de l).

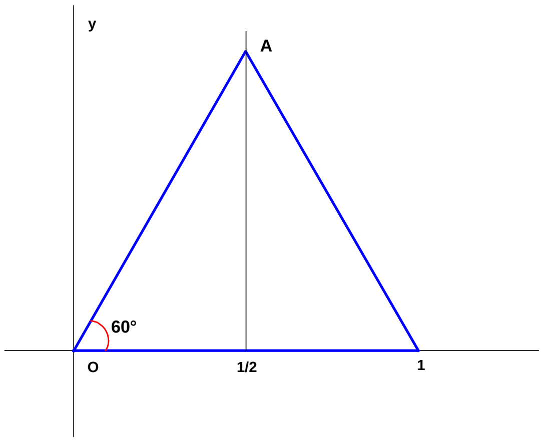
Correction



1. Coupons la sphère par un plan π passant par OI. Considérons les plans P_1 et P_2 perpendiculaires à π et passant par I. P_1 est tangent à la sphère en A (A sur π), dans le plan π, OA est perpendiculaire au plan P_1.

Le plan P_2 coupe la sphère selon un cercle de centre B (B sur π), OB est perpendiculaire à P_2. A et B sont sur le cercle de diamètre OI.

Le lieu de points cherché est la portion de la sphère de diamètre OI située à l'intérieur de la sphère donnée.



2. La droite (OA) a pour équation $y = x\sqrt{3}$ (figure), le volume cherché est

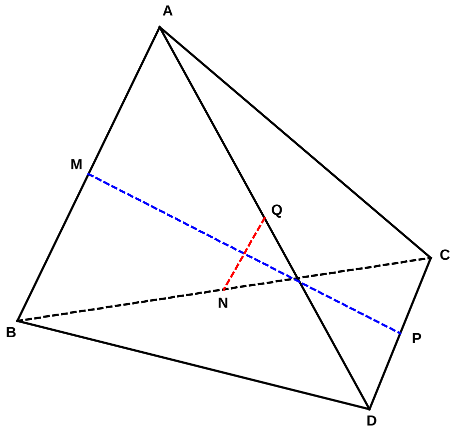
$$V = 2.\pi.\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{3}\, x \right)^2 dx = 2.\pi.3.\left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

14. GSE034, Liège, 1997.

Soient $ABCD$ quatre points de l'espace et soient $MNPQ$ les milieux respectifs des segments AB, BC et DA.

Démontrer que $2\left(MP^2 + NQ^2 \right) = AC^2 + BD^2$.

Correction



Q est le milieu de $[AD]$ et P celui de $[CD]$, (QP) est parallèle à (AC) et $QP = \frac{1}{2}AC$.

De même on a $MQ = \frac{BD}{2}$, $MN = \frac{AC}{2}$, $NP = \frac{BD}{2}$. Par ailleurs

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}$, $MP^2 = MQ^2 + 2\,\overrightarrow{MQ}.\overrightarrow{QP} + QP^2$, $NQ^2 = NP^2 + 2\,\overrightarrow{NP}.\overrightarrow{PQ} + PQ^2$, soit

$MP^2 + NQ^2 = 2\left(\frac{BD}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + 2\overrightarrow{PQ}.\left(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QM}\right)$; le dernier terme est nul car $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{QM}$ sont parallèles et de sens contraire. Finalement on a bien $2\left(MP^2 + NQ^2\right) = AC^2 + BD^2$.

15. GSE035, Liège, juillet 2001.

On considère un tétraèdre régulier (c'est-à-dire dont tous les côtés sont égaux). Soit E le milieu du côté $[CD]$.

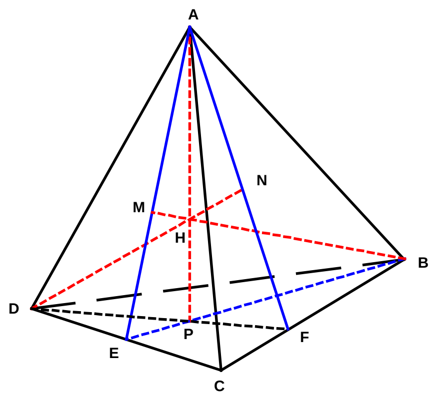
1. Montrer que la droite CD est perpendiculaire au plan ABE.

2. Montrer que la hauteur du triangle ABE issue de A est perpendiculaire à la face BCD et que la hauteur du triangle ABE issue de B est perpendiculaire à la face ACD. (Rappelons qu'une hauteur du tétraèdre est une droite passant par un des sommets et perpendiculaire à la face opposée. Le pied d'une hauteur est son intersection avec la face à laquelle elle est perpendiculaire.)

3. Montrer que les pieds des hauteurs du tétraèdre sont les orthocentres des faces correspondantes.

4. En déduire que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes.

Correction



1. Le triangle *ADC* est équilatéral dont *AE* est une hauteur, $AE \perp CD$. De même *BE* est une hauteur de *BCD* donc $BE \perp CD$; on a donc $CD \perp ABE$.

2. *AP* est une hauteur de *ABE*, $AP \perp EB$; comme *AP* appartient au plan *ABE*, *AP* est orthogonale à la face *BCD*. *AM* est une hauteur de *ABE*, $AM \perp AE$, etc. donc *AM* est orthogonal à la face *ACD*.

3. Soit par exemple la face *BCD*, le plan *APD* est orthogonal à *BC* donc *AP* est une hauteur du triangle *BCD*, *P* est l'orthocentre de *BCD*. Même chose pour les autres faces : *M* orthocentre de *ACD* et *N* de *ABC*.

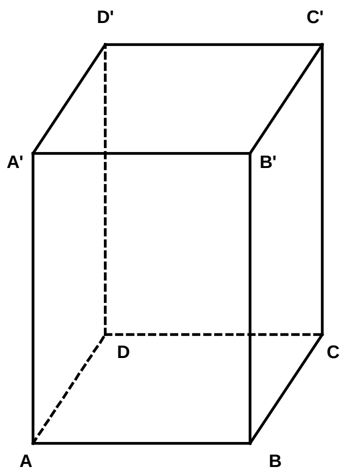
4. $BM \perp AE$ donc *BM* est une hauteur du triangle *ABE* ; $H \equiv AP \cap AE$ est l'orthocentre de *ABE* ; $DN \perp AF$ donc *DF* est une hauteur du triangle *ADF*.

Comme les triangles *ABE* et *ADF* sont égaux et que ces triangles ont la hauteur *AP* en commun, *H* est l'orthocentre du triangle *ADF*.

On fait le même raisonnement pour la quatrième hauteur relative à la face *ADB*. Les quatre hauteurs sont bien concourantes.

16. GSE036, Liège, septembre 2001.

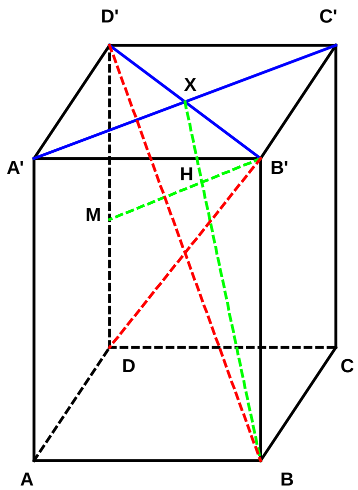
On considère un prisme droit *ABCDA'B'C'D'*, à base carrée *ABCD*.



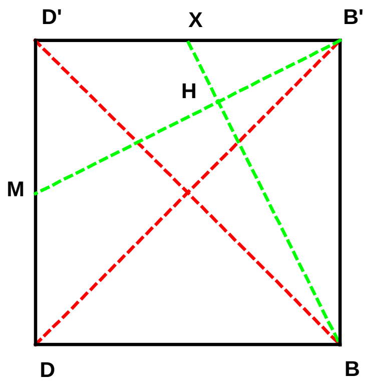
1. Si *X* est le centre (intersection des diagonales) de la face *A'B'C'D'*, la hauteur du triangle *BXB'* issue de *B'* est perpendiculaire au plan *A'C'B*.

2. Prouver que si les diagonales *BD'* et *B'D* sont perpendiculaires, alors la perpendiculaire abaissée de *B'* sur le plan *A'C'B* passe par le milieu de l'arête *DD'*

Correction



1. $A'C' \perp D'B'$ donc $A'C' \perp XB'B$ d'où HB' est orthogonale au plan $XB'B$ et comme $HB' \perp XB$, $HB' \perp A'C'B$.



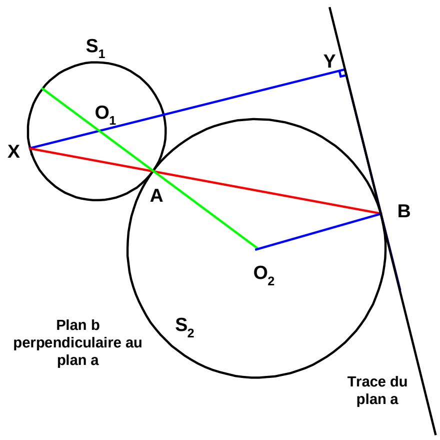
2. La figure représente le plan $D'DBB'$: si $BD' \perp B'D$ alors $D'DBB'$ est un carré. L'angle XBB' est égal à l'angle $MB'D'$ car angles à côtés perpendiculaires donc les triangles XBB' et $MD'B'$ sont égaux et comme $DD' = D'B'$, M est le milieu de DD'.

17. GSE037, Mons, questions 1995 à 1998.

Soit une sphère S_1 et un plan (a) extérieur à cette sphère. On construit une sphère S_2, tangente à la fois au plan (a) et à la sphère S_1.

Démontrez que la droite qui joint les points de contact de S_1 avec S_2 et de S_2 avec (a) passe par l'une des extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan (a).

Correction



Soient O_1 et O_2 les centres respectifs des sphères S_1 et S_2. Travaillons dans le plan contenant la droite O_1O_2 et perpendiculaire au plan (a).

Appelons A et B les points de contact de S_2 avec S_1 et de S_2 avec (a).

Appelons Y le pied de la perpendiculaire abaissée de O_1 au plan (a) et X le point de percée de cette droite dans la sphère S_1.

La droite A_1Y est parallèle à O_2B, car ces deux droites sont perpendiculaires au plan (a).

Par suite, l'angle XO_1A est égal à AO_2B et les triangles XO_1A et AO_2B sont semblables (une angle égal et leurs deux côtés adjacents sont proportionnels).

$\frac{O1A}{O_2A} = \frac{O_1X}{O_2B} = \frac{R}{r}$ (R et r étant les rayons respectifs des sphères S_1 et S_2). Il en résulte que les angles XAO_1 et O_2AB sont égaux et que X est sur le prolongement de AB.

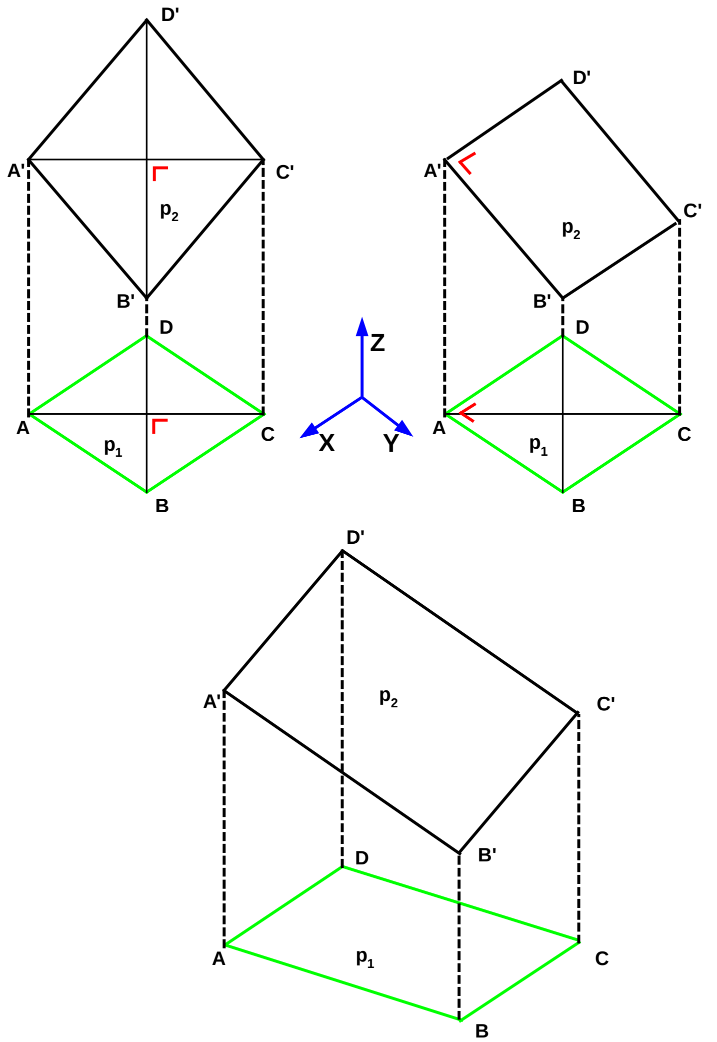
18. GSE038, Mons, 1998.

Soit p_1 et p_2 deux plans de l'espace qui ne sont pas perpendiculaires entre eux. Soit dans le plan p_1, un carré *ABCD* que l'on projette orthogonalement sur p_2 en *A'B'C'D'*.

Déterminer quelles conditions imposer pour que :

1. *A'B'C'D'* soit un losange.
2. *A'B'C'D'* soit un rectangle.
3. *A'B'C'D'* soit un carré.
4. *A'B'C'D'* soit un parallélogramme.

Correction



On sait que pour qu'un angle droit se conserve par projection orthogonale sur un plan, il faut qu'un de ses côtés soit parallèle à ce plan.

1. Les diagonales d'un losange *A'B'C'D'* sont perpendiculaires entre elles, d'où la condition *A'C'* parallèle à p_1 cas de la première figure où *D'B'* est parallèle à p_1.

2. Les côtés d'un rectangle sont perpendiculaires entre eux. D'où la condition *A'D'* (*B'C'*) parallèle à p_1 (cas de la seconde figure) ou *A'B'* (*D'C'*) parallèle à p_1.

3. Pour un carré, une des diagonales et l'un des côtés doivent être parallèles à p_1. Par conséquent, le plan p_2 est parallèle à p_1.

4. Les côtés d'un parallélogramme sont parallèles 2 à 2 et leurs angles ne sont pas droits (troisième figure). Les plans *ADD'A'* et *BCC'B'* sont parallèles entre eux.

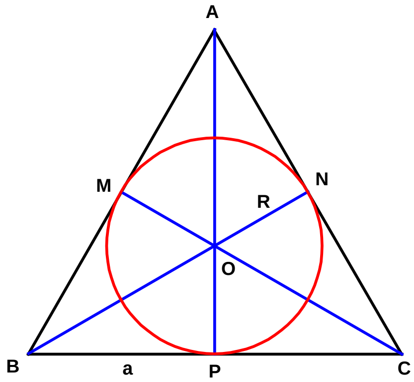
Les plans *ABB'A'* et *DCC'D'* sont parallèles entre eux. Les plans *ADD'A'* et *BCC'B'* sont coupés par p_2 selon 2 parallèles *A'D'* et *B'C'* qui ne sont pas parallèles à p_1. Les plans *ABB'A'* et *DCC'D'* sont coupés par p_2 selon 2 parallèles *A'B'* et *D'C'* qui ne sont pas parallèles à p_1.

Il n'y a donc pas de conditions particulières à imposer.

19. GSE039, Bruxelles, juillet 2000

Par rotation d'un triangle équilatéral et de sa circonférence inscrite, autour d'une hauteur, on obtient un cône et sa boule inscrite. Démontrer que si le volume de la boule est de quatre litres celui du cône en vaut neuf.

Correction



Soit a la longueur du côté : $BH=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ donc $R=\frac{a\sqrt{3}}{6}$ car le centre du cercle inscrit d'un triangle équilatéral est le centre de gravité. Volume de la sphère $V_S=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3$, du cône $V_C=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2.\frac{a\sqrt{3}}{6}$, moralité : $\frac{V_C}{V_S}=\frac{9}{4}$.

20. GSE040, Louvain, juillet 2000, série 1

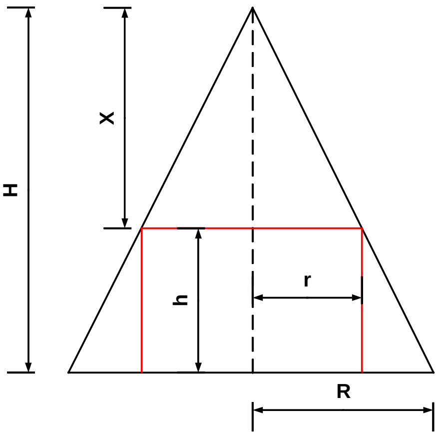
Soit un cône circulaire droit dont le rayon de la base est *R* et dont la hauteur est *H*. Ce cône est circonscrit à un cylindre.

On vous demande :

* de déterminer *X*, la hauteur du cône partiel qui surmonte le cylindre, pour que l'aire latérale du cône partiel soit égale à l'aire latérale du cylindre ;

* d'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

Correction



Les variables sont définies sur le schéma. On a : aire latérale du cylindre $A_{LC} = 2\pi rh$, aire latérale du cône partiel $A_{CP} = \pi r\sqrt{r^2 + X^2}$; égalité lorsque $A_{LC} = A_{CP} \Leftrightarrow 2\pi rh = \pi r\sqrt{r^2 + X^2} \Leftrightarrow 4h^2 = r^2 + X^2$. Or $\frac{h}{r} = \frac{H}{R}$ et $X + h = H$ d'où $X^2 = 4(H - X)^2 - \frac{X^2 R^2}{H^2} \Leftrightarrow \left(3 - \frac{R^2}{H^2}\right)X^2 - 8HX + 4H^2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{4H \pm 2\sqrt{H^2 + R^2}}{3 - \frac{R^2}{H^2}}$.

Discussion :

1. $3 - \frac{R^2}{H^2} = 0$: l'équation devient $-8HX + H^2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{H}{2}$.

2. Lorsque $X = \frac{4H - 2\sqrt{H^2 + R^2}}{3 - \frac{R^2}{H^2}}$ avec $\frac{R}{H} \neq \sqrt{3}$:

2.1. X doit être plus grand que 0 ; le numérateur est positif si $4H \geq 2\sqrt{H^2 + R^2}$, soit $\frac{R}{H} \leq \sqrt{3}$;

le dénominateur est positif si $3 - \frac{R^2}{H^2} \Leftrightarrow \frac{R}{H} \leq \sqrt{3}$ donc X est toujours positif.

2.2. X doit être plus petit ou égal à H

2.2.1. Soit $D > 0$ (donc $\frac{R}{H} < \sqrt{3}$) :

$$\frac{4H - 2\sqrt{H^2 + R^2}}{3 - \frac{R^2}{H^2}} \leq H \Leftrightarrow 4H - 2\sqrt{H^2 + R^2} \leq H\left(3 - \frac{R^2}{H^2}\right) \Leftrightarrow H + \frac{R^2}{H} \leq 2\sqrt{H^2 + R^2}$$

$$\Leftrightarrow H\left(1 + \frac{R^2}{H^2}\right) \leq 2H\sqrt{1 + \frac{R^2}{H^2}} \Leftrightarrow 1 + \frac{R^2}{H^2} \leq 4 \rightarrow \frac{R}{H} \leq \sqrt{3}.$$

2.2.2. Soit $D < 0$ (donc $\frac{R}{H} > \sqrt{3}$) :

$$\frac{4H - 2\sqrt{H^2 + R^2}}{3 - \frac{R^2}{H^2}} \leq H \Leftrightarrow 4H - 2\sqrt{H^2 + R^2} \geq H\left(3 - \frac{R^2}{H^2}\right) \rightarrow H + \frac{R^2}{H} \geq 2\sqrt{H^2 + R^2}$$

$$\Leftrightarrow H\left(1 + \frac{R^2}{H^2}\right) \geq 2H\sqrt{1 + \frac{R^2}{H^2}} \Leftrightarrow 1 + \frac{R^2}{H^2} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{R}{H} \geq \sqrt{3}.$$

On conclut qu'il existe toujours une solution X avec $0 \leq X \leq H$.

3. $X=\dfrac{4H+2\sqrt{H^2+R^2}}{3-\dfrac{R^2}{H^2}}$ avec $\dfrac{R}{H}\neq\sqrt{3}$.

3.1. X doit être plus grand que 0 : le numérateur est toujours positif ; le dénominateur est positif si $\dfrac{R}{H}\leq\sqrt{3}$.

3.2. X doit être plus petit ou égal à H : il suffit que le dénominateur soit >0 :

$4H+2\sqrt{H^2+R^2}\leq H\left(3-\dfrac{R^2}{H^2}\right)\Leftrightarrow 2\sqrt{H^2+R^2}\leq -H-\dfrac{R^2}{H}$ ce qui est impossible.

Conclusion : une seule solution $X=\dfrac{4H-2\sqrt{H^2+R^2}}{3-\dfrac{R^2}{H^2}}$.

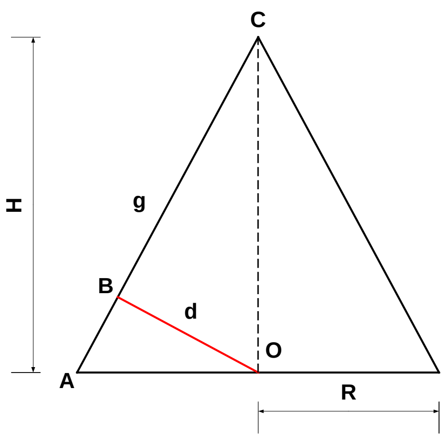
21. GSE041, Louvain, juillet 2000 série 2.

Soit un cône de révolution, on vous demande :

* d'exprimer le volume de ce cône en fonction de son aire latérale S_L et de la distance d entre le centre de la base et la génératrice ;

* d'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

Correction



Les variables sont définies sur le schéma. On a : volume du cône $V=\dfrac{1}{3}\pi R^2H$, aire latéarale du cône : $S_L=\pi Rg$; on divise : $\dfrac{V}{S_L}=\dfrac{1}{3}\dfrac{RH}{g}$. Les triangles rectangles ABO et AOC sont semblables car ils ont un angle à côtés perpendiculaires : $\dfrac{g}{R}=\dfrac{H}{d}\Leftrightarrow d=\dfrac{RH}{g}\Rightarrow\boxed{V=\dfrac{1}{3}S_Ld}$.

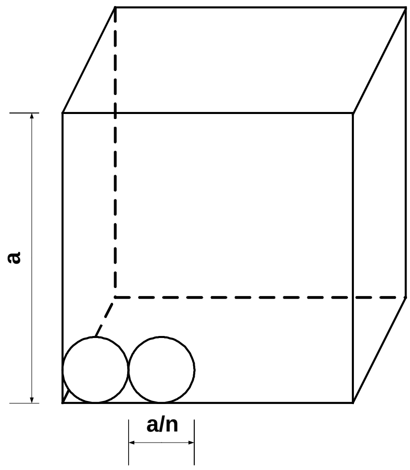
22. GSE042, Louvain, septembre 2000.

Soit un cube d'arête a. On remplit ce cube avec des sphères de diamètre a/n (alignement cubique). On vous demande :

* de déterminer n pour que la somme des volumes des sphères soit maximale ;

* d'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

Correction



Les variables sont définies sur le schéma. Une couche contient n^2 sphères ; on a n couches, il y a donc n^3 sphères dans le cube. Volume d'une sphère $V_S = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2n}\right)^3$ d'où le volume des sphères :

$$V = n^3.\frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2n}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi a^3 .$$

La somme du volume des sphères est donc indépendant de n et est égal au volume de la sphère inscrite dans le cube.

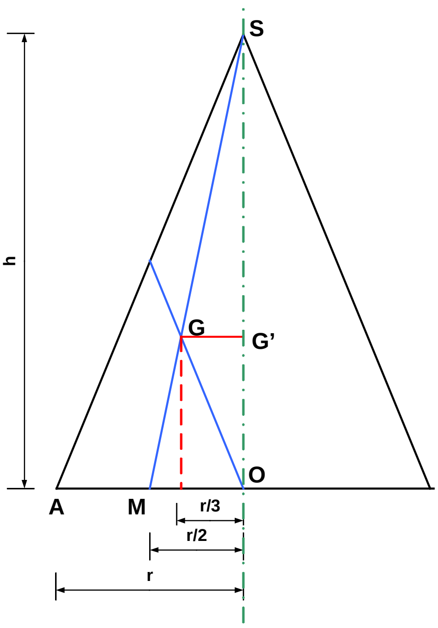
23. GSE043, Louvain, juillet 2001, série 1.

Soit un cône circulaire droit. On vous demande :

* d'exprimer le volume de ce cône en fonction de l'aire du triangle générateur et de la longueur de la circonférence engendrée par le point de concours des médianes de ce triangle ;

* d'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

Correction



Les variables sont définies sur le schéma. Le triangle générateur est le triangle AOS ; surface $S_\Delta = \frac{rH}{2}$; comme G est aux 2/3 de la médiane SM, $GG' = \frac{2}{3}\frac{r}{2} = \frac{r}{3}$. La longueur de la circonférence générée par G est $L = 2\pi\frac{r}{3}$ et le volume du cône est $V_C = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{2\pi r}{3}\frac{rH}{2} = \boxed{L.S_\Delta}$.

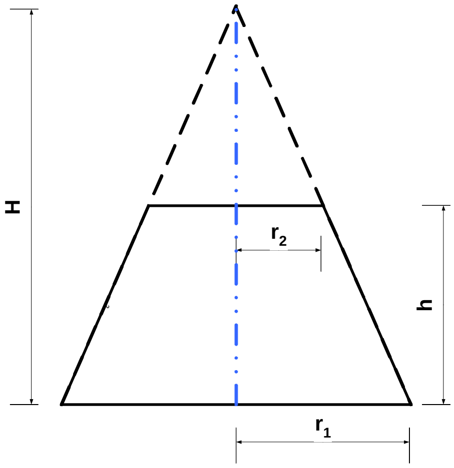
24. GSE044, Louvain, juillet 2001, série 2.

Soit un tronc de cône droit dont la hauteur est égale à quatre fois la différence des rayons des deux bases du tronc de cône. On vous demande :

* d'exprimer le volume du tronc de cône en fonction des deux sphères qui auraient pour rayon ceux des bases du tronc ;

* d'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

Correction



Les variables sont définies sur le schéma. On a $h = 4(r_1 - r_2)$; le volume des sphères $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3$ et $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3$; le volume du tronc de cône :

$$V_{TC} = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)h = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)4\left(r_1 - r_2\right) \Rightarrow V_{TC} = \frac{4}{3}\pi\left(r_1^3 - r_2^3\right) = \boxed{V_1 - V_2}.$$

25. GSE045, Louvain, septembre 2001.

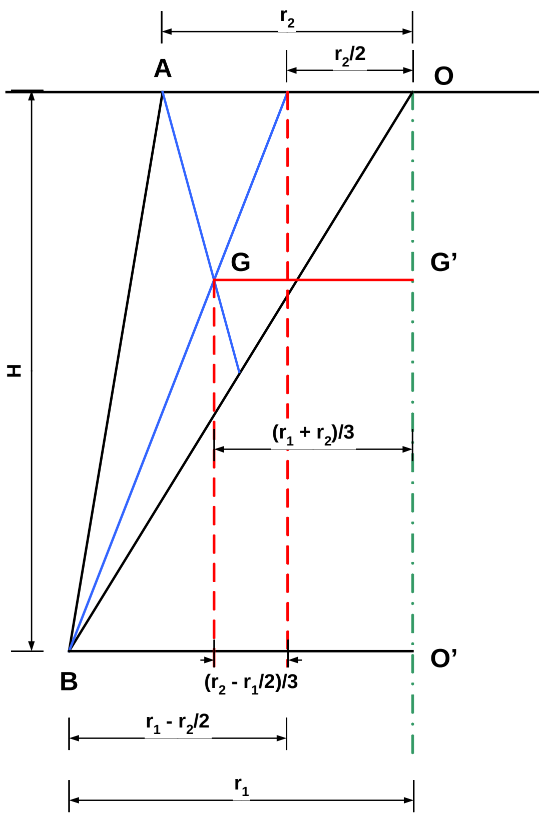
Soit dans un plan un triangle quelconque. Par un des sommets, on trace un axe qui ne traverse pas le triangle et qui est perpendiculaire à un ces côtés de ce sommet.

On vous demande :

* d'exprimer le volume engendré par la rotation du triangle autour de cet axe en fonction de l'aire du triangle et de la longueur de la circonférence que décrit son centre de gravité ;

* d'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

Correction



Les variables sont définies sur le schéma. G est aux 2/3 de la médiane issue de B : $GG' = \frac{r_2}{2} + \frac{1}{3}\left(r_1 - \frac{r_2}{2}\right) = \frac{r_1 + r_2}{3}$. La longueur de la circonférence générée par G est $L = 2\pi\frac{r_1 + r_2}{3}$.

Le volume engendré par la rotation du triangle ABO est égale au volume du tronc de cône engendré par $AOO'B$ diminué du volume engendré par AOO'.

Surface du triangle ABO : $S_\Delta = \frac{r_2 H}{2}$, volume cône : $V_C = \frac{1}{3}\pi r_1^2 H$, volume tronc de cône : $V_{TC} = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)H$, volume engendré par le triangle ABO : $V_\Delta = V_{TC} - V_C = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - r_1^2\right)H$

et finalement $V_\Delta = \frac{1}{3}\pi r_2\left(r_1 + r_2\right)H = \frac{2\pi\left(r_1 + r_2\right)}{3}\frac{r_2 H}{2} = \boxed{L.S_\Delta}$.

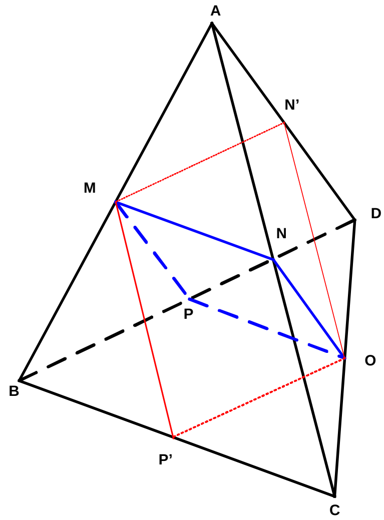
26. GSE046, Liège, juillet 2002

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note M le milieu de $[AB]$ et π le plan contenant M et parallèle à AD et à BC. Ce plan coupe AC en N, CD en O et DB en P.

1. Montrer que $MNOP$ est un parallélogramme.

2. En déduire que les droites joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.

Correction



1. π // BC donc π coupe le dièdre d'arête BC selon deux droites parallèles : MN et PO. De plus M est le milieu de AB donc N est celui de AC.

Même raisonnement sur π // AD donc P est le milieu de BD.

Conclusion O est le milieu de CD car PO est parallèle à BC ; MO et NP sont deux diagonales se coupant en leur milieu O.

2. On recommence avec un plan parallèle à BD et AC et passant par M ; ceci donne un deuxième parallélogramme $MN'OP'$ ayant une diagonale commune avec $MNOP$: les droites joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.

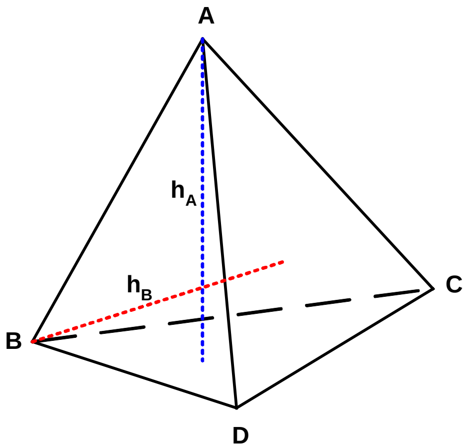
27. GSE047, Liège, septembre 2002

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note respectivement h_A et h_B les hauteurs issues de A et de B.

1. Démontrer que h_A et h_B sont concourantes si et seulement si la droite AB est orthogonale à la droite CD.

2. Démontrer que les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes si les arêtes opposées de ce tétraèdre sont orthogonales deux à deux.

Correction



1. La condition est suffisante : soient BA et DC orthogonales :

$h_A \perp$ Plan BDC $\rightarrow$ $h_A \perp DC$ $\rightarrow$ $DC \perp$ Plan BAh_A et $h_B \perp$ Plan ADC $\rightarrow$ $h_B \perp DC$ $\rightarrow$ $DC \perp$ Plan BAh_B

donc h_A et h_B sont coplanaires et concourantes.

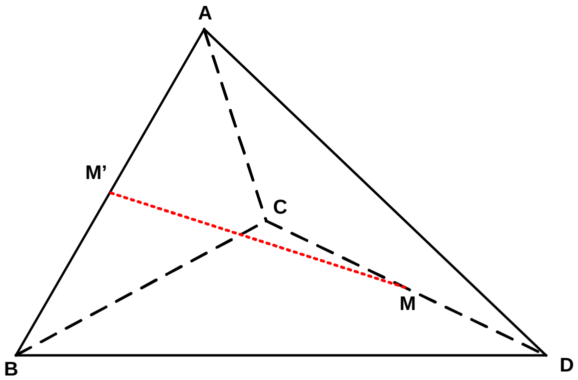
La condition est nécessaire : h_A et h_B sont concourantes donc $DC \perp h_A h_B \Rightarrow BA \perp DC$.

2. On refait la même démonstration avec les autres arêtes prises deux à deux.

28. GSE048, Liège, juillet 2003.

Soit *ABCD* un tétraèdre tel que *AC* = *AD* et BC = *BD* et tel que les triangles *ACD* et *BCD* aient même aire. Si *M* et *M'* sont les milieux de [*CD*] et [*AB*], démontrer que *MM'* est la perpendiculaire commune à *AB* et *CD.*

Correction



$$\left.\begin{array}{l} \Delta ACD \text{ isocèle} \Leftrightarrow S_{ACD} = \dfrac{CD.AM}{2} \\ \Delta BCD \text{ isocèle} \Leftrightarrow S_{BCD} = \dfrac{CD.BM}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow AM = BM \text{ donc } \Delta AMB \text{ isocèle et } MM' \perp AB.$$

$AM \perp CD$ et $BM \perp CD$ donc $CD \perp$ plan $AMB \Rightarrow MM' \perp CD$.

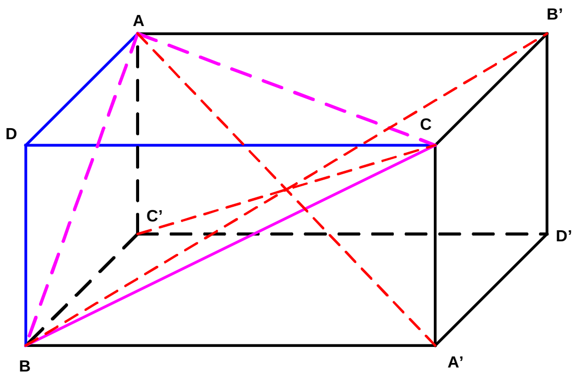
On conclut que *MM'* est la perpendiculaire commune à *CD* et *AB*.

29. GSE049, Liège, septembre 2003.

On considère un parallélépipède dont *DA*, *DB*, *DC* sont des arêtes et *AA'*, *BB'*, *CC'* des diagonales.

Montrer que $\left|\overline{AA'}\right|^2 + \left|\overline{BB'}\right|^2 + \left|\overline{CC'}\right|^2 = \left|\overline{BC}\right|^2 + \left|\overline{CA}\right|^2 + \left|\overline{AB}\right|^2 + \left|\overline{DA}\right|^2 + \left|\overline{DB}\right|^2 + \left|\overline{DC}\right|^2$.

Correction



$$\left|\overline{AA'}\right|^2 = \overline{AA'}^2 = \left(\overline{AB} + \overline{BA'}\right)^2 = \left(\overline{AB} + \overline{DC}\right)^2, \left|\overline{BB'}\right|^2 = \overline{BB'}^2 = \left(\overline{BC} + \overline{CB'}\right)^2 = \left(\overline{BC} + \overline{DA}\right)^2,$$

$$\left|\overline{CC'}\right|^2 = \overline{CC'}^2 = \left(\overline{CA} + \overline{AC'}\right)^2 = \left(\overline{CA} + \overline{DB}\right)^2$$

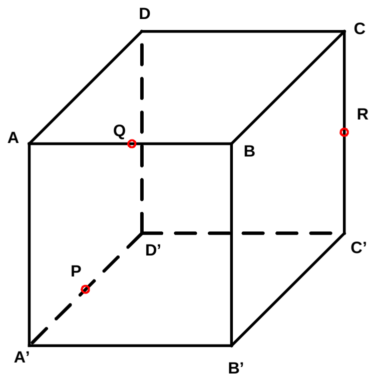
Si on développe et additionne les derniers membres on retrouve tous les carrés demandés. Il suffit de vérifier que les doubles produits s'annulent. En effet :

$2\overline{AB}.\overline{DC} = 2\left(\overline{AD} + \overline{DB}\right).\overline{DC} = 2\overline{AD}.\overline{DC} + 2\overline{DB}.\overline{DC}$, $2\overline{BC}.\overline{DA} = 2\left(\overline{BD} + \overline{DC}\right).\overline{DA} = 2\overline{BD}.\overline{DA} + 2\overline{DC}.\overline{DA}$,

$2\overline{CA}.\overline{DB} = 2\left(\overline{CD} + \overline{DA}\right).\overline{DB} = 2\overline{CD}.\overline{DB} + 2\overline{DA}.\overline{DB}$; la somme des derniers membres est nulle.

30. GSE050, Liège, septembre 2003

On considère le cube $ABCDA'B'C'D'$. On note P le milieu de $[D'A']$, Q le milieu de $[AB]$ et R le milieu de $[CC']$.

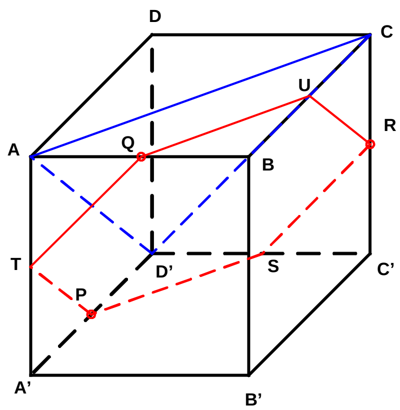


1. Montrer que $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC}\right)$ et $\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}\right)$.

2. Montrer que le plan PQR est parallèle au plan ACD'.

3. Montrer que PQR coupe le cube selon un hexagone régulier.

<u>Correction</u>



1. $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PD'} + \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BQ}$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{D'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{D'A} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{D'A} + \overrightarrow{AC}\right).$$

$$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} + \frac{1}{2}\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CR}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'R}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}\right) + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{D'C'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD'}\right).$$

2. En vertu du point 1) $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont des combinaisons linéaires de $\overrightarrow{D'A}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$ sont parallèles au plan $ACD' \rightarrow$ les plans PQR et ACD' sont parallèles.

3. $QU \,//\, AC$ puisque les plans PQR et ACD' sont parallèles $\rightarrow$ U est le milieu de BC et $|QU| = \frac{|AC|}{2}$.

De même pour SR et TP et comme les diagonales des faces du cube sont égales

$\rightarrow$ $|QU| = |UR| = |RS| = |SP| = |TP| = |PQ|$. De plus, $|QS| = |UP| = |TR|$ car médianes du cube

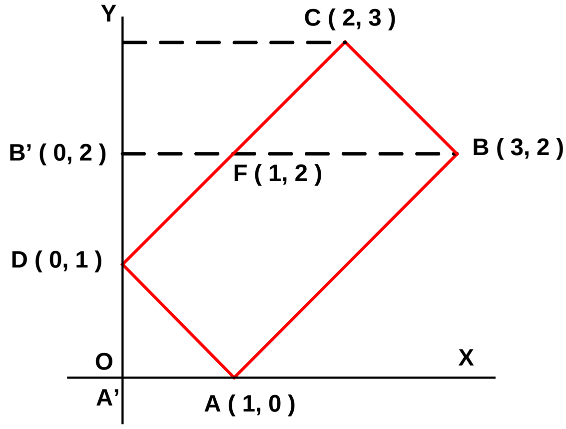
$\rightarrow$ $QURSTQ$ est un hexagone régulier.

31. GSE051, Bruxelles, juillet 2003

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y, on donne quatre points :

A (1, 0), B (3, 2), C (2, 3) et D (0, 1).

Calculer le volume balayé par le rectangle ABCD lorsqu'on lui fait subir une rotation de 180° autour de l'axe OY



Correction

Rappel : Volume du tronc de cône : $V_{TC} = \frac{\pi}{12} h\left(D^2 + Dd + d^2 \right)$

Volume du cône : $V_C = \frac{\pi}{3} r^2 h.$

Le volume recherché (V) est la moitié de : volume du tronc de cône engendré par $CC'BB' \left(V_{TC}^{CC'BB'} \right)$

$-$ volume du tronc de cône engendré par $CC'FB' \left(V_{TC}^{CC'FB'} \right)$

$+$ volume du tronc de cône engendré par $B'BAA' \left(V_{TC}^{B'BAA'} \right)$

$-$ volume de cône $B'FD \left(V_C^{B'FD} \right)$ $-$ volume du cône $DAA' \left(V_C^{DAA'} \right)$.

$V_{TC}^{CC'BB'} = \frac{\pi}{12} \times 1 \times \left(6^2 + 6 \times 4 + 4^2 \right) = \frac{76\pi}{12}$; $V_{TC}^{CC'FB'} = \frac{\pi}{12} \times 1 \times \left(4^2 + 4 \times 2 + 2^2 \right) = \frac{28\pi}{12}$;

$V_{TC}^{B'BAA'} = \frac{\pi}{12} \times 2 \times \left(6^2 + 6 \times 2 + 2^2 \right) = \frac{104\pi}{12}$; $V_C^{B'FD} = V_C^{DAA'} = \frac{\pi}{3} 1^2 \times 1 = \frac{\pi}{3}$;

$\rightarrow V = V_{TC}^{CC'BB'} - V_{TC}^{CC'FB'} + V_{TC}^{B'BAA'} - 2V_C^{B'FD} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{12} (76 - 28 + 104 - 8) = 6\pi.$

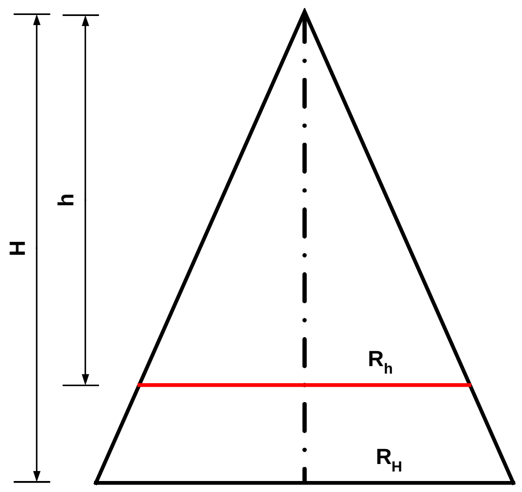
32. GSE052, Louvain, juillet 2002, série 1

Soit un cône circulaire droit qui est coupé par un plan parallèle à sa base. On vous demande :

* de déterminer la position du plan par rapport au sommet du cône pour que les volumes des deux solides formés soient égaux ;

* d'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

Correction



$V_H = \frac{1}{3}\pi R_H{}^2 H\ ;\ V_h = \frac{1}{3}\pi R_h{}^2 h$, or $\frac{R_h}{h} = \frac{R_H}{H}$ et $V_H = 2V_h \Rightarrow \frac{1}{6}\pi R_H{}^2 H = \frac{1}{3}\pi \frac{R_H{}^2}{H^2} h^3$

$\Rightarrow h^3 = \frac{1}{2}H^3 \Rightarrow \boxed{h = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}H \simeq 0.7937.H}$.

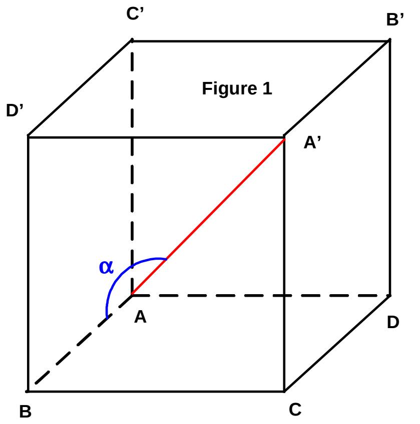
33. GSE053, Louvain, juillet 2002, série 2

Soit un cube d'arête a et dont les diagonales sont AA', BB', CC' et DD'. On fait tourner le cube autour de AA'. On vous demande :

* de déterminer en fonction de a l'aire de la surface engendrée par le segment de droite AB.

* d'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

Correction



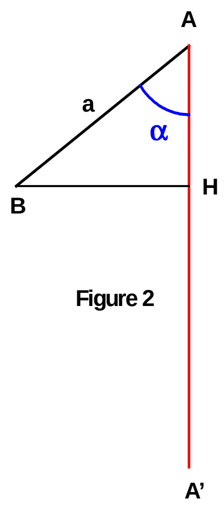


Figure 1 : $\overrightarrow{AB} : (a,0,0)$ $\overrightarrow{AA'} : (a,a,a)$; soit α est l'angle entre ces deux vecteurs : $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\alpha = 54.7356°$.

La Figure 2 montre le plan ABA' : $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}a$, $BH = \frac{\sqrt{6}}{3}a$;

AB engendre un cône dont l'aire latérale est : $A_L = 2\pi\,.\,AH\,.\,BH = 2\pi.\frac{\sqrt{3}}{3}a.\frac{\sqrt{6}}{3}a$, $\boxed{A_L = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2}$

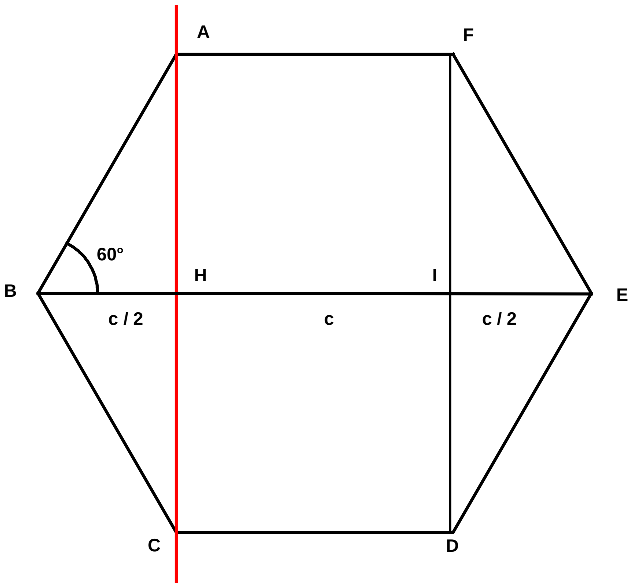
34. GSE054, Louvain, septembre 2002

Soit un hexagone régulier tournant autour d'un axe passant par un de ses sommets et perpendiculaire à un côté adjacent. On vous demande :

* De déterminer les rapports entre les volumes et les surfaces totales des deux solides engendrés par cette rotation.

* D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.

Correction



Puisque $\widehat{ABE} = 60°$, $BH = \frac{c}{2}$ et $AH = \frac{\sqrt{3}}{2}c$.

Rapport des volumes : Il suffit d'étudier le rapport des volumes engendré par $AFEH$ et ABH.

ABH engendre un cône : $V_{ABH} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{c}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{24}c^3$, $AFEH$ engendre un tronc de cône :

$$V_{AFEH} = \frac{\pi}{3}\left[\left(\frac{3c}{2}\right)^2 + \frac{3c}{2}.c + c^2\right].\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{19\sqrt{3}\pi c^3}{24} \Rightarrow \frac{V_{ABH}}{V_{AFEH}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{24}c^3}{\frac{19\sqrt{3}\pi c^3}{24}} = 19.$$

Rapport des surfaces totales : Ici aussi, il suffit de faire le rapport des surfaces engendrées par AB et AFE.

AB : surface latérale d'un cône : $S_1 = \pi\frac{c}{2}c = \frac{\pi c^2}{2}$ (Rappel : $S = \pi r l$).

AFE : AF, surface d'un cercle : $S_2 = \pi c^2$;

FE, surface latérale d'un tronc de cône : $S_3 = \pi\left(c+\frac{3c}{2}\right)c = \frac{5\pi c^2}{2}$ (Rappel : $S = \pi(r_1 + r_2)l$)

$S_4 = S_2 + S_3 = \pi c^2 + \frac{5\pi c^2}{2} = \frac{7\pi c^2}{2}$ donc $\frac{AFE}{AB} = \frac{\frac{7\pi c^2}{2}}{\frac{\pi c^2}{2}} = 7.$

35. GSE055, Louvain, juillet 2003, série 1

On considère une caisse cubique de côté c. On désire mettre dans cette caisse des troncs cylindriques de hauteur c et de rayon $c/20$ et ensuite refermer la caisse : en d'autres mots, rien ne peut déborder de la caisse.

On vous demande :

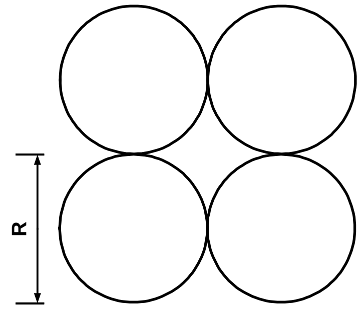
* de donner le nombre maximum de cylindres qui peuvent être placés dans cette caisse,

* de calculer le rapport entre le volume vide et le volume de la caisse,

* d'expliquer votre démarche par un dessin précis.

Correction

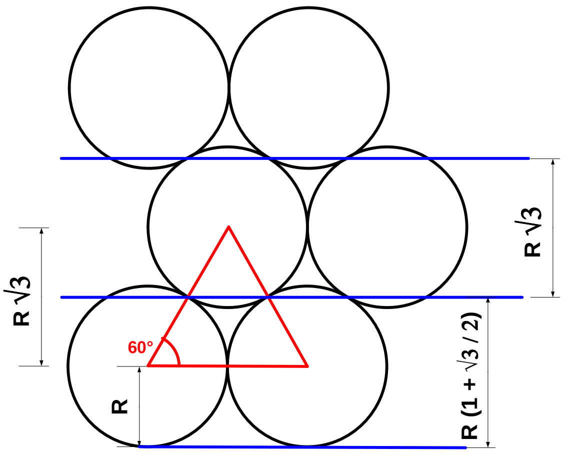
Figure 1
Arrangement en carré



Envisageons d'abord l'arrangement en carré : on pourra mettre 10 couches de 10 cylindres. Le nombre de cylidres sera alors 10^2=100.

$\text{Volume vide } = c^3 - 100 \times \frac{\pi c^2}{400} \times c = c^3\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$ $\frac{\text{Volume vide}}{\text{Volume total}} = 1 - \frac{\pi}{4} = 21.46\%$.

Figure 2
Arrangement hexagonal



Envisageons maintenant l'arrangement hexagonal : la première couche aura une hauteur de $\frac{c}{20}.\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; les couches intermédiaires une hauteur de $\frac{c}{20}\sqrt{3}$, la dernière couche une hauteur de $\frac{c}{20}.\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

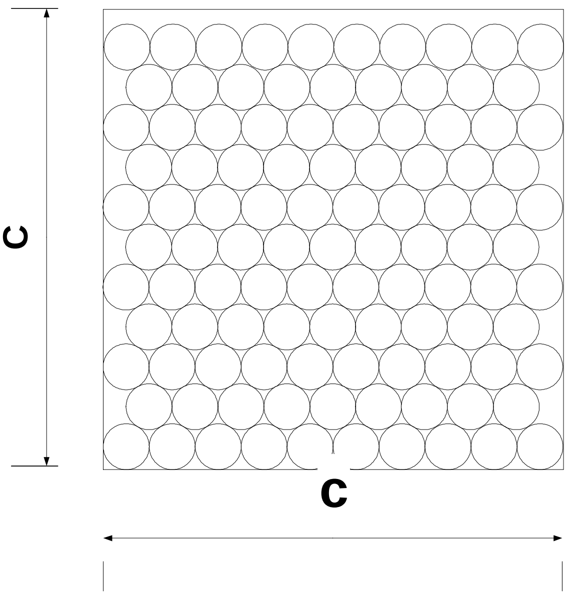
Le nombre total n de couches sera le plus grand entier tel que

$$2\left(\frac{c}{20}.\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)+(n-2)\frac{c}{20}\sqrt{3}\leq c \Rightarrow 2+\sqrt{3}+(n-2)\sqrt{3}\leq 20 \Rightarrow n\leq \frac{20-\left(2+\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}}+2 \Rightarrow n=11 .$$

Les couches paires comprennent 10 cylindres et les couches impaires 9 ; le nombre de cylindres est : $6\times 10+5\times 9=105$.

$$\text{Volume vide } =c^3-105\times\frac{\pi c^2}{400}\times c=c^3\left(1-\frac{105\pi}{100}\right);\frac{\text{Volume vide}}{\text{Volume total}}=1-\frac{105\pi}{400}=17.53\%.$$

L'arrangement hexagonal permet de mettre plus de cylindres.

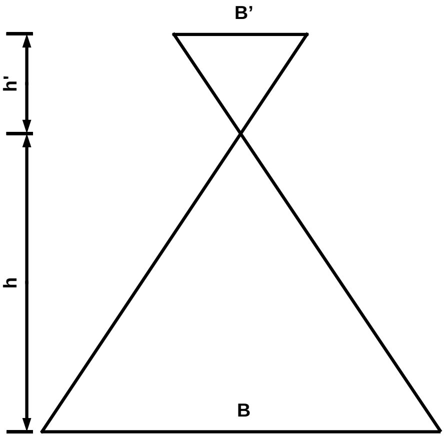


36. GSE056, Louvain, juillet 2003, série 2

Soit une pyramide de base B et de hauteur h. On prolonge les arêtes de cette pyramide au-delà du sommet et on coupe ces prolongements par un plan parallèle à la base B. On forme ainsi une seconde pyramide de hauteur h' et de base B'. On définit : $\Delta h=\left|h'-h\right|$.

On vous demande d'exprimer la somme des volumes de ces deux pyramides en fonction de B, de B' et de Δh , en vous aidant d'un dessin du problème.

Correction



On a : $\left(\frac{h'}{h}\right)^2=\frac{B'}{B}\Rightarrow h=h'.\sqrt{\frac{B}{B'}}\Rightarrow \Delta h=\left|h'-h\right|=\left|h'-h'.\sqrt{\frac{B}{B'}}\right|=h'\left|1-\sqrt{\frac{B}{B'}}\right|\Rightarrow h'=\frac{\Delta h}{\left|1-\sqrt{\frac{B}{B'}}\right|}$ $\quad(1)$

D'autre part : $V+V'=\frac{1}{3}\left(Bh+B'H'\right)=\frac{1}{3}\left(Bh-Bh'+Bh'+B'h'\right)=\frac{1}{3}\left(B.\Delta h+h'\left(B+B'\right)\right)$.

En vertu de (1) : $V+V'=\frac{1}{3}\left(B.\Delta h+\frac{\Delta h}{\left|1-\sqrt{\frac{B}{B'}}\right|}\left(B+B'\right)\right)\Rightarrow \boxed{V+V'=\frac{\Delta h}{3}\left(B+\frac{B+B'}{\left|1-\sqrt{\frac{B}{B'}}\right|}\right)}$.

37. GSE057, Louvain, septembre 2003

Une "maison" est construite à partir d'un cube de côté a auquel on superpose un toit pyramidal de hauteur H. Pour des raisons de dimensionnement du chauffage, on cherche à construire trois niveaux (rez de chaussée au niveau zéro et deux étages) ayant le même volume. Le premier étage est au niveau h_1 et le deuxième étage au niveau $h_1 + h_2$.

On vous demande :

* d'exprimer h_1 et h_2 en fonction de a et H en discutant la solution pour différentes valeurs de a et H ;

* d'évaluer h_1 dans les cas (i) $a = 1, H = 1/2$ et (ii) $a = 1, H = 9$.

Correction

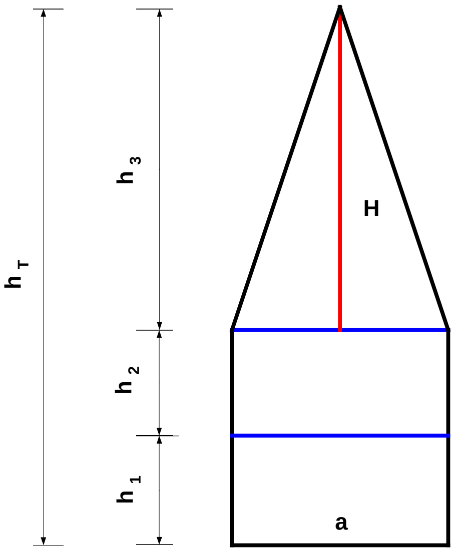


Figure 1
H = 3 a / 2

Posons V_1 le volume correspondant à la hauteur h_1, V_2 celui correspondant à h_2, V_3 à h_3, où h_3 est la hauteur du troisième niveau, V_T le volume total : $V_T = a^2\left(a+\frac{H}{3}\right)$.

Envisageons deux cas particuliers :

a. le niveau h_1+h_2 arrive juste à hauteur du toit (fig. 1) ; dans ce cas $V_1 = V_2 = \frac{a^3}{2}$ d'où $V_3 = \frac{1}{3}a^2H = V_1 = \frac{a^3}{2}$, soit $H = \frac{3}{2}a$;

b. le niveau h_1 arrive juste à hauteur du toit (fig. 2) : $V_1 = a^3$, $V_1+V_2 = \frac{1}{3}a^2H = 2a^3 \Rightarrow H = 6a$.

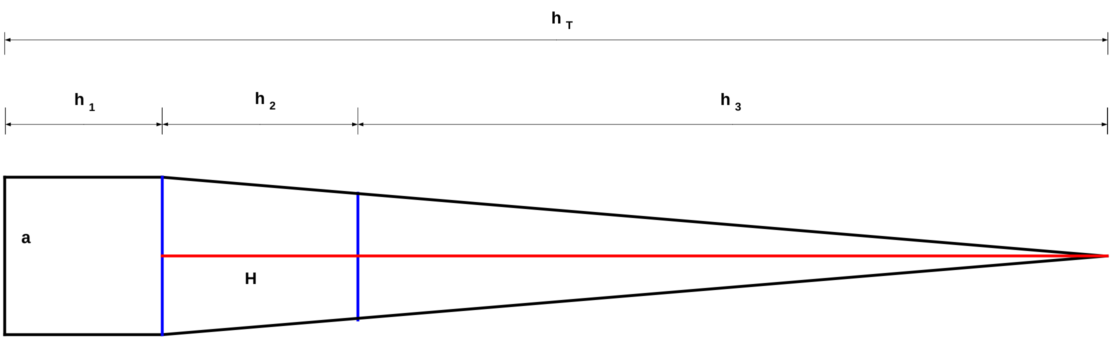


Figure 2
H = 6 a

Il faut donc traiter les cas :

1. $\underline{0 \le H \le \frac{3}{2}a} \Rightarrow h_1+h_2 \le a \Rightarrow V_1 = V_2 = h_1a^2 = \frac{1}{3}V_T = \frac{1}{3}a^2\left(a+\frac{H}{3}\right) \Leftrightarrow \boxed{h_1 = h_2 = \frac{1}{9}(3a+H)}$.

2. $\underline{\frac{3}{2}a \le H \le 6a} \Rightarrow h_1 \le a$ et $h_1+h_2 \ge a \Rightarrow V_1 = h_1a^2 = \frac{1}{3}V_T = \frac{1}{3}a^2\left(a+\frac{H}{3}\right) \Leftrightarrow \boxed{h_1 = \frac{1}{9}(3a+H)}$.

$V_3 = \frac{1}{3} {c_3}^2 h_3$ ($c_3 =$ côté de la basse carrée de la pyramide au niveau 3),

or $c_3 = \frac{h_3 a}{H} \Rightarrow V_3 = \frac{1}{3} \frac{{h_3}^3 a^2}{H^2} = \frac{1}{3} a^2 \left(a + \frac{H}{3} \right) \Leftrightarrow h_3 = \sqrt[3]{H^2 \left(\frac{H}{3} + a \right)} \Leftrightarrow h_2 = a + H - h_1 - h_3$.

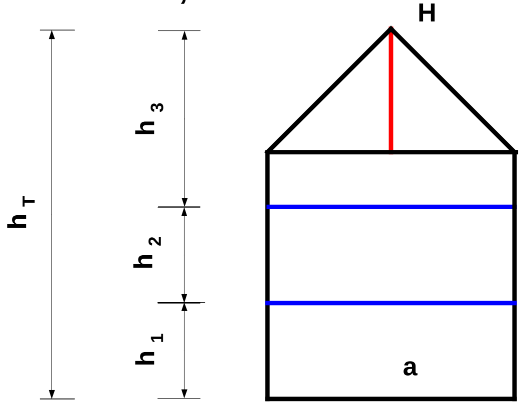
3. $\underline{6a \le H} \Rightarrow h_1 \ge a \Rightarrow V_3 = \frac{1}{3} \frac{{h_3}^3 a^2}{H^2} = \frac{1}{3} a^2 \left(a + \frac{H}{3} \right) \quad \to \quad h_3 = \sqrt[3]{H^2 \left(\frac{H}{3} + a \right)} \Leftrightarrow V_2 + V_3 = \frac{1}{3} {c_2}^2 h_3$
,

($c_3 =$ côté de la basse carrée de la pyramide au niveau 2), or $c_2 = \frac{(h_2 + h_3) a}{H} \Leftrightarrow V_2 + V_3 = \frac{1}{3} \frac{(h_2 + h_3)^3 a^2}{H^2}$.

$V_1 = \frac{1}{3} V_T = \frac{1}{3} a^2 \left(a + \frac{H}{3} \right) = V_T - (V_2 + V_3) = a^2 \left(a + \frac{H}{3} \right) - \frac{1}{3} \frac{(h_2 + h_3)^3 a^2}{H^2}$

$\Rightarrow h_2 = \sqrt[3]{2H^2 \left(\frac{H}{3} + a \right)} - h_1 = \left(\sqrt[3]{2} - 1 \right) \sqrt[3]{H^2 \left(\frac{H}{3} + a \right)} \Leftrightarrow \boxed{h_1 = a + H - (h_2 + h_3) = a + H - \sqrt[3]{2H^2 \left(\frac{H}{3} + a \right)}}$.

Figure 3
a = 1 , H = 1 / 2



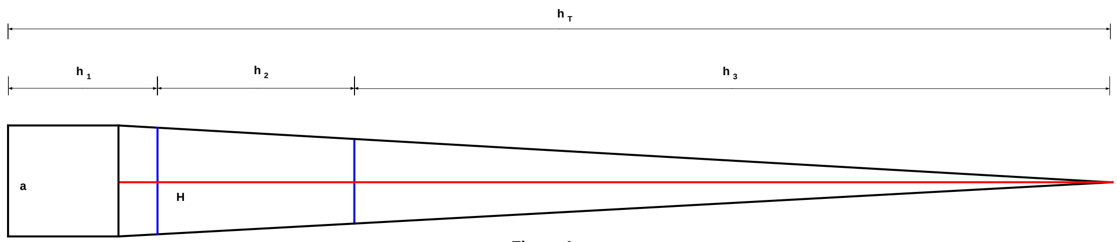


Figure 4
a = 1 , H = 9

Applications :

i) $a = 1, \quad H = \frac{1}{2}$, nous sommes dans le premier cas : $h_1 = h_2 = \frac{1}{9} \left(3 + \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{18} \simeq 0.3889$, $h_3 = 0.7222$.

ii) $a = 1, \ H = 9$, nous sommes dans le troisième cas : $h_3 = \sqrt[3]{9^2 \left(\frac{9}{3} + 1 \right)} = 6.8683$,

$h_2 = \left(\sqrt[3]{2} - 1 \right) \sqrt[3]{9^2 \left(\frac{9}{3} + 1 \right)} = 1.78521$, $h_1 = 1 + 9 - 6.8683 - 1.78521 = 1.3465$.

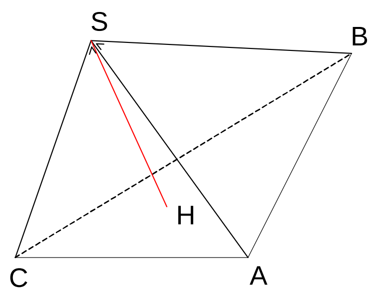
38. GSE058, Liège, juillet 2004

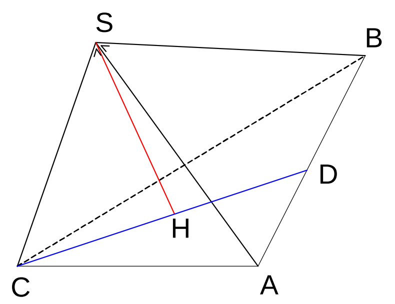
On considère un tétraèdre $SABC$ tel que les droites SA, SB et SC soient perpendiculaires deux à deux. Soit H la projection orthogonale de S sur le plan ABC.

1. Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

2. Si on note a_{XYZ} l'aire du triangle XYZ, montrer que $\dfrac{a_{ACB}}{a_{ASB}} = \dfrac{a_{ASB}}{a_{AHB}}$.

Correction





1. Montrons que SC est perpendiculaire à BA :

$SC \perp SB$ et $SA \;\to\; SC \perp$ au plan $SBA \to SC \perp AB$,

$SH \perp$ au plan $ABC \to SH \perp AB$, $AB \perp SC$ et $SH \;\to\; AB \perp$ au plan $SCH \to AB \perp CH$

$\to\; AB$ et CH sont coplanaires $\Rightarrow AB \perp CH$.

On recommence pour BH. H est l'orthocentre du triangle ABC.

2. Soit D le pied de la hauteur de CH dans ABC, c'est également le ped de la hauteur issue de S dans ABS.

$\dfrac{a_{ACB}}{a_{ASB}} = \dfrac{a_{ASB}}{a_{AHB}} \Leftrightarrow \dfrac{|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{SD}||\overrightarrow{AB}|} = \dfrac{|\overrightarrow{SD}||\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{HD}||\overrightarrow{AB}|}$ d'où $|\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{HD}| = |\overrightarrow{SD}|^2$ qu'il suffit de démontrer.

Le triangle SCD est rectangle donc CSD et SHD sont semblables (rect. et angle D en commun). Finalement. $\dfrac{|\overrightarrow{SD}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \dfrac{|\overrightarrow{HD}|}{|\overrightarrow{SD}|} \to |\overrightarrow{CD}||\overrightarrow{HD}| = |\overrightarrow{SD}|^2$.

39. GSE059, Liège, juillet 2004

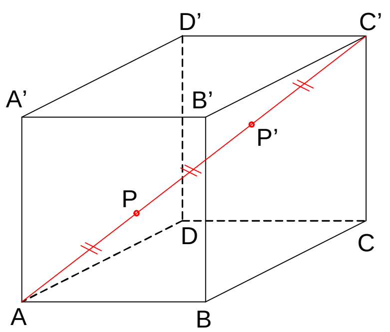
On considère le cube ABCDA'B'C'D'. Sur la diagonale AC', on définit les points P et P' par $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{P'C}$.

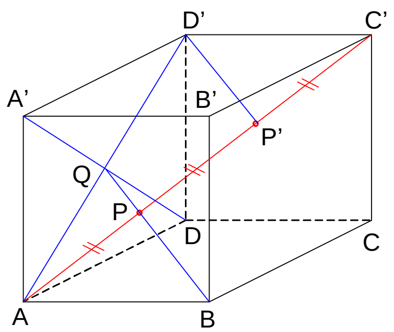
1. Montrer que les droites PB et D'P' sont parallèles

2. Montrer que PB et A'D ont un point Q en commun.

3. Montrer que PQ est la perpendiculaire commune aux droites AC' et A'D.

Correction





Première méthode

1. $\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{C'P'}+\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{D'P'}$ donc *BP* et *D'P'* sont parallèles.

2. *BP* et *D'P'* sont dans le plan *ABD'C'* qui coupe prependiculairement la face *ADD'A'* selon *AD'*. Dans le triangle *AP'D'*, *P* est le milieu de *AP'* donc *Q* est le milieu de *AD'*. Mais *Q* appartient également à la diagonale *A'D* et finalement $Q=PB\cap A'D$.

3. $A'D\perp \text{plan } ABC'D'\Rightarrow BQ\perp A'D$; plan $A'DB\perp \text{plan } ABC'D'\Rightarrow AC'\perp \text{plan } A'DB\rightarrow AC'\perp BQ$.

Donc *PQ* est la perpendiculaire commune aux droites *AC'* et *A'D*.

Deuxième méthode

On choisit comme repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}\right)$: $B(1,0,0)$, $D(0,1,0)$, $A'(0,0,1)$, $D'(0,1,1)$, $C'(1,1,1)$.

1. $\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}\Rightarrow P:\frac{1}{3}(1,1,1)$ et $P':\frac{2}{3}(1,1,1)\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{PB}=(1,0,0)-\frac{1}{3}(1,1,1)=\frac{1}{3}(2,-1,-1)\\ \overrightarrow{D'P'}=\frac{2}{3}(1,1,1)-(0,1,1)=\frac{1}{3}(2,-1,-1)\end{cases}\Rightarrow PB\parallel D'P'$.

2. On calcule l'équation de *PB* : $PB\equiv\frac{x-1}{2}=-y=-z$; la droite *A'D* contient *A'* et *D* : $A'D\equiv\begin{cases}x=0\\ y+z=1\end{cases}$ d'où

$PB\cap A'D\equiv\begin{cases}x+2y=1\\ y=z\\ x=0\\ y+z=1\end{cases}$, soit une seule solution $Q:\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

c. $\overrightarrow{PQ}=\frac{1}{2}(0,1,1)-\frac{1}{3}(1,1,1)=\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$, $\overrightarrow{AC'}=(1,1,1)$, $\overrightarrow{A'D}=(0,1,0)-(0,0,1)=(0,1,-1)$. Il suffit de vérifier : $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AC'}=0$ et $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{A'D}=0$.