Algèbre

1. ALG001 – Liège, septembre 1996.

Résoudre l'inéquation suivante : $\dfrac{\sqrt{x^3(x-1)}}{x} \le \dfrac{3}{8}$.

Correction

$x^3(x-1) \ge 0$: Tableau des signes :

		0		1	
x^3	-	0	+	+	+
$x-1$	-	-	-	0	+
	+	0	–	0	+

$x > 0$: Conclusion : $x < 0$ et $x \ge 1$.

Soit $x > 0$ $\quad \dfrac{x^3(x-1)}{x^2} \le \dfrac{9}{64} \Leftrightarrow x^2 - x - \dfrac{9}{64} \le 0$ dont les racines sont : $x = -\dfrac{1}{8}$ et $x = \dfrac{9}{8} \Rightarrow 1 \le x \le \dfrac{9}{8}$.

Soit $x < 0$ L'inéquation est toujours vérifiée.

Solutions : $x < 0$ ou $1 \le x \le \dfrac{9}{8}$.

2. ALG002 – Liège, septembre 1996.

Discuter et résoudre le système : $\begin{cases} x + y + z = 2a + 1 \\ ax - ay - 2z = 0 \\ ax + 2ay + a^2 z = 4a^2 - 1 \end{cases}$ où a est un paramètre réel.

Correction

Méthode du Δ : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -a & -2 \\ a & 2a & a^2 \end{vmatrix} = -a(2a+1)(a-2)$,

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2a+1 & 1 & 1 \\ 0 & -a & -2 \\ (2a+1)(2a-1) & 2a & a^2 \end{vmatrix} = -(2a+1)(a-2)(a^2+1)$,

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2a+1 & 1 \\ a & 0 & -2 \\ a & (2a+1)(2a-1) & a^2 \end{vmatrix} = -(2a+1)(a-2)(a-1)(a+1)$,

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2a+1 \\ a & -a & 0 \\ a & 2a & (2a+1)(2a-1) \end{vmatrix} = a(2a+1)(2-a)$,

Discussion

1. $a = -\dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=0 \\ -\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y-2z=0 \\ -\dfrac{1}{2}x-y+\dfrac{1}{4}z=0 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x=-\dfrac{5}{2}z \\ y=\dfrac{3}{2}z \end{cases}$ Simple indétermination

2. $a=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=1 \\ -2z=0 \\ 0=1 \end{cases} \quad \rightarrow$ Système impossible

3. $a=2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x+y+z=5 \\ 2x-2y-2z=0 \\ 2x+4y+4z=15 \end{cases} \quad \rightarrow$ Système impossible

4. $a \neq -\dfrac{1}{2}, \quad 0, \quad 2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=\dfrac{a^2+1}{a} \\ y=\dfrac{(a-1)(a+1)}{a} \\ z=1 \end{cases}$

3. ALG003 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre l'équation $x^6-3x^5+4x^4-6x^3+5x^2-3x+2=0$ sachant qu'elle admet i comme racine double.

Correction

Soit $P(x)=0$ l'équation. Si i est racine double, $P(x)$ est divisible par x^2+1 : effectuons la division on obtient

$$P(x)=(x^2+1)(x^4-3x^3+3x^2-3x+2)$$

Soit $Q(x)$ le deuxième facteur : $Q(1)=0$, donc $Q(x)$ est divisible par $x-1$.

$$\text{Horner : } \begin{array}{c|ccccc} & 1 & -3 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & -2 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \end{array} \rightarrow Q(x)=(x-1)(x^3-2x^2+x-2).$$

Soit $T(x)$ le deuxième facteur de $Q(x)$. On a $T(x)=x^3-2x^2+x-2=x^2(x-2)+(x-2)=(x-2)(x^2+1)$.

$P(x)=(x^2+1)^2(x-2)(x-1)$.

Solutions : i et $-i$ racines doubles, 2 et 1 racines simples.

4. ALG004 – Mons, questions-types 2000-2001.

Résoudre $4x^3 - 24x^2 + 23x + 18 = 0$, sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Correction

Soient $a+r$ et $a+2r$ les racines :

$P(x)=(x-a)(x-a-r)(x-a-2r) \quad = x^3-3(a+r)x^2+(2a+r)(a+2r)x-a(a+r)(a+2r)$

$$\begin{cases} -3(a+r)=-\dfrac{24}{4} \\ (2a+r)(a+2r)=\dfrac{23}{4} \quad \Rightarrow [\,2(2-r)+r\,](2-r+2r)=\dfrac{23}{4} \Rightarrow 4r^2+8r-5=0 \\ -a(a+r)(a+2r)=\dfrac{18}{4} \end{cases}$$

d'où $r_1=-\dfrac{1}{2}<0$ à rejeter et $r_2=2{,}5 \Rightarrow a=-0{,}5,\ a+r=2,\ a+2r=4{,}5 \Rightarrow P(x)=4(x+0.5)(x-2)(x-4.5)$.

5. ALG005 – Mons, questions-types 2000-2001.

Si x_1, x_2 et x_3 sont les racines de l'équation $P(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$, calculer $S(x)$: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

Correction

$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)=x^3-(x_1+x_2+x_3)x^2+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x-x_1x_2x_3=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=-5 \\ x_1x_2x_3=-1 \end{cases}$$

Or $(x_1+x_2+x_3)^2=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$

$\Rightarrow 0=x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2-10 \Rightarrow \boxed{x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2=10}$.

6. ALG006 – Mons, questions-types 2000-2001.

Décomposer $x^5 - 1 = 0$ en un produit de 3 facteurs réels.

Correction

$P(x)$ est divisible par $x-1$: Horner : $\begin{array}{c|cccccc} & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ & 1 & & & & & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow P(x)=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)$.

Soit $Q(x)$ le deuxième facteur : $Q(x)=(x^2+a_1x+b_1)(x^2+a_2x+b_2)$

$= x^4+(a_1+a_2)x^3+(b_1+b_2+a_1a_2)x^2+(a_2b_1+a_1b_2)x+b_1b_2=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1+a_2=1 \\ b_1+b_2+a_1a_2=1 \\ a_2b_1+a_1b_2=1 \\ b_1b_2=1 \end{cases}. \text{ Supposons } b_1=1 \to b_2=1 \to \begin{cases} a_1+a_2=1 \\ a_1a_2=-1 \end{cases},$$

a_1 et a_2 sont solutions de l'équation : $y^2 - y - 1=0 \Rightarrow y_1=a_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\ y_2=a_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow P(x)=(x-1)\left(x^2+\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x+1\right)\left(x^2+\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}x+1\right)$.

7. ALG007 – Mons, questions-types 2000-2001.

$Q_1(x)$ et c sont respectivement le quotient et le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x - a$.

$Q_2(x)$ et d sont respectivement le quotient et le reste de la division du polynôme $P(x)$ par $x - b$.

On demande :

1. Quel est le reste R de la division de $P(x)$ par $(x-a)(x-b)$.
2. Si $Q_3(x)$ est le quotient de cette division, déterminer $Q_1(x)$ en fonction de $Q_3(x)$.

Correction

$P(x)=(x-a)Q_1(x)+c$, $P(x)=(x-b)Q_2(x)+d$, $P(x)=(x-a)(x-b)Q_3(x)+R(x)$ avec $R(x)=R_1x+R_0$.

$$P(a)=R(a)=c=R_1a+R_0,\ P(b)=R(b)=d=R_1b+R_0\Rightarrow c-d=(a-b)R_1\Rightarrow R_1=\frac{c-d}{a-b}$$

$$\Rightarrow c=\frac{c-d}{a-b}a+R_0\Rightarrow R_0=\frac{c(a-b)-(c-d)a}{a-b}=\frac{ad-bc}{a-b}\Rightarrow R(x)=\frac{c-d}{a-b}x+\frac{ad-bc}{a-b}.$$

$$P(x)=(x-a)Q_1(x)+c,\ P(x)=(x-a)(x-b)Q_3(x)+\frac{c-d}{a-b}x+\frac{ad-bc}{a-b}$$

$$\Rightarrow(x-a)Q_1(x)+c=(x-a)(x-b)Q_3(x)+\frac{c-d}{a-b}x+\frac{ad-bc}{a-b}$$

$$\Rightarrow Q_1(x)=(x-b)Q_3(x)+\frac{1}{x-a}\left(\frac{c-d}{a-b}x+\frac{ad-bc}{a-b}-c\right)\Rightarrow Q_1(x)=(x-b)Q_3(x)+\frac{c-d}{a-b}.$$

8. ALG008 – Mons, questions-types 2000-2001.

Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un polynôme $P(x)$ soit divisible par $(x-a)^2$ est que $P(a) = P'(a) = 0$ où $P'(x)$ désigne la dérivée de $P(x)$.

Correction

La condition est nécessaire puisque si $P(x)$ est divisble par $(x-a)^2$: $P(x)=(x-a)^2R(x)$

$\Rightarrow P'(x)=2(x-a)R(x)+(x-a)^2R'(x)$. On vérifie immédiatement que $P(a)=P'(a)=0$.

La condition est suffisante puisque si $P(a)=P'(a)=0$, alors : $P(x)=(x-a)Q(x)$ car $P(a)=0$.

$P'(x)=Q(x)+(x-a)\ Q'(x)\Rightarrow P'(a)=Q(a)=0\Rightarrow Q(a)=0$.

Donc $Q(x)$ est divisible par $(x-a)$. Dés lors : $Q(x)=(x-a)R(x)$ et $P(x)=(x-a)^2R(x)$.

9. ALG009 – Mons, questions-types 2000-2001.

1. Déterminer les paramètres a et b du polynôme suivant :

$$P(x)=x^3+(a+b+2)x^2+(ab+2a+2b)x+2ab$$

de telle façon que le reste de la division par $(x-2)$ soit égal à 5, et que le reste de la division par $(x+1)$ soit égal à 5/4.

2. En exploitant ces seules données (sans effectuer la division), déterminer quel sera le reste de la division de $P(x)$ par $(x-2)(x+1)$

Correction

1. $P(2)=8+4(a+b+2)+2(ab+2a+2b)x+2ab=5\Rightarrow 4ab+8a+8b=-11$,

$P(-1)=-1+a+b+2-ab-2a-2b+2ab=\frac{5}{4}\Rightarrow ab-a-b=\frac{1}{4}$,

$$\begin{cases}4ab+8a+8b=-11\\ ab-a-b=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}ab+2a+2b=-\frac{11}{4}\\ ab-a-b=\frac{1}{4}\end{cases}\Rightarrow -3a-3b=-3\Rightarrow b=-(a+1).$$

Remplacons dans une des équations : $-a(a+1)-a+a+1=\frac{1}{4}\Leftrightarrow a^2+a-\frac{3}{4}=0\Rightarrow\begin{cases}a_1=-\frac{3}{2}\rightarrow b_1=\frac{1}{2}\\ a_2=\frac{1}{2}\rightarrow b_2=-\frac{3}{2}\end{cases}$.

$P(x)$ étant symétrique en a et b, il n'y a qu'une seule solution.

2. $R(x)=R_1x+R_0$, $R(2)=R_12+R_0=5$, $R(-1)=-R_1+R_0=\frac{5}{4}\Rightarrow R_1=\frac{5}{4}$ *et* $R_0=\frac{5}{2}\Rightarrow R(x)=\frac{5}{4}x+\frac{5}{2}$.

10. ALG130– Bruxelles, juillet 2003.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\begin{vmatrix}1 & z^2 & z^6\\ 1 & i & -i\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$ et représenter les solutions dans le plan de Gauss.

Correction

$$\begin{vmatrix}1 & z^2 & z^6\\ 1 & i & -i\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & z^2-1 & z^6-1\\ 0 & i-1 & -i-1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}z^2-1 & z^6-1\\ i-1 & -i-1\end{vmatrix}=\left(z^2-1\right)\begin{vmatrix}1 & z^4+z^2+1\\ i-1 & -i-1\end{vmatrix}$$

$$=\left(z^2-1\right)\left(-i-1-\left(z^4+z^2+1\right)(i-1)\right)=\left(z^2-1\right)\left((1-i)z^4+(1-i)z^2-2i\right)$$

Occupons nous du second facteur que l'on peut simplifier en le multipliant par

$\frac{1+i}{2}\quad\rightarrow\left((1-i)z^4+(1-i)z^2-2i\right)\left(\frac{1+i}{2}\right)=z^4+z^2+1-i$

C'est une équation bicarrée. Calculons la racine carrée du $\Delta=1-4(1-i)=-3-4i$

$$\begin{cases}a^2-b^2=-3\\ 2ab=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=5\\ a^2b^2=4\end{cases}\rightarrow X^2-5X+4=0\rightarrow (X-1)(X-4)=0$$

$$\rightarrow\begin{cases}a^2=1\\ b^2=4\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}a=-1\\ b=-2\end{cases}\rightarrow\sqrt{\Delta}=1+2i$$

Par conséquent : $z^2=\frac{-1\pm(1+2i)}{2}=\begin{cases}-1-i\\ i\end{cases}$

a) $\underline{z^2=-1-i}$

$$\begin{cases}a^2-b^2=-1\\ 2ab=-1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a^2+b^2=\sqrt{2}\\ a^2b^2=\frac{1}{4}\end{cases}\rightarrow X^2-\sqrt{2}X+\frac{1}{4}=0\rightarrow X=\frac{+\sqrt{2}\pm\sqrt{2-1}}{2}$$

$$\rightarrow\begin{cases}a^2=\frac{\sqrt{2}-1}{2}\\ b^2=\frac{\sqrt{2}+1}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}a=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\\ b=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}a=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\\ b=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}z_1=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\\ z_2=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}\end{cases}$$

b) $\underline{z^2 = i}$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 b^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \rightarrow X^2 - X + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow \left(X - \frac{1}{2} \right)^2 = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} a^2 = \dfrac{1}{2} \\ b^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ou} \begin{cases} a = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ b = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_4 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\underline{\text{Conclusions}} \begin{cases} z_1 = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}},\ z_2 = -\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}},\ z_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_4 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ z_5 = -1, z_6 = 1. \end{cases}$$

11. ALG131– Bruxelles, septembre 2003

Déterminer le quotient et le reste de la division de $(x^7 - a^7)$ par $(x - a)$ (où a est réel). En déduire la valeur de $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots.. + 3^6$

Correction

Par Horner, on trouve facilement que : $\left(x^7 - a^7 \right) = \left(x - a \right)\left(x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6 \right)$

$$\rightarrow x^6 + ax^5 + a^2x^4 + a^3x^3 + a^4x^2 + a^5x + a^6 = \frac{x^7 - a^7}{x - a}.$$

Posons $x = 1$ et $a = 3 \rightarrow 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 = \dfrac{1 - 3^7}{1 - 3} = 1093.$

12. ALG132– Bruxelles, septembre 2003

Le reste de la division de $3x^3 + x^2 - ax + a$ par $x + 2$ est k et par $x - 1$ est $-2k$ (où $a, k \in \mathbb{R}$).

Calculer a et k.

Correction

$P(-2) = -24 + 4 + 2a + a = k \rightarrow 3a = 20 + k,\ P(1) = 3 + 1 - a + a = -2k \rightarrow k = -2 \rightarrow a = 6.$

Conclusion $P(x) = 3x^3 + x^2 - 6x + 6.$

13. ALG133– Bruxelles, septembre 2003

Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$ L'équation $z^6 - 3z^5 + 4z^4 - 6z^3 + 5z^2 - 3z + 2 = 0$ sachant qu'elle admet i comme racine double.

Correction

Appliquons deux fois Horner,

	6	5	4	3	2	1	0
	1	-3	4	-6	5	-3	2
i		i	$-1-3i$	$3+3i$	$-3-3i$	$3+2i$	-2
	1	$-3+i$	$3-3i$	$-3+3i$	$2-3i$	$+2i$	0
i		i	$-2-3i$	$6+i$	$-4+3i$	$-2i$	
	1	$-3+2i$	$1-6i$	$3+4i$	-2	0	

$P(z) = (z - i)^2 \left[z^4 - (3 - 2i)z^3 + (1 - 6i)z^2 + (3 + 4i)z - 2 \right].$

Résolvons le deuxième facteur $Q(z)$. $Q(1)=0$ $\begin{array}{c|ccccc} & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & -3+2i & 1-6i & 3+4i & -2 \\ 1 & & 1 & -2+2i & -1-4i & 2 \\ \hline & 1 & -2+2i & -1-4i & 2 & 0 \end{array}$

$Q(z)=(z-1)R(z)=(z-1)\left[z^3+(-2+2i)z^2+(-1-4i)z+2\right]$.

$R(2)=0 \rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 3 & 2 & 1 & 0 \\ \hline & 1 & -2+2i & -1-4i & +2 \\ 2 & & 2 & 4i & -2 \\ \hline & 1 & 2i & -1 & 0 \end{array} \rightarrow R(z)=(z-2)\left(z^2+2iz-1\right)=(z-2)(z+i)^2$.

Conclusions : $z_1=i,\ z_2=i,\ z_3=1,\ z_4=2,\ z_5=-i,\ z_6=-i$.

14. EXALG134– Bruxelles, septembre 2003.

Calculer le terme en x dans $\left(2x^2-\frac{4}{x}\right)^5$.

Correction

$\left(2x^2-\frac{4}{x}\right)^5=\sum_{i=0}^{5}C_5^i\left(2x^2\right)^{5-i}\left(-\frac{4}{x}\right)^i=\sum_{i=0}^{5}C_5^i(-1)^i\,2^{5+i}\,x^{10-3i}$. Il faut que : $10-3i=1\Rightarrow i=3$.

Le terme en x est donc : $\sum_{i=0}^{5}C_5^3(-1)^3\,2^8\,x=-2560x$.

15. ALG135– Bruxelles, septembre 2003

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, en discutant par rapport au paramètre réel m, le système

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$$

Correction

$$\Delta=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=(m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=(m+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & m-1 & 0 \\ 1 & 0 & m-1 \end{vmatrix}=(m+2)(m-1)^2.$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 \\ m^2 & 1 & m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 0 & 1 \\ m^2 & 1-m^2 & m \end{vmatrix}=-\left(1-m^2\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{vmatrix}=-\left(1-m^2\right)(1-m)=-(1-m)^2(1+m).$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & m^2 & m \end{vmatrix}=(m-1)\begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & m \end{vmatrix}=(m-1)^2\begin{vmatrix} -1-m & -1 \\ m & 1 \end{vmatrix}=-(m-1)^2.$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 1 & 1 & m^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} m & 0 & 1 \\ 1 & 0 & m \\ 1 & 1-m^2 & m^2 \end{vmatrix}=-\left(1-m^2\right)\begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix}=(1+m)^2(1-m)^2.$$

$\underline{m=1}$: Le système devient : $x+y+z=1$ double indétermination.

$\underline{m=-2}$: $\begin{cases} -2x+y+z=1 \\ x-2y+z=-2 \\ x+y-2z=4 \end{cases}$ si on additionne membre à membre : $0=3$ système impossible.

Autres cas : $\begin{cases} x=-\dfrac{1+m}{m+2} \\ y=-\dfrac{1}{m+2} \\ z=m+1 \end{cases}$

16. ALG136– Exemple. Racine carrée complexe

Calculer $\sqrt{-3+4i}$.

Correction

Première méthode

$$\begin{cases} a^2-b^2=-3 \\ 2ab=4 \qquad (\text{a et b sont de même signe}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a^2-b^2)^2=(-3)^2 \\ 4a^2b^2=4^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a^2-b^2)^2+4a^2b^2=(-3)^2+4^2 \\ 4a^2b^2=16 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=\sqrt{(-3)^2+4^2} \\ a^2b^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2=5 \quad (3) \\ a^2b^2=4 \quad (4) \end{cases}$$

On reconnaît la somme (3) et le produit (4), a^2 et b^2 sont solutions d'une équation du second dégré.

$$X^2-5X+4=0 \rightarrow (X-1)(X-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b^2=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{z}=\pm(1+2i)$$

Deuxième méthode

Le début est le même, mais on considère les équations $\begin{cases} (1)\rightarrow a^2-b^2=-3 \\ (3)\rightarrow a^2+b^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=\dfrac{-3+5}{2}=1 \\ b^2=\dfrac{3+5}{2}=4 \end{cases}$

Troisième méthode

La première ligne est la même : de (2), on tire : $b=\dfrac{4}{2a}=\dfrac{2}{a}$.

On remplace dans (1) : $a^2-\left(\dfrac{2}{a}\right)^2=-3 \rightarrow a^4+3a^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ a^2=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$.

17. ALG137– Louvain, juillet 2002, série 1

Considérons le système d'équations que voici, dans lequel a est un paramètre réel :

$$\begin{cases} ax + y + z = a^2 \\ 2ax + ay + 2z = 2a^2 \\ ax + y + az = 1 \end{cases}$$

Déterminer l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles ce système possède

* aucune solution, * une solution unique, * une infinité simple de solutions,
* une infinité double de solutions, * une infinité triple de solutions.

Justifier la réponse.

Correction

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2a & a & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix}=a(a-1)(a-2), \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} a^2 & 1 & 1 \\ 2a^2 & a & 2 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=(a-1)(a-2)\left(a^2+a+1\right),$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ 2a & 2a^2 & 2 \\ a & 1 & a \end{vmatrix}=0, \qquad \Delta_z=\begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ 2a & a & 2a^2 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a(a-2)(a+1)(a-1).$$

1) $\underline{\underline{a=0}}$ Le système devient : $\begin{cases} y+z=0 \\ 2z=0 \\ y=1 \end{cases}$ système impossible.

2) $\underline{\underline{a=1}}$ Le système devient : $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+y+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-z \\ z=0 \end{cases}$ infinité simple de solutions.

3) $\underline{\underline{a=2}}$ Le système devient : $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 4x+2y+2z=8 \\ 2x+y+2z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{7-y}{2} \\ z=-3 \end{cases}$ infinité simple de solutions.

4) Dans les autres cas Une solution unique $\begin{cases} x=\dfrac{a^2+a+1}{a} \\ y=0 \\ z=-(a+1) \end{cases}$ il n'y a pas d'infinité double ou triple.

18. ALG138– Louvain, juillet 2002, série 1

Résoudre dans les réels, l'inéquation suivante : $(1-x)\sqrt{5+x}<(1+x)\sqrt{5-x}$.

Correction

Existence : $-5\le x\le 5$.

Regardons d'un peu plus près avant de nous lancer dans les calculs. En effet, il ne faut pas oublier que la résolution va demander des élévations au carré qui risquent d'introduire des solutions fausses.

1. $1\le x\le 5$: l'inéquation est toujours vérifiée.

2. $-5\le x\le -1$: l'inéquation n'est jamais vérifiée.

Il nous reste donc à étudier l'intervalle $]-1;1[$.On a :$(1-x)\sqrt{5+x}<(1+x)\sqrt{5-x}$

$\Leftrightarrow (1-x)^2(5+x)<(1+x)^2(5-x)\Leftrightarrow 2x(x-3)(x+3)<0.$

Tableau de signes :

		-3		-1		0		1		3	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Conclusion : Seul l'intervalle $]-1;1[$, nous intéresse : $0<x\le 5$.

19. ALG139– Louvain, juillet 2002, série 1

On donne l'équation suivante, dans laquelle z est l'inconnue et c est un paramètre réel : $\left(\frac{z-c}{2}\right)^8=1$.

Déterminer l'ensemble des valeurs de c pour lesquelles notre équation possède exactement trois racines complexes z dont la partie réelle est strictement négative.

Correction

$$\left(\frac{z-c}{2}\right)^8=1\Rightarrow\frac{z-c}{2}=\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\Leftrightarrow z=2\left(\cos\frac{k\pi}{4}+i\sin\frac{k\pi}{4}\right)+c\Rightarrow \mathrm{Re}(z)=2\cos\frac{k\pi}{4}+c,\ k:0,1,2,.....7.$$

Pour chaque valeur de k, on a une équation linéaire en c dont on étudie le signe

k	$\mathrm{Re}(z)$		-2		$\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2	
0	$2+c$	−	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+
1	$\sqrt{2}+c$	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+
2	$+c$	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
3	$-\sqrt{2}+c$	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+
4	$-2+c$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	0	+
5	$-\sqrt{2}+c$	−	−	−	−	−	−	−	0	+	+	+
6	$+c$	−	−	−	−	−	0	+	+	+	+	+
7	$\sqrt{2}+c$	−	−	−	0	+	+	+	+	+	+	+
	n	8	7	7	5	5	3	3	1	1	0	0

Dans le tableau n est le nombre de parties réelles strictement négatives. Conclusion : $0\le c<\sqrt{2}$.

20. ALG140– Louvain, juillet 2002, série 1

Un bateau se déplace le long d'une rivière dont le courant a une vitesse de 3 km/h. Il va tantôt dans un sens tantôt dans l'autre. Il revient ainsi à son point de départ 6 heures après être parti, en ayant effectué un périple de 36 km.

Déterminer La vitesse du bateau, sachant que celui-ci ne perd pas de temps ne changeant de sens.

Correction

v la vitesse du bateau : quand le bateau est dans le sens du courant sa vitesse est $v+3$ km/h,

dans le sens contraire $v-3$ km/h.

t_1 le temps mis dans le sens du courant, t_2 le temps dans le sens contraire du courant.

$$\begin{cases}t_1+t_2=6\\(v+3)t_1-(v-3)t_2=0\\(v+3)t_1+(v-3)t_2=36\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\dfrac{18}{v+3}\\t_2=\dfrac{18}{v-3}\end{cases}\Rightarrow\frac{3}{v+3}+\frac{3}{v-3}=1\Rightarrow v^2-6v-9=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}v=+3+3\sqrt{2}\\v=+3-3\sqrt{2}\text{ (à rejeter car }<0)\end{cases}\rightarrow t_1=\frac{6}{2+\sqrt{2}}=1.7574\,h\quad\text{et}\quad t_2=\frac{6}{\sqrt{2}}=4.2426\,h.$$

Conclusion : $\boxed{v=+3+3\sqrt{2}\ km/h}$.

21. ALG141– Louvain, juillet 2002, série 2

Soit m un paramètre réel. Résoudre et discuter l'équation suivante (dans les réels) : $\sin^2 x+\cos x=1-m$.

Correction

$\sin^2 x+\cos x=1-m \to 1-\cos^2 x+\cos x=1-m \Leftrightarrow \cos^2 x-\cos x-m=0 \Leftrightarrow \cos x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4m}}{2}$.

Ce qui nous donne une première condition sur m : $m\geq\dfrac{-1}{4}$; de plus il faut $-1\leq\cos x\leq 1$.

1. $\underline{-1\leq\cos x}$: $-1\leq\dfrac{1-\sqrt{1+4m}}{2} \to 3\geq\sqrt{1+4m} \to m\leq 2$.

2. $\underline{\cos x\leq 1}$: $\dfrac{1-\sqrt{1+4m}}{2}\leq 1$ toujours vérifié pour $m\geq\dfrac{1}{4}$.

<u>Conclusion</u> $-\dfrac{1}{4}\leq m\leq 2$. Les solutions sont : $x=\pm\arccos\dfrac{1\pm\sqrt{1+4m}}{2}+2k\pi$.

Avec $m=-\dfrac{1}{4}$, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi$; $m=2$, $x=k\pi$.

22. ALG142– Louvain, juillet 2002, série 2

Résoudre, dans les nombres réels, l'équation que voici : $2+\log_2\left(2^x-\sqrt{6}\right)=2x-\log_4\left(\left(2^x+\sqrt{6}\right)^2\right)$.

<u>Correction</u>

$$2+\log_2\left(2^x-\sqrt{6}\right)=2x-\log_4\left(\left(2^x+\sqrt{6}\right)^2\right)\Leftrightarrow 2+\log_2\left(2^x-\sqrt{6}\right)=2x-\log_2\left(2^x+\sqrt{6}\right)$$
$$\Leftrightarrow \log_2\left(2^x-\sqrt{6}\right)\left(2^x+\sqrt{6}\right)=2x-2\Leftrightarrow \log_2\left(2^{2x}-6\right)=\log_2 2^{2x-2}\Leftrightarrow 2^{2x}-6=2^{2x-2}$$
$$\Leftrightarrow 2^2.2^{2x}-6.2^2=2^{2x}\Leftrightarrow 3.2^{2x}=24\Leftrightarrow 2^{2x}=2^3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$$

23. ALG143– Louvain, juillet 2002, série 2

On s'intéresse à l'équation suivante : $z^4+\left(3a^2-2i\right)z^2-6ai=0$ dans laquelle a est un paramètre réel et i représente l'unité imaginaire.

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles cette équation possède au moins une racine complexe dont la partie réelle est nulle.

Pour chacune des valeurs de a en question, donner toutes les racines complexes de l'équation correspondante.

<u>Correction</u>

Le delta de cette équation bicarrée est : $\Delta=\left(3a^2-2i\right)^2+24ai=\left(3a^2+2i\right)^2$

Donc : $z^2=\dfrac{-\left(3a^2-2i\right)\pm\left(3a^2+2i\right)}{2}\to\begin{cases} z_1^2=\dfrac{-\left(3a^2-2i\right)+\left(3a^2+2i\right)}{2}=2i \\ z_2^2=\dfrac{-\left(3a^2-2i\right)-\left(3a^2+2i\right)}{2}=-3a^2\end{cases}$

1. $\underline{z_1^2=2i} \to \begin{cases} z_{11}=1+i \\ z_{12}=-1-i\end{cases}$

2. $\underline{z_2^2=-3a^2} \to \begin{cases} z_{21}=a\sqrt{3}i \\ z_{22}=-a\sqrt{3}i\end{cases}$

Il y a donc au moins deux racines dont la partie réelle est nulle quelque soit la valeur de a.

24. ALG144– Louvain, juillet 2002, série 2

Des enfants se partagent un sac de billes, de manière égale. Le premier enfant prend 1 bille et le dixième des billes qui restent, puis le deuxième prend 2 billes et le dixième de celles qui restent, et ainsi de suite jusqu'au dernier enfant qui prend toutes les billes restantes. Combien y avait-il d'enfants et combien chacun a-t-il pris de billes ? Mettre le problème en équations, puis le résoudre. Une réponse numérique ne suffit pas.

Correction

x le nombre de billes : le premier enfant prend $1+\frac{x-1}{10}$, il reste : $x-1-\frac{x-1}{10}=\frac{9}{10}(x-1)$.

Le deuxième enfant prend $2+\frac{\frac{9(x-1)}{10}-2}{10}$, comme le partage est de manière égale :

$$1+\frac{x-1}{10}=2+\frac{\frac{9(x-1)}{10}-2}{10}=81$$

On a donc le tableau suivant :

	Prise	Reste
1	$1+8=9$	72
2	$2+7=9$	63
3	$3+6=9$	54
4	$4+5=9$	45
5	$5+4=9$	36
6	$6+4=9$	27
7	$7+4=9$	18
8	$8+4=9$	9
9	9	0

25. ALG145– Louvain, septembre 2002

Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre réel m pour lesquelles les inéquations suivantes sont vérifiées pour tout x réel : $-3<\frac{x^2-mx+1}{x^2+x+1}<3$.

Correction

Comme x^2+x+1 est toujours positif, on obtient le système

$$\begin{cases}-3x^2-3x-3<x^2-mx+1\\ 3x^2+3x+3>x^2-mx+1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}4x^2+(3-m)x+4>0 & (1)\\ 2x^2+(3+m)x+2>0 & (2)\end{cases}$$

Considérons les fonctions définies par les premiers membres. Soit $f(x)=4x^2+(3-m)x+4$:

le coefficient de x^2est positif, $f(x)$ sera strictement positive pour tout x si le delta $m^2-6m-55$ est négatif :

$m^2-6m-55>0$ trinôme dont les racines sont : $m=+3\pm\sqrt{9+55}=\begin{cases}m_1=11\\ m_2=-5\end{cases}\Rightarrow -5<m<11$.

$g(x)=2x^2+(3+m)x+2$: comme le coefficient de x^2est positif, $g(x)$ sera strictement positive pour tout x si le delta m^2+6m-7 est négatif : $m^2+6m-7<0$, $m=+3\pm\sqrt{9+7}=\begin{cases}m_1=1\\ m_2=-7\end{cases}\Rightarrow -7<m<1$.

Conclusion : en combinant les deux conditions : $\boxed{-5<m<1}$.

26. ALG146– Louvain, septembre 2002

Résoudre, dans les nombres réels, l'équation que voici : $\dfrac{\log_2\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{\log_8 3+\log_8(x+1)}=\log_9 27$.

Correction

CE : $x>-1$ et $\begin{cases} x<-3 \\ x>1 \end{cases} \Rightarrow x>1$.

$$\frac{\log_2\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{\frac{\log_2 3}{\log_2 8}+\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 8}}=\frac{\log_3 3^3}{\log_3 9} \Leftrightarrow \frac{\log_2\left(\sqrt{(x-1)(x+3)}\right)}{\frac{\log_2 3}{3}+\frac{\log_2(x+1)}{3}}=\frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log_2(x-1)(x+3)=\frac{1}{2}\log_2 3(x+1) \Leftrightarrow (x-1)(x+3)=3(x+1) \Leftrightarrow x^2-x-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{x=3}$.

27. ALG147– Louvain, septembre 2002

Déterminer le(s) polynôme(s) $P(x)$ de degré cinq satisfaisant aux conditions suivantes :

le coefficient de x^5 dans $P(x)$ est égal à 1, $P(x)=x^5P\left(\frac{1}{x}\right)$, la somme des cinq racines (réelles ou complexes) de P est égale à 2, P est divisible x^2+x+1.

Ensuite, calculer toutes les racines réelles de $P(x)$.

Correction

Soit $P(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$, on a : $a_5=1$ (en vertu de 1) $a_4=2$ (en vertu de 2),

$x^5P(x)=1+2x+a_3x^2+a_2x^3+a_1x^4+a_0x^5$; $P(x)=x^5P\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow a_0=a_5=1,\ a_1=a_4=2,\ a_2=a_3=a$

$\Rightarrow P(x)=x^5+2x^4+ax^3+ax^2+2x+1$.

Puisque $P(x)$ est divisible par x^2+x+1, le reste de la division doit être nulle.

Effectuons la division euclidienne. On obtient : $P(x)=\left(x^3+x^2+(a-2)x+1\right)\left(x^2+x+1\right)+3-a \Rightarrow a=3$.

$P(x)=x^5+2x^4+3x^3+3x^2+2x+1=\left(x^3+x^2+x+1\right)\left(x^2+x+1\right)=(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^2+x+1\right)$.

La seule racine réelle est $x=-1$.

28. ALG148– Louvain, septembre 2002

Une pierre est lâchée du haut d'un immeuble. La distance h parcourue par celle-ci en chute libre en t secondes depuis l'instant où elle est lâchée vaut $h=\frac{1}{2}gt^2$, où g = 9.81 m.s^{-2} est l'accélération due à la pesanteur.

Du haut de l'immeuble, on entend le bruit de la pierre frapper le sol 6.5 s plus tard. Sachant que la vitesse du son est de 340 m.s^{-1}, calculer la hauteur de l'immeuble.

Correction

Soit t_1 le temps de chute de la pierre, et t_2 le temps mis par le son pour remonter.

$$\begin{cases} h = \dfrac{g{t_1}^2}{2} \\ h = 340\ t_2 \\ t_1 + t_2 = 6.5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9.81\ {t_1}^2}{2} = 340\ t_2 \\ t_2 = 6.5 - t_1 \end{cases} \Rightarrow 9.81\ {t_1}^2 + 2\times 340 \times t_1 - 2\times 6.5\times 340 = 0\ ;$$

$$t_1 = \frac{-340 \pm \sqrt{340^2 + 2\times 6.5\times 340\times 9.81}}{9.81} = \begin{cases} 5.983 \\ -75.3 \text{ A rejeter} \end{cases} \rightarrow t_1 = 5.983\ s,\ t_2 = 0.5165\ s\ \boxed{h = 175.61\ m}$$

29. ALG149– Louvain, juillet 2003, série 1.

Résoudre, dans les réels, l'équation suivante : $\left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2\left(\sqrt{2}-1\right)^x = 1$.

Correction

$1 = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = \left(\sqrt{2}+1\right)^x\left(\sqrt{2}-1\right)^x \rightarrow$ multiplions les deux membres par $\left(\sqrt{2}+1\right)^x$:

$\left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} - 2\left(\sqrt{2}-1\right)^x\left(\sqrt{2}+1\right)^x = \left(\sqrt{2}+1\right)^x \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}+1\right)^{2x} - \left(\sqrt{2}+1\right)^x - 2 = 0.$

Soit $t = \left(\sqrt{2}+1\right) \Rightarrow t^2 - t - 2 = (t+1)(t-2) = 0,\ t = -1$ est à rejeter car $t > 0$;

$\left(\sqrt{2}+1\right)^x = 2 \rightarrow x\ln\left(\sqrt{2}+1\right) = \ln 2 \rightarrow \boxed{x = \dfrac{\ln 2}{\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}}.$

30. ALG150– Louvain, juillet 2003, série 1.

Résoudre, dans les nombres réels, le système suivant, lequel est constitué d'une équation et d'une inéquation : $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}} < 2 \end{cases}$

Correction

CE : x et y doivent être de même signe et $x \neq 0$.

On a : $y = \dfrac{2x-1}{3} \Rightarrow \sqrt{\dfrac{2x-1}{3x}} < 2\ (1)$ ce qui rajoute une nouvelle CE : $\dfrac{2x-1}{3x} > 0 \Rightarrow x < 0$ ou $x > \dfrac{1}{2}$.

Elevons (1) au carré : $\dfrac{2x-1}{3x} < 4 \quad \rightarrow \dfrac{10x+1}{3x} > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{1}{10}$ ou $x > \dfrac{1}{2}$.

En tenant compte des CE : $\boxed{x < -\dfrac{1}{10} \text{ ou } x > \dfrac{1}{2};\ y = \dfrac{2x-1}{3}}$

31. ALG151– Louvain, juillet 2003, série 1.

On considère l'équation suivante, dans laquelle p est un paramètre réel et i représente l'unité imaginaire :

$$z^2 - 4(2+i)z + p(3+4i) = 0.$$

1. Calculer les racines de cette équation, sous la forme $a + bi$, en fonction du paramètre p.

2. Déterminer p pour que le carré du module de chacune des racines soit égal à 65 (la même valeur pour les deux racines).

Rappel : le module de $a + bi$ est égal à $\sqrt{a^2+b^2}$.

Correction

1. $\Delta = \left[2(2+i)\right]^2 - p(3+4i) = 2-3p+(16-4p)i$.

Calculons la racine carrée de Δ : $\begin{cases} a^2-b^2 = 3(4-p) \\ 2ab = 4(4-p) \end{cases} \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = 5(4-p) \\ a^2b^2 = 4(4-p)^2 \end{cases}$

$$\Rightarrow X^2 - 5(4-p)X + 4(4-p)^2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{+5(4-p) \pm \sqrt{25(4-p)^2 - 16(4-p)^2}}{2}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = a^2 = 4(4-p) \\ X_2 = b^2 = 4-p \end{cases}$. Ce qui implique que $p \leq 4$ $\left(a^2 \text{ et } b^2 \text{ doivent être positifs} \right)$.

En vertu de (1) a et b sont de même signe, les solutions sont donc : $\begin{cases} z_1 = 2\sqrt{4-p} + i\sqrt{4-p} \\ z_2 = -2\sqrt{4-p} - i\sqrt{4-p} \end{cases}$.

2. $\sqrt{4(4-p)+(4-p)} = 65 \Leftrightarrow 4-p = \dfrac{65^2}{5} \Leftrightarrow p = -841$

32. ALG152– Louvain, juillet 2003, série 1.

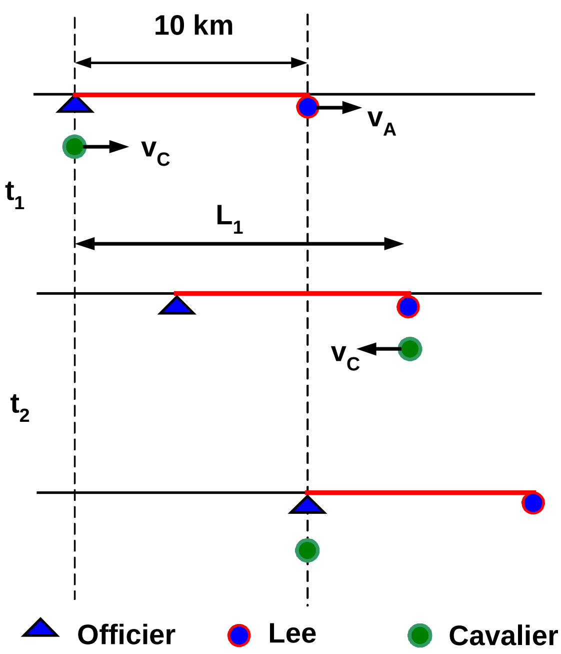
L'armée du général Lee marchait d'un pas paisible et s'étirait sur dix kilomètres. Lee n'était pas tranquille, car il devait traverser un défilé dans lequel il avait perdu ses trois précédentes armées.

Aussi avait-il commandé à l'officier placé à l'arrière du convoi de lui envoyer par un cavalier un message dès que le dernier homme serait sorti du défilé. Tout alla bien cette fois et l'officier envoya un cavalier avertir Lee (qui se trouvait en tête de l'armée).

Lorsque le cavalier rejoignit l'officier à l'arrière-garde pour lui dire qu'il avait accompli sa mission, cet officier se trouvait à l'endroit où était passée la tête de l'armée lors du départ du cavalier.

On demande la longueur du trajet parcouru par le cavalier. Préciser les notations choisies et indiquer clairement les différentes étapes du raisonnement.

Correction



Soit : $\begin{cases} v_A : \text{ la vitesse de déplacement de l'armée} \\ v_C : \text{La vitesse de déplacement du cavalier} \\ t_1 : \text{le temps mis par le cavalier pour rejoindre Lee} \\ t_2 : \text{ le temps mis par le cavalier pour revenir près de l'officier.} \end{cases}$

On a : $\begin{cases} v_A(t_1+t_2)=10 & (1) \\ v_C t_1 = L_1 & (2) \\ v_C t_2 = L_1 - 10 & (3) \\ L_1 = 10 + v_A t_1 & (4) \end{cases}$

de (1) et (2), $L_1 - 10 + v_A t_2 = 10 \ \rightarrow v_A t_2 = 20 - L_1\ (5)$, de (2) et (3), $t_2 = t_1 \dfrac{L_1 - 10}{L_1}\ (6)$,

de (5) et (6), $v_A t_1 \dfrac{L_1-10}{L_1} = 20 - L_1\ (7)$, de (4) et (7), $\dfrac{(L_1-10)^2}{L_1} = 20 - L_1 \Leftrightarrow 2L_1^2 - 40L_1 + 100 = 0$

$\Rightarrow L_1 = 10 + \sqrt{50}\ (8)$, de (3) et (8), $v_C t_2 = \sqrt{50}$.

La distance parcourue par le cavalier est donc $\boxed{10 + 2\sqrt{50}\ km}$

33. ALG153– Louvain, juillet 2003, série 2.

Soit a un paramètre réel. Discuter et résoudre, dans les nombres réels, le système d'équations que voici :

$$\begin{cases} e^x + 2e^y = a \\ e^{2x} - 4e^{2y} = e^y \end{cases}.$$

Correction

CE : $a > 0$.

$$\begin{cases} e^x + 2e^y = a \\ \left(e^x + 2e^y\right)\left(e^x - 2e^y\right) = e^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + 2e^y = a \\ a\left(e^x - 2e^y\right) = e^y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x + e^y = a \\ ae^x - (2a+1)e^y = 0 \end{cases}.$$

$D = -4a - 1$ n'est jamais nul puisque $a > 0$.

$$\begin{cases} e^x = \dfrac{\begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & -(2a+1) \end{vmatrix}}{-4a-2} = \dfrac{a(2a+1)}{4a+1} \\ e^x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & a \\ a & 0 \end{vmatrix}}{-4a-2} = \dfrac{a^2}{4a+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \dfrac{a(2a+1)}{4a+1} \\ y = \ln \dfrac{a^2}{4a+1} \end{cases}.$$

34. ALG154– Louvain, juillet 2003, série 2.

Déterminer le(s) polynôme(s) $P(x)$ de degré 6 ayant les propriétés suivantes :

1. Le coefficient de x^6 dans $P(x)$ est égal à 1.
2. Les coefficients de x^3 et de x^4 dans $P(x)$ sont égaux.
3. $P(x)$ est divisible par $x^2 + x + 1$ et par $x^2 - x + 1$.
4. Le polynôme $\dfrac{P(x)}{x^2+x+1} - \dfrac{P(x)}{x^2-x+1}$ est divisible par $x^2 - x$.

Ensuite, calculer toutes les racines complexes de $P(x)$, y compris les racines réelles, bien sûr.

Correction

x^2+x+1 a pour racines $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, x^2-x+1 a pour racines $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, x^2-x a pour racines 0 et 1.

Si $\frac{P(x)}{x^2+x+1}-\frac{P(x)}{x^2-x+1}$ est divisible par x^2-x, alors évidemment $P(x)$ l'est également (expliquez pourquoi…). Conclusion :

$$P(x)=a_6\left(x^2-x\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x-1\right)=\left(x^2-x\right)\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x-1\right)$$

puisque $a_6=1$.

La condition (2) n'a pas été utilisée mais doit sûrement se vérifier.

35. ALG156– Louvain, juillet 2003, série 2.

Deux cyclistes, A et B, n'ayant à leur disposition qu'une bicyclette ont à parcourir ensemble, en un temps égal à $\frac{188}{63}$ h, une certaine distance mesurée par un nombre entier pair de km.

Ils conviennent de monter à tour de rôle et de km en km sur la machine qui est laissée à chaque borne kilométrique jusqu'à l'arrivée de celui qui marche à pied.

A et B partent en même temps. B monte le premier et sa vitesse à bicyclette est le double de sa vitesse de marche à pied ; la vitesse de A à bicyclette est la même que celle de B. Les deux hommes se retrouvent au même moment au kilomètre sept ; ils estiment alors nécessaire d'augmenter leur vitesse et ils conviennent de la faire en marchant 0,5 km de plus par heure.

C'est encore B qui monte le premier mais cette fois-ci sa vitesse à bicyclette est le double de la vitesse de A marchant à pied ; A à bicyclette a encore la même vitesse que B. Les deux hommes arrivent à destination au même moment.

On demande la distance parcourue.

Préciser les notations choisies et indiquer clairement les différentes étapes du raisonnement : mise en équation ; méthode de résolution ; calcul effectif de la solution (s'il reste du temps).

Correction

Désignons par

V_{AB} la vitesse pendant la première étape de A à vélo, V_{AM} la vitesse pendant la première étape de A à pied,

V'_{AB} la vitesse pendant la deuxième étape de A à vélo, V'_{AM} la vitesse pendant la deuxième étape de A à pied,

Même chose pour B : V_{BB}, V_{BM}, V'_{BB}, V'_{BM} et pour les temps :

t_{AB} le temps de A à vélo, t_{AM} le temps de A à pied, t'_{AB} le temps de A à vélo pour faire 1 km, t'_{AM} le temps de A à pied pour faire 1 km.

Enfin notons t_1 le temps mis pour la première étape, t_2 pour la seconde et T pour le temps total.

On exprime toutes les variables en fonction de V_{BB} : pour la première étape on a : $\begin{cases} V_{BM}=\frac{1}{2}V_{BB} \\ V_{AB}=V_{BB} \\ V_{AM}=\frac{4}{7}V_{BB} \qquad (1) \end{cases}$.

(1) En effet, $t_7=t_{AB}+t_{AM}=t_{BB}+t_{BM}$ puisque A parcourt 3 km, et B 4 km,

$$\frac{3}{V_{AB}}+\frac{4}{V_{AM}}=\frac{4}{V_{BB}}+\frac{3}{V_{BM}} \rightarrow \frac{3}{V_{BB}}+\frac{4}{V_{AM}}=\frac{4}{V_{BB}}+\frac{6}{V_{BB}} \rightarrow V_{AM}=\frac{4}{7}V_{BB}.$$

Pour la deuxième étape on a $\begin{cases} V'_{BB} = 2\left(\frac{4}{7}V_{BB} + \frac{1}{2}\right) \\ V'_{BM} = V_{BM} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(V_{BB} + 1) \\ V'_{AB} = V'_{BB} = 2\left(\frac{4}{7}V_{BB} + \frac{1}{2}\right) \\ V'_{AM} = V_{AM} + \frac{1}{2} = \frac{4}{7}V_{BB} + \frac{1}{2} \end{cases}$ car $V'_{BB} = 2V'_{AM} = 2\left(\frac{4}{7}V_{BB} + \frac{1}{2}\right)$.

Au total A et B parcourent un nombre pair de km. Comme B démarre à la deuxième étape, il faut que A arrive en marchant au point de rencontre. Soit n le nombre de kms que A va faire en marchant pendant la deuxième étape ; on a, puisqu'ils arrivent en même temps :

$$n.t'_{AM} + (n-1).t'_{AB} = (n-1).t'_{BM} + n.t'_{BB} \Leftrightarrow \frac{n}{V'_{AM}} + \frac{n-1}{V'_{AB}} = \frac{n-1}{V'_{BM}} + \frac{n}{V'_{BB}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\frac{4}{7}V_{BB} + \frac{1}{2}} + \frac{n-1}{2\left(\frac{4}{7}V_{BB} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{n-1}{\frac{1}{2}(V_{BB} + 1)} + \frac{n}{2\left(\frac{4}{7}V_{BB} + \frac{1}{2}\right)} \Rightarrow V_{BB} = \frac{7}{2n-9}.$$

Le temps mis pour parcourir la première étape est : $t_1 = t_{BB} + t_{BM} = \frac{4}{V_{BB}} + \frac{3}{V_{BM}} = \frac{10}{V_{BB}}$,

le temps mis pour parcourir la deuxième étape est :

$$t_2 = (n-1)t'_{BM} + n.t'_{BB} = \frac{n-1}{V'_{BM}} + \frac{n}{V'_{BB}} = \frac{2(n-1)}{V_{BB} + 1} + \frac{n}{2\left(\frac{4}{7}V_{BB} + \frac{1}{2}\right)}.$$

Le temps total est : $T = t_1 + t_2 = \frac{188}{63} \Rightarrow \frac{10}{V_{BB}} + \frac{2(n-1)}{V_{BB} + 1} + \frac{n}{2\left(\frac{4}{7}V_{BB} + \frac{1}{2}\right)} = \frac{188}{63}$. On remplace dans V_{BB} et on développe : $252\, n^3 - 1656\, n^2 + 1667\, n + 1565 = 0$ dont les solutions sont

$$n = 5, n = 2{,}1493, n = -0{,}577 \Rightarrow n = 5.$$

On finit les calculs :

$$\begin{cases} V_{BB} = 7\ km/h \\ V_{BM} = \frac{7}{2} km/h \\ V_{AB} = 7\ km/h \\ V_{AM} = 4\ km/h \\ t_7 = \frac{10}{7}\ h \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V'_{BB} = 9\ km/h \\ V'_{BM} = 4\ km/h \\ V'_{AB} = 9\ km/h \\ V'_{AM} = \frac{9}{2}\ km/h \\ t = \frac{14}{9}\ h \end{cases} \Rightarrow \boxed{\text{La distance parcourue est : } 7 + 5 + 4 = 16\ km}$$

36. ALG157– Louvain, septembre 2003.

Considérons l'équation suivante, dans laquelle k est un paramètre réel : $(k-1)^2 x^2 - (k^2 - 1)x + 2k = 0$.

Montrer que si elle admet deux racines réelles, alors une de ces racines est le sinus et l'autre le cosinus d'un même angle. Ensuite, donner les valeurs de cet angle en fonction de k

Correction

CE : $k \neq 1$. Si l'une des racines est sinus d'un angle et l'autre cosinus du même angle, alors ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$.

Soit l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$, si x_1 et x_2 sont les deux racines, $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{b^2 - 2ac}{a^2}$.

Ici : $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{\left(k^2-1\right)^2 - 4k\left(k-1\right)^2}{\left(k-1\right)^4} = 1$. Ok. $x = \dfrac{\left(k^2-1\right) \pm \sqrt{\left(k^2-1\right)^2 - 8k\left(k-1\right)^2}}{2\left(k-1\right)^2} = \dfrac{k+1 \pm \sqrt{k^2-6k+1}}{2\left(k-1\right)}$.

Avec les conditions : $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow k^2 - 6k + 1 \geq 0 \Leftrightarrow k \leq 3 - 2\sqrt{2}$; $3 + 2\sqrt{2} \geq k$.

Discussion

Il nous faut encore déterminer à quel(s) quadrant(s) appartient l'angle cherché φ :

Etudions les signes des racines qui sont donnés par : $\begin{cases} x_1 x_2 = 2k & (\text{le terme indépendant}) \\ x_1 + x_2 = k^2 - 1 & (-\text{le coefficient de } x) \end{cases}$

a. $\underline{k > 1}$ C'est-à-dire en fait, $k > 3 + 2\sqrt{2}$. Alors, x_1 et x_2 sont positifs $\Rightarrow \varphi$ est dans le premier quadrant

$\varphi = \arcsin \dfrac{k+1 \pm \sqrt{k^2-6k+1}}{2\left(k-1\right)} + 2t\pi,\ t \in \mathbb{N}$ ou $\arccos \dfrac{k+1 \pm \sqrt{k^2-6k+1}}{2\left(k-1\right)} + 2t\pi,\ t \in \mathbb{N}$.

Appelons cet angle du premier quadrant : φ_1

b. $\underline{0 < k < 1}$ C'est-à-dire en fait, $0 \leq k \leq 3 - 2\sqrt{2} \simeq 0.1715$. Alors, x_1 et x_2 sont négatifs, φ edans le 3° quadrant. Appelons le φ_3, $\varphi_3 = \pi + \varphi_1$.

c. $\underline{k = 0}$ Par exemple : $x_1 = 0$ et $x_2 = -1 \rightarrow \begin{cases} \varphi = \pi + 2t\pi \\ \varphi = \dfrac{3\pi}{2} + 2t\pi \end{cases}$.

d. $\underline{k < 0}$ Les racines sont de signes contraires et φ appartient au 2° ou au 4° quadrant, $\begin{cases} \varphi_2 = \pi - \varphi_1 \\ \varphi_4 = -\varphi_1 \end{cases}$.

37. ALG158– Louvain, septembre 2003.

Résoudre, dans les nombres réels, l'inéquation suivante : $\left| x \right|^{2\log_2 (8|x|)} \geq 64\, x^5$.

Correction

CE : $x \neq 0$. Si $x < 0$ l'équation est toujours vérifiée. Il reste donc à étudier pour $x > 0$:

$2\log_2 8x \,.\, \log_2 x \geq \log_2 64 + 5\log_2 x \Leftrightarrow 2\left(\log_2 2^3 + \log_2 x\right).\log_2 x \geq \log_2 2^6 + 5\log_2 x$

$\Leftrightarrow 2\left(3 + \log_2 x\right).\log_2 x \geq 6 + 5\log_2 x \Leftrightarrow 2\log_2 x + \log_2 x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = \dfrac{3}{2} & \rightarrow & x = 2\sqrt{2} \\ \log_2 x = -2 & \rightarrow & x = \dfrac{1}{4} \end{cases}$.

Conclusion : $\boxed{x \leq \dfrac{1}{4}, \quad x \geq 2\sqrt{2} \quad \text{avec} \quad x \neq 0}$

38. ALG159– Louvain, septembre 2003.

Soit m un paramètre réel. Résoudre et discuter, dans les nombres réels, les systèmes d'équations que voici :

$$\begin{cases} 2mx + \left(m+1\right)y - \left(m+3\right) = 0 \\ \left(3x + \left(m+1\right)y - 1\right)^2 - \left(x - \left(m-1\right)y + 3\right)^2 = 0 \end{cases}$$

Correction

$$\begin{cases} 2mx+(m+1)y-(m+3)=0 \\ (3x+(m+1)y-1)^2-(x-(m-1)y+3)^2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2mx+(m+1)y-(m+3)=0 \\ \left[3x+(m+1)y-1+x-(m-1)y+3\right]\left[3x+(m+1)y-1-(x-(m-1)y+3)\right]=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2mx+(m+1)y=m+3 \\ 4(2x+y+1)(x+my-2)=0 \end{cases}$$

On a donc deux systèmes à étudier :

1. $\begin{cases} 2mx+(m+1)y=m+3 \\ x+my=2 \end{cases}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 2m & m+1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)(2m+1)$

a. $\underline{m=1}$ $\begin{cases} 2x+2y=4 \\ x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow y=2-x$ système simplement indeterminé.

$$\begin{cases} 2x+2y-4=0 \\ (3x+2y-1)^2-(x+3)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-2=0 \\ (2x+y+1)(x+y-2)=0 \end{cases}.$$

La deuxième équation est une conique dégénérée en deux droites.

b. $\underline{m=-\frac{1}{2}}$ $\begin{cases} -x+\frac{1}{2}y=\frac{5}{2} \\ x-\frac{1}{2}y=2 \end{cases}$ Système impossible.

c. Dans les autres cas $x=\dfrac{\begin{vmatrix} m+3 & m+1 \\ 2 & m \end{vmatrix}}{(m-1)(2m+1)}=\dfrac{m+2}{2m+1}$, $y=\dfrac{\begin{vmatrix} 2m & m+3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{(m-1)(2m+1)}=\dfrac{3}{2m+1}$.

2. $\begin{cases} 2mx+(m+1)y=m+3 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$, $\Delta = \begin{vmatrix} 2m & m+1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $x=-m-2$, $y=2m+3$.

39. ALG173 – Louvain, juillet 2004, série 1.

Résoudre dans les réels, l'équation suivante : $\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[3]{4-x}=1$.

Correction

On peut faire des élévations au cube, ce qui va entraîner des calculs invraisemblables. On peut faire plus simple :

Posons $\begin{cases} a^3=x+3 \\ b^3=4-x \end{cases}$ On remarque : $\begin{cases} a^3+b^3=7 \\ a+b=1 \end{cases}$

On a : $(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$\rightarrow \quad a^2+2ab-3ab+b^2=7 \rightarrow (a+b)^2-3ab=7 \rightarrow 3ab=-6 \rightarrow ab=-2$

$\rightarrow \quad a^3b^3=-8 \rightarrow (x+3)(4-x)=-8 \rightarrow x^2-x-20=0 \rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-4 \\ x=5 \end{cases}}$

40. ALG174 – Louvain, juillet 2004, série 1.

Déterminer le polynôme $P(x)$ du 4$^{\text{éme}}$ degré tel que le coefficient de x^4 dans P vaut 1, P est divisible par x^2+x+1, le reste de la division de P par x^2-1 est $-3x+9$.

Donner les racines réelles de l'équation $P(x)=0$.

Correction

Soit le polynôme : $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$

Faisons la division de $P(x)$ par x^2+x+1

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & a & b & c & d & x^2+x+1 \\
\underline{1} & \underline{1} & \underline{1} & & & 1 \\
0 & a-1 & b-1 & & & a-1 \\
 & \underline{a-1} & \underline{a-1} & \underline{a-1} & & b-a \\
 & 0 & b-a & c-a+1 & & \\
 & & \underline{b-a} & \underline{b-a} & \underline{b-a} & \\
 & & 0 & c-b+1 & d-b+a &
\end{array}
$$

On en déduit : $P(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+(a-1)x+(b-a)\right)\ (1)$ et $\begin{cases} c-b+1=0 & (2) \\ d-b+a=0 & (3) \end{cases}$

Divisions maintenant par x^2-1

$$
\begin{array}{ccccc|c}
1 & a & b & c & d & x^2-1 \\
\underline{1} & \_ & \underline{-1} & & & 1 \\
0 & a & b+1 & & & a \\
 & \underline{a} & \_ & \underline{-a} & & b+1 \\
 & 0 & b+1 & c+a & & \\
 & & \underline{b+1} & \_ & \underline{-b-1} & \\
 & & 0 & c+a & d+b+1 &
\end{array}
$$

On en déduit : $P(x)=\left(x^2-1\right)\left(x^2+ax+(b+1)\right)+(c+a)x+(d+b+1)$ et $\begin{cases} c+a=0 & (4) \\ d+b+1=0 & (5) \end{cases}$

Il reste à résoudre le système formé par les équations $(2),(3),(4)$et (5)

$$
\begin{array}{cccc|c}
a & b & c & d & X \\
\hline
 & -1 & 1 & & -1 \\
1 & -1 & & 1 & 0 \\
1 & & 1 & & -3 \\
 & 1 & & 1 & 8
\end{array}
\rightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=2 \\ c=1 \\ d=6 \end{cases} \rightarrow \boxed{P(x)=x^4-4x^3+2x^2+x+6}
$$

De (1), on déduit : $P(x)=\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-5x+6\right)=\left(x^2+x+1\right)(x-3)(x-2)$ donc $\boxed{\begin{cases} x=3 \\ x=2 \end{cases}}$

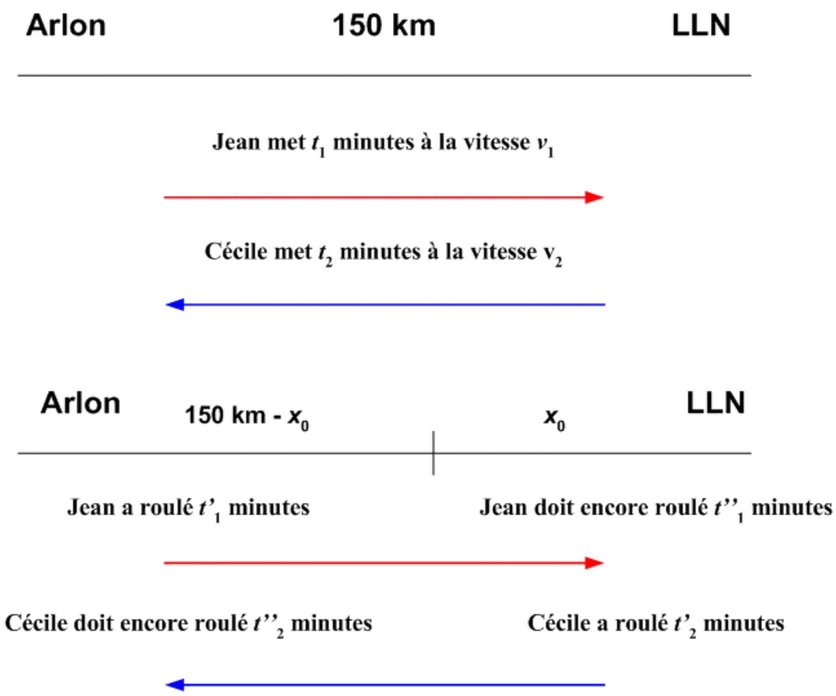
41. EXALG176 – Louvain, juillet 2004, série 1.

Le tronçon de l'autoroute E411 reliant Louvain-La-Neuve à Arlon a pour longueur approximative 150km. Jean met pour franchir cette distance 25 minutes de moins que sont épouse Cécile avec sa Clio.

Or, l'autre jour, ils sont partis en même temps, elle de Louvain-La-Neuve et lui de Arlon. Quand ils se sont croisés, ils ont observé que la différence entre les distances encore à franchir, en km, était égale à la différence entre les nombres de minutes qu'il leur restait à rouler, s'ils conservaient leurs vitesses habituelles respectives (v_1 pour Jean et v_2 pour Cécile, toutes supposées constantes tout au long du parcours).

* A quelle distance x_0 (en km) étaient-ils de Louvain-La-Neuve lors de leur croisement ?
* Combien de temps t (en minutes) avaient-ils roulé avant de se croiser ?
* Calculer également les vitesses v_1 et v_2 (en km/minutes).

Correction



Désignons Jean par l'indice 1 et Cécile par l'indice 2.

On a : $\begin{cases} v_1 t_1 = v_2 t_2 = 150 \\ v_1 t'_1 = v_2 t'_2 = 150 - x_0 \\ v_1 t''_1 = v_2 t''_2 = x_0 \\ t_2 = t'_2 + t''_2 \\ t'_1 = t'_2 \end{cases}$

La différence entre les distances encore à franchir est : $150 - 2x_0$, on nous dit que : $t''_2 - t''_1 = 150 - 2x_0$, mais $t_2 - t_1 = t'_2 + t''_2 - t'_1 - t''_2 = t''_2 - t'_1 = 25 \Rightarrow 150 - 2x_0 = 25 \rightarrow \boxed{x_0 = 62.5\ km}$.

Calculons les vitesses : $t'_1 = t'_2 = \dfrac{150 - x_0}{v_1} = \dfrac{x_0}{v_1}$ $\quad (1)$ mais : $t_2 - t_1 = 150\left(\dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1}\right) = 25 \rightarrow \dfrac{1}{v_2} - \dfrac{1}{v_1} = \dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow (1)$ devient : $\dfrac{87.5}{v_1} = 62.5\left(\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{v_1}\right) \Rightarrow \boxed{v_1 = 2.4\ km/m \text{ ou } 144\ km/h}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{v_2} = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{v_1} \Rightarrow \boxed{v_1 = 1.714\ km/m \text{ ou } 102.8\ km/h}$

Calculons les temps : $t'_1 = t'_2 = \dfrac{62.5}{1.714} = 30,46$ mn, $t''_1 = \dfrac{62.5}{2.4} = 26,05$ mn, $t''_2 = \dfrac{87.5}{1.714} = 51,05$ mn.

42. EXALG177 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Soit a un paramètre réel strictement positif. Discuter et résoudre, dans les nombres réels, l'équation suivante : $\log_8(\log_2 a + \log_4 x) = \dfrac{1}{3} + \log_8\left(\log_2 \sqrt{x+1}\right)$.

Correction

$$CE:\begin{cases} x>0 \\ a>0\ (\text{dans les hypothèses}) \\ \log_2 a+\log_4 x>0 \to \log_2 a\sqrt{x}>0 \to a\sqrt{x}>1 \\ \log_2 \sqrt{x+1}>0 \to \sqrt{x+1}>1 \to x>0 \end{cases}$$

$$\log_8(\log_2 a+\log_4 x)=\frac{1}{3}+\log_8\left(\log_2 \sqrt{x+1}\right)$$

$$\log_8(\log_2 a+\log_4 x)=\log_8 8^{\frac{1}{3}}+\log_8\left(\frac{1}{2}\log_2(x+1)\right)$$

$$\log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 x=\log_2(x+1)$$

$$a\sqrt{x}=x+1 \to x^2+\left(2-a^2\right)x+1=0$$

Le delta doit être positif ou nul : $\Delta=\left(2-a^2\right)^2-4=a^2(a-2)(a+2)\geq 0$

$$\to \begin{cases} a\geq 2 \\ a\leq -2 \quad \text{à rejeter} \end{cases} \to \boxed{x=\frac{a^2-2\pm a\sqrt{(a-2)(a+2)}}{2}}$$

Il faut encore vérifier que les CE sont vérifiées.

$\underline{x>0}$ $\to a^2-2\pm a\sqrt{(a-2)(a+2)}>0 \to a^2-2>a\sqrt{(a-2)(a+2)} \to 2a^2+a>0$

Ce qui est toujours vérifié. Il est évident que l'autre racine est aussi toujours >0

$\underline{a\sqrt{x}>1}$

Considérons la racine la plus petite

$$a\sqrt{x}>1 \to x>\frac{1}{a^2} \to \frac{1}{a^2}<\frac{a^2-2-a\sqrt{(a-2)(a+2)}}{2}$$

$$\to 2<a^4-2a^2-a^3\sqrt{(a-2)(a+2)} \to 4+8a^2>0$$

Ce qui est toujours vérifié.

43. EXALG178 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Résoudre, dans les nombres réels, l'inéquation suivante : $\sqrt{(1-x)^3}\geq 1-2x$.

Correction

$$CE:\begin{cases} 1-x\geq 0 \\ 1-2x\geq 0 \end{cases} \to x\leq \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{(1-x)^3}\geq 1-2x \to 1-3x+3x^2-x^3\geq 1-4x+4x^2$$

$$\to 1-3x+3x^2-x^3\geq 1-4x+4x^2 \to x\left(x^2+x-1\right)\leq 0$$

Avec : $x^2+x-1=0 \to \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$, conclusion : $\boxed{0\leq x\leq \frac{1}{2}}$.

44. ALG179 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Donner toutes les racines complexes (y compris, bien entendu, les racines réelles), sous la forme a + ib de l'équation $\left(z^2+2z\right)^3=1$.

Correction

Posons $t = z^2 + 2z$, l'équation devient : $t^3 = 1 = cis 2k\pi \to t = cis\dfrac{2k\pi}{3}$

$\to t_1 = 1, \quad t_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i, \quad t_3 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

$\underline{1)\ t = 1} \quad \to \; z^2 + 2z - 1 = 0 \to z_1 = \sqrt{2} - 1, \quad z_2 = -1 - \sqrt{2}$

$\underline{2)\ t = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i} \; \to z^2 + 2z + \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = 0 \to \Delta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i = \dfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}i\right)$

Calculons : $\sqrt{1 + \sqrt{3}i}$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ 2xy = \sqrt{3} \end{cases} \to \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2y^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \to X^2 - 2X + \frac{3}{4} = 0 \to X = \begin{cases} \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2} \end{cases} \to x = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ et } y = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Finalement : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{\dfrac{1}{2}}\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} + i\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$

$$\to \begin{cases} z_3 = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(2 - \sqrt{3} - i\right) \\ z_4 = 1 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(2 + \sqrt{3} + i\right) \end{cases}$$

$\underline{3)\ t = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

Il n'est pas nécessaire de faire les calculs. Il suffit de prendre les conjugués de

$$z_3 \text{ et } z_4 \to \begin{cases} z_5 = \dfrac{1}{2}\left(2 - \sqrt{3} + i\right) \\ z_6 = \dfrac{1}{2}\left(2 + \sqrt{3} - i\right) \end{cases}$$