Polynésie

1. Exercice 1 (7 points)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\Re(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - \mathrm{i}$.
2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1-\mathrm{i})$.
3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ, $\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

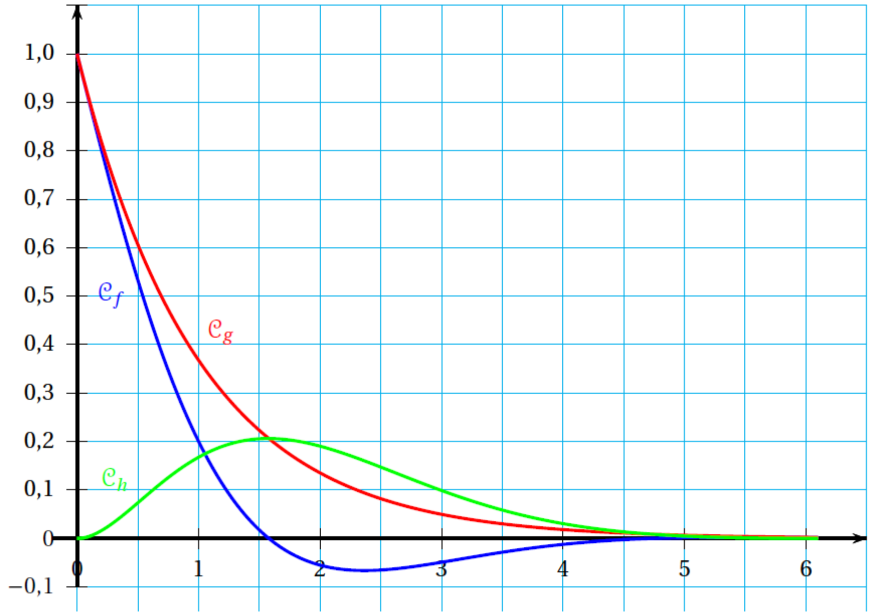
Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta)+\sin(\theta)=\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;+\infty[$ par : $f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos(x)$ et $g(x)=\mathrm{e}^{-x}$.

On définit la fonction h sur $[0\,;+\infty[$ par $h(x)=g(x)-f(x)$.

Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données ci-dessous dans un repère orthogonal.



1. Conjecturer :

a. les limites des fonctions f et g en $+\infty$;

b. la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$;

c. la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est maximal.

2. Justifier que $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4. a. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$.

Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, $h'(x)=\mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1\right]$.

b. Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1\geq 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)-1\leq 0$.

c. En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

5. On admet que, sur l'intervalle $\left[0\,;+\infty\right[$, la fonction H définie par $H(x)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2+\cos(x)-\sin(x)]$ est une primitive de la fonction h.

On note D le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x=2\pi$.

Calculer l'aire A du domaine D, exprimée en unités d'aire.

2. Exercice 2 (5 points)

Partie A

On étudie une maladie dans la population d'un pays. On a constaté que le taux, en nanogrammes par millilitre $\left(\mathrm{ng.mL}^{-1}\right)$, d'une substance Gamma présente dans le sang est plus élevé chez les personnes atteintes de cette maladie que chez les personnes qui n'en sont pas atteintes.

1. Le taux de cette substance Gamma dans la population des personnes qui ne sont pas atteintes par la maladie est modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu=40$ et d'écart-type $\sigma=8$.

On choisit au hasard une personne parmi celles qui ne sont pas atteintes par la maladie étudiée.

Calculer la probabilité que le taux dans le sang de la substance Gamma soit supérieur à 60 $\mathrm{ng.mL}^{-1}$.

2. Des études ont mis en évidence que le taux moyen de la substance Gamma chez les personnes atteintes par la maladie étudiée est de 50 $\mathrm{ng.mL}^{-1}$ et que 10 % d'entre elles ont un taux de substance Gamma inférieur à 43 $\mathrm{ng.mL}^{-1}$.

On appelle T' la variable aléatoire qui modélise le taux de la substance Gamma en $\mathrm{ng.mL}^{-1}$ chez une personne atteinte par lamaladie étudiée.

On admet que T' suit la loi normale d'espérance μ' et d'écart-type σ'.

Préciser la valeur de μ' et déterminer la valeur de σ'.

Partie B

Pour dépister chez une personne la maladie étudiée, on effectue une prise de sang.

On considère que le dépistage est positif si le taux de la substance Gamma est supérieur ou égal à 45 $\mathrm{ng.mL}^{-1}$.

Une personne étant choisie au hasard dans la population, on appelle :

- M l'évènement « le patient est atteint par lamaladie étudiée » ;
- D l'évènement « le patient a un dépistage positif ».

On admet que :

- 82 % des personnes atteintes par la maladie étudiée ont un dépistage positif ;
- 73 % des personnes non atteintes par cette maladie ont un dépistage négatif ;
- on sait de plus que 10 % de la population étudiée est atteinte par cette maladie.

1. Démontrer que la probabilité qu'un patient ait un dépistage positif est de 0,325.

2. Calculer $\mathbb{P}_D(M)$. Interpréter ce résultat.

3. Un patient a un dépistage positif. Le médecin le rassure (légèrement) en lui indiquant qu'il n'a qu'une chance sur quatre d'avoir contracté la maladie. Qu'en pensezvous ?

Partie C

Lors du dépistage précédent, la prise de sang est effectuée chez des sujets à jeun.

Les données montrent que 82 % des patients malades ont un dépistage positif.

Pour améliorer le confort des personnes susceptibles de subir cet examen sanguin, on souhaite vérifier si le fait d'être à jeun est une condition indispensable dans le protocole.

On considère un groupe de 300 personnes malades sur lesquelles la prise de sang n'est pas effectuée à jeun.

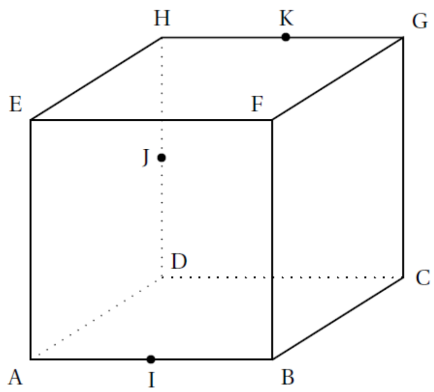
Le dépistage se révèle positif pour 74 % d'entre elles.

Ce dépistage peut-il être effectué sur des personnes qui ne sont pas à jeun ?

3. Exercice 3 (3 points)

ABCDEFGH est un cube. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [HD] et K est le milieu de [HG].

On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{CE}$ est un vecteur normal au plan (IJK).

2. Démontrer que la droite (BD) est parallèle au plan (IJK).

3. Soit M un point de la droite (CE). Quelle est la position du point M sur la droite (CE) pour laquelle le plan (BDM) est parallèle au plan (IJK) ?

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Pour tout entier naturel n non nul, on appelle $S(n)$ le nombre égal à la somme des diviseurs positifs de n.

1. Vérifier que $S(6)=12$ et calculer $S(7)$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $S(n)\geqslant 1+n$.

b. Quels sont les entiers naturels n tels que $S(n)=1+n$?

3. On suppose dans cette question que n s'écrit $p\times q$ où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Démontrer que $S(n)=(1+p)(1+q)$.

b. On considère la proposition suivante :

« Pour tous entiers naturels n et m non nuls distincts, $S(n\times m)=S(n)\times S(m)$ ».

Cette proposition est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

4. On suppose dans cette question que l'entier n s'écrit p^k, où p est un nombre premier et k un nombre entier naturel non nul.

a. Quels sont les diviseurs de n ?

b. En déduire que $S(n)=\dfrac{1-p^{k+1}}{1-p}$.

5. On suppose dans cette question que n s'écrit $p^{13}\times q^7$, où p et q sont des nombres premiers distincts.

a. Soit m un entier naturel.

Démontrer que m divise n si, et seulement si, il existe deux nombres entiers s et t avec $0\leqslant s\leqslant 13$ et $0\leqslant t\leqslant 7$ tels que $m=p^s\times q^t$.

b. Démontrer que $S(n)=\dfrac{1-p^{14}}{1-p}\times\dfrac{1-q^8}{1-q}$.