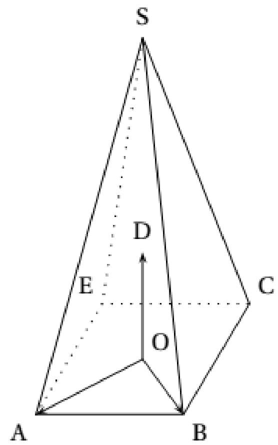
Amérique du Nord

1. Exercice 1 (5 points)

Dans l'espace, on considère une pyramide SABCE à base carrée ABCE de centre O. Soit D le point de l'espace tel que $(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OD})$ soit un repère orthonormé. Le point S a pour coordonnées (0 ; 0 ; 3) dans ce repère.



Partie A

1. Soit U le point de la droite (SB) de cote 1. Construire le point U sur la figure (à rendre avec la copie).

2. Soit V le point d'intersection du plan (AEU) et de la droite (SC). Montrer que les droites (UV) et (BC) sont parallèles. Construire le point V sur la figure.

3. Soit K le point de coordonnées $\left(\frac{5}{6}\,;-\frac{1}{6}\,;0\right)$. Montrer que K est le pied de la hauteur issue de U dans le trapèze AUVE.

Partie B

Dans cette partie, on admet que l'aire du quadrilatère AUVE est $\frac{5\sqrt{43}}{18}$.

1. On admet que le point U a pour coordonnées $\left(0\,;\frac{2}{3}\,;1\right)$.

Vérifier que le plan (EAU) a pour équation $3x-3y+5z-3=0$.

2. Donner une représentation paramétrique de la droite (d), orthogonale au plan (EAU) passant par le point S.

3. Déterminer les coordonnées de H, point d'intersection de la droite (d) et du plan (EAU).

4. Le plan (EAU) partage la pyramide (SABCE) en deux solides. Ces deux solides ont-ils le même volume ?

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\,;y_n)$ de la façon suivante : $x_0=-3$, $y_0=4$ et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} x_{n+1}=0,8x_n-0,6y_n \\ y_{n+1}=0,6x_n+0,8y_n \end{cases}.$$

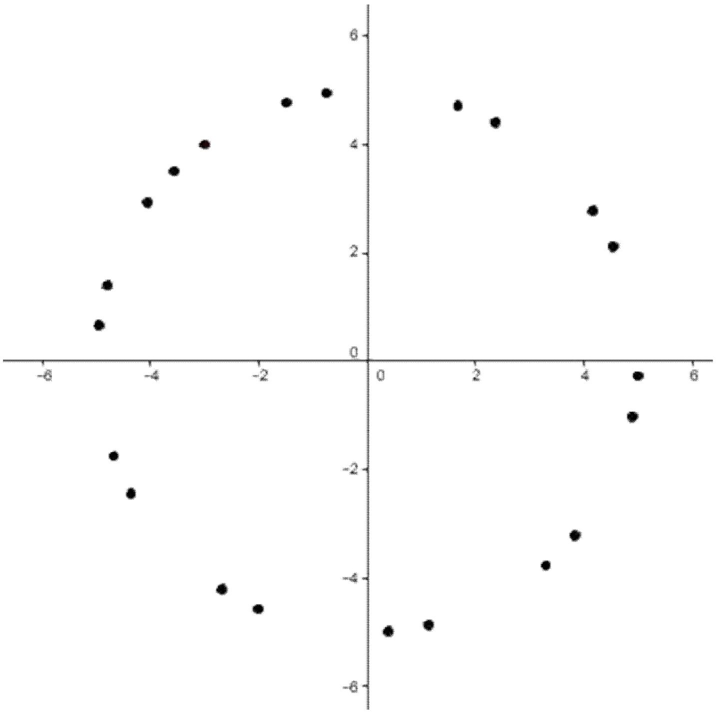
1. a. Déterminer les coordonnées des points A_0, A_1, A_2.

b. Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

Variables	i , x, y, t : nombres réels
Initialisation	x prend la valeur −3 y prend la valeur 4
Traitement	Pour i allant de 0 à 20 Construire le point de coordonnées (x ; y) t prend la valeur x x prend la valeur .... y prend la valeur .... Fin Pour

Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

c. À l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :



Identifier les points A_0, A_1, A_2.

On les nommera sur la figure (à rendre avec la copie).

Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.

Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel n, $z_n = x_n + iy_n$, l'affixe du point A_n.

a. Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

b. On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0{,}8$ et $\sin(\theta) = 0{,}6$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $e^{i\theta} z_n = z_{n+1}$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $z_n = e^{in\theta} z_0$.

d. Montrer que $\theta + \frac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

e. Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.

Représenter θ sur la figure.

Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

3. *Exercice 3 (5 points, spécialistes)*

On donne les matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Déterminer la matrice M^2. On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

2. Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

3. En déduire que M est inversible et que $M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I \right)$.

Partie B : Étude d'un cas particulier

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points $A(1~;~1)$, $B(-1~;~-1)$ et $C(2~;~5)$.

1. Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que $M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

2. Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

Partie C : Retour au cas général

Les nombres a, b, c, p, q, r sont des entiers.

Dans un repère $(O~;\vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1~;~p)$, $B(-1~;~q)$ et $C(2~;~r)$.

On cherche des valeurs de p, q et r pour qu'il existe une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passant par A, B et C.

1. Démontrer que si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ avec a, b et c entiers, alors $\begin{cases} -3p + q + 2r \equiv 0\,[6] \\ 3p - 3q \equiv 0\,[6] \\ 6p + 2q - 2r \equiv 0\,[6] \end{cases}$

2. En déduire que $\begin{cases} q - r \equiv 0\,[3] \\ p - q \equiv 0\,[2] \end{cases}$

3. Réciproquement, on admet que si $\begin{cases} q - r \equiv 0\,[3] \\ p - q \equiv 0\,[2] \end{cases}$ et si A, B, C ne sont pas alignés, alors il existe trois entiers a, b et c tels que la parabole d'équation passe par les points A, B et C.

a. Montrer que les points A, B et C sont alignés si et seulement si $2r + q - 3p = 0$.

b. On choisit $p = 7$. Déterminer des entiers q, r, a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A, B et C.

4. Exercice 3 (4 points)

Une entreprise fabrique des tablettes de chocolat de 100 grammes. Le service de contrôle qualité effectue plusieurs types de contrôle.

Partie A : Contrôle avant la mise sur le marché

Une tablette de chocolat doit peser 100 grammes avec une tolérance de deux grammes en plus ou en moins. Elle est donc mise sur le marché si sa masse est comprise entre 98 et 102 grammes.

La masse (exprimée en grammes) d'une tablette de chocolat peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 100$ et d'écart-type $\sigma = 1$. Le réglage des machines de la chaîne de fabrication permet de modifier la valeur de σ.

1. Calculer la probabilité de l'évènement M : « la tablette est mise sur le marché ».

2. On souhaite modifier le réglage des machines de telle sorte que la probabilité de cet évènement atteigne 0,97.

Déterminer la valeur de σ pour que la probabilité de l'évènement « la tablette est mise sur le marché » soit égale à 0,97.

Partie B : Contrôle à la réception

Le service contrôle la qualité des fèves de cacao livrées par les producteurs. Un des critères de qualité est le taux d'humidité qui doit être de 7 %. On dit alors que la fève est conforme.

L'entreprise a trois fournisseurs différents : le premier fournisseur procure la moitié du stock de fèves, le deuxième 30 % et le dernier apporte 20 % du stock.

Pour le premier, 98 % de sa production respecte le taux d'humidité ; pour le deuxième, qui est un peu moins cher, 90 % de sa production est conforme, et le troisième fournit 20 % de fèves non conformes.

On choisit au hasard une fève dans le stock reçu. On note F_i l'évènement « la fève provient du fournisseur i », pour i prenant les valeurs 1, 2 ou 3, et C l'évènement « la fève est conforme ».

1. Déterminer la probabilité que la fève provienne du fournisseur 1, sachant qu'elle est conforme.

Le résultat sera arrondi à 10^{-2}.

2. Le troisième fournisseur ayant la plus forte proportion de fèves non conformes, l'entreprise décide de ne conserver que les fournisseurs 1 et 2. De plus, elle souhaite que 92 % des fèves qu'elle achète soient conformes.

Quelle proportion p de fèves doit-elle acheter au fournisseur 1 pour atteindre cet objectif ?

5. Exercice 4 (6 points)

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $u(x)=\ln(x)+x-3$.

1. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

3. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\left[\ln(x)-2\right]+2$.

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\frac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la partie A.

b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Partie C

Soit C′ la courbe d'équation $y=\ln(x)$.

1. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f(x)-\ln(x)=\frac{2-\ln(x)}{x}$. En déduire que les courbes C et C′ ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

2. On admet que la fonction H définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $H(x)=\frac{1}{2}\left[\ln(x)\right]^2$ est une primitive de la fonction h définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $\frac{\ln(x)}{x}$.

Calculer $I=\int_1^{e^2}\frac{2-\ln(x)}{x}dx$. Interpréter graphiquement ce résultat.