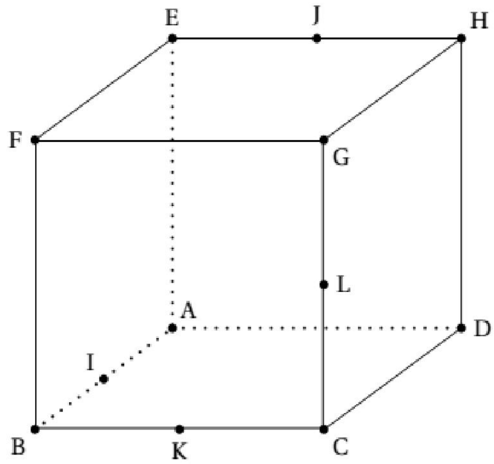
Liban

1. Exercice 1 (6 points)

ABCDEFGH est un cube.



I est le milieu du segment [AB], J est le milieu du segment [EH], K est le milieu du segment [BC] et L est le milieu du segment [CG]. On munit l'espace du repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. a. Démontrer que la droite (FD) est orthogonale au plan (IJK).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (IJK).

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).

3. Soit M le point d'intersection de la droite (FD) et du plan (IJK). Déterminer les coordonnées du point M.

4. Déterminer la nature du triangle IJK et calculer son aire.

5. Calculer le volume du tétraèdre FIJK.

6. Les droites (IJ) et (KL) sont-elles sécantes ?

2. Exercice 2 (6 points)

On définit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout entier naturel n, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

b. En déduire la valeur exacte de u_1.

3. a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables	i et n sont des entiers naturels, u est un réel.
Entrée	Saisir n
Initialisation	Affecter à u la valeur ...
Traitement	Pour i variant de 1 à ... Affecter à u la valeur ... Fin de Pour
Sortie	Afficher u

b. À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,6931	0,3069	0,1931	0,1402	0,1098	0,0902	0,0475	0,0099	0,0050

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

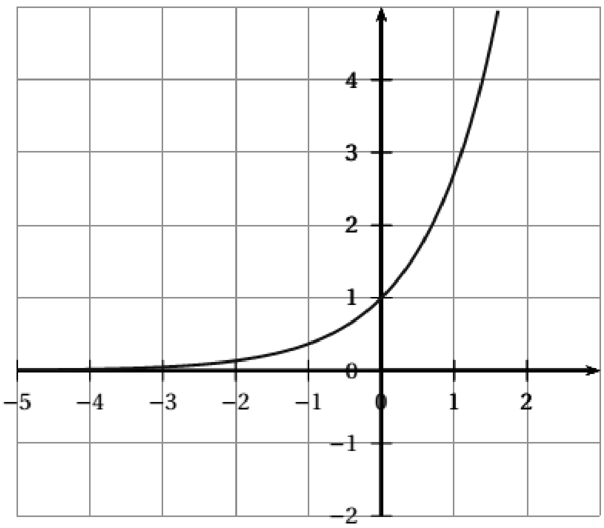
4. a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

5. On appelle L la limite de la suite (u_n). Démontrer que $L = 0$.

3. Exercice 3 (3 points)

On considère la courbe C d'équation $y = e^x$, tracée ci-dessous.



Pour tout réel m strictement positif, on note D_m la droite d'équation $y = mx$.

1. Dans cette question, on choisit $m = e$. Démontrer que la droite D_e, d'équation $y = ex$, est tangente à la courbe C en son point d'abscisse 1.

2. Conjecturer, selon les valeurs prises par le réel strictement positif m, le nombre de points d'intersection de la courbe C et de la droite D_m.

3. Démontrer cette conjecture.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

En prévision d'une élection entre deux candidats A et B, un institut de sondage recueille les intentions de vote de futurs électeurs.

Parmi les 1 200 personnes qui ont répondu au sondage, 47 % affirment vouloir voter pour le candidat A et les autres pour le candidat B.

Compte-tenu du profil des candidats, l'institut de sondage estime que 10 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat A ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat B, tandis que 20 % des personnes déclarant vouloir voter pour le candidat B ne disent pas la vérité et votent en réalité pour le candidat A.

On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note :

- A l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat A » ;
- B l'évènement « La personne interrogée affirme vouloir voter pour le candidat B » ;
- V l'évènement « La personne interrogée dit la vérité ».

1. Construire un arbre de probabilités traduisant la situation.

2. a. Calculer la probabilité que la personne interrogée dise la vérité.

b. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour le candidat A.

3. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour le candidat A est 0,529.

4. L'institut de sondage publie alors les résultats suivants :

52,9 % des électeurs* voteraient pour le candidat A.
*estimation après redressement, fondée sur un sondage d'un échantillon représentatif de 1 200 personnes.

Au seuil de confiance de 95 %, le candidat A peut- il croire en sa victoire ?

5. Pour effectuer ce sondage, l'institut a réalisé une enquête téléphonique à raison de 10 communications par demi-heure. La probabilité qu'une personne contactée accepte de répondre à cette enquête est 0,4.

L'institut de sondage souhaite obtenir un échantillon de 1 200 réponses.

Quel temps moyen, exprimé en heures, l'institut doit-il prévoir pour parvenir à cet objectif ?

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Un fumeur décide d'arrêter de fumer. On choisit d'utiliser la modélisation suivante :

- s'il ne fume pas un jour donné, il ne fume pas le jour suivant avec une probabilité de 0,9 ;
- s'il fume un jour donné, il fume le jour suivant avec une probabilité de 0,6.

On appelle p_n la probabilité de ne pas fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer et q_n , la probabilité de fumer le n-ième jour après sa décision d'arrêter de fumer.

On suppose que $p_0 = 0$ et $q_0 = 1$.

1. Calculer p_1 et q_1.

2. On utilise un tableur pour automatiser le calcul des termes successifs des suites (p_n) et (q_n). Une copie d'écran de cette feuille de calcul est fournie ci-dessous :

	A	B	C
1	n	p_n	q_n
2	0	0	1
3	1		
4	2		
5	3		

Dans la colonne A figurent les valeurs de l'entier naturel n.

Quelles formules peut-on écrire dans les cellules B3 et C3 de façon qu'en les recopiant vers le bas, on obtienne respectivement dans les colonnes B et C les termes successifs des suites (p_n) et (q_n) ?

3. On définit les matrices M et, pour tout entier naturel n, X_n par $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,4 \\ 0,1 & 0,6 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$.

On admet que $X_{n+1} = MX_n$ et que, pour tout entier naturel n, $X_n = M^n X_0$.

On définit les matrices A et B par $A = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,8 \\ 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & -0,8 \\ -0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que $M = A + 0,5B$.

b. Vérifier que $A^2 = A$ et que $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On admet dans la suite que, pour tout entier naturel n strictement positif, $A^n = A$ et $B^n = B$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $M^n = A + 0,5^n B$.

d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_n = 0,8 - 0,8 \times 0,5^n$.

e. À long terme, peut-on affirmer avec certitude que le fumeur arrêtera de fumer ?

Correction du Bac S Liban 2015

Ex 1 : Remarque : l'énoncé dit que le repère $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est orthonormal donc les trois vecteurs de bases sont de normes 1, ce qui signifie que le cube a pour côté $a=1$.

1) a) Pour montrer qu'une droite est orthogonale à un plan, il suffit de montrer que cette droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan donc ici, il suffit de prouver que (FD) est orthogonale à (IJ) et à (IK). On trouve après avoir donné les coordonnées des points : $\overrightarrow{FD}\left(-1;1;-1\right)$; $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ d'où $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1=0$ et $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{IK}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0$ ce qui prouve le résultat.

b) $\overrightarrow{FD}\left(-1;1;-1\right)$ est alors un vecteur normal au plan (IJK) donc ce plan a pour équation $-x+y-z+d=0$ or $I\left(\frac{1}{2};0;0\right)\in\left(IJK\right)$ donc $-\frac{1}{2}+0-0+d=0$ d'où $d=\frac{1}{2}$. Ainsi $\left(IJK\right):-x+y-z+\frac{1}{2}=0$.

2) $\left(FD\right)$ passe par $F\left(1;0;1\right)$ et a comme vecteur directeur $\overrightarrow{FD}\left(-1;1;-1\right)$ donc une représentation paramétrique est $\left(FD\right)\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=1-t\end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$.

3) $M\left(x;y;z\right)\in\left(FD\right)$ donc il existe t tel que $x=1-t$; $y=t$ et $z=1-t$. Mais $M\in\left(IJK\right)$ donc $-x+y-z+\frac{1}{2}=0$ ce qui donne $-\left(1-t\right)+t-\left(1-t\right)+\frac{1}{2}=0$ d'où $t=\frac{1}{2}$ et donc $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ qui est au passage le centre du cube.

4) $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$ et $\overrightarrow{IK}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$ donc $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{IK}=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=0$ donc IJK est rectangle en I. Il n'est pas isocèle puisque $IJ=\overrightarrow{IJ}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ et $IK=\overrightarrow{IK}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'aire de IJK vaut donc $\mathcal{A}=\frac{IJ\times IK}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$ unité d'aire.

5) D'après 1) a) et 3), la hauteur issue de F du tétraèdre $FIJK$ est FM. Or $\overrightarrow{FM}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ donc $FM=\overrightarrow{FM}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Le volume du tétraèdre $FIJK$ est donc $V=\frac{1}{3}\times FM\times\mathcal{A}=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{8}$ unité de volume.

6) Il y a plusieurs méthodes pour cela, mais puisqu'on a une équation cartésienne du plan $\left(IJK\right)$, autant s'en servir. En effet, $L\left(1;1;\frac{1}{2}\right)$ et ses coordonnées vérifient l'équation du plan $\left(IJK\right)$ puisque $-1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=0$ donc $L\in\left(IJK\right)$. $\left(IJ\right)$ et $\left(KL\right)$ sont donc coplanaires : elles sont donc soit sécantes soit parallèles. On exclut ce dernier cas en constatant que $\overrightarrow{IJ}\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$ et $\overrightarrow{KL}\left(0;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ ne sont pas colinéaires puisque $-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\neq\frac{1}{2}\times 0$; d'où le résultat.

Ex 2 : 1) Puisque $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln\left|u\right|$, $u_0=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\left[\ln\left|1+x\right|\right]_0^1=\ln 2$.

2) a) Soit $n\in\mathbb{N}$. Par linéarité,

(A) $u_{n+1}+u_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx+\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}dx=\int_0^1 x^n dx=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

b) Pour $n=0$, l'égalité précédente donne $u_1+u_0=1$ d'où $u_1=1-\ln 2$.

3) a) Les trois lignes à compléter sont :

« Affecter à u la valeur $\ln 2$ » ; « Pour i variant de 1 à n » et « Affecter à u la valeur $\frac{1}{i}-u$ ».

Explication : Vous voulez calculer par exemple u_n pour $n=3$.

Puisque le premier terme vaut $u_0=\ln 2$, on initialise u à $\ln 2$.

Ensuite, puisque pour tout entier n, $u_{n+1}=\frac{1}{n+1}-u_n$ on a les étapes suivantes :

Pour $n=0$ (donc pour $i=1$, puisqu'on démarre i à 1) : $u_1=\frac{1}{1}-u_0$ donc « Affecter à u la valeur $\frac{1}{1}-u$ ».

Pour $n=1$ (donc pour $i=2$) : $u_2=\frac{1}{2}-u_1$ donc « Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}-u$ ».

Pour $n=2$ (donc pour $i=3$) : $u_3=\frac{1}{3}-u_2$ donc « Affecter à u la valeur $\frac{1}{3}-u$ ».

b) Il semblerait que (u_n) soit décroissante et converge vers 0.

4) a) Il s'agit d'étudier le signe de la différence :

(B) $u_{n+1}-u_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}dx$

Sur l'intervalle $[0;1]$, $x^n\geq 0$; $x-1\leq 0$ et $1+x>0$ donc $\frac{x^n(x-1)}{1+x}\leq 0$.

Par intégration sur $[0;1]$, $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}dx\leq 0$ donc $u_{n+1}-u_n\leq 0$ et ce, pour tout entier naturel n : (u_n) est donc bien décroissante.

b) On sent bien qu'il faut utiliser la théorème de la convergence monotone. Il suffit alors de prouver que (u_n) est minorée. Et bien elle est minorée par 0. En effet, $u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ et sur l'intervalle $[0;1]$, $\frac{x^n}{1+x}\geq 0$ donc par intégration sur $[0;1]$, $u_n\geq 0$ et ce, pout tout entier naturel n.

(u_n) est donc décroissante et minorée, donc elle converge.

5) On se sert de la relation $u_{n+1}+u_n=\frac{1}{n+1}$ valable pour tout entier naturel n.

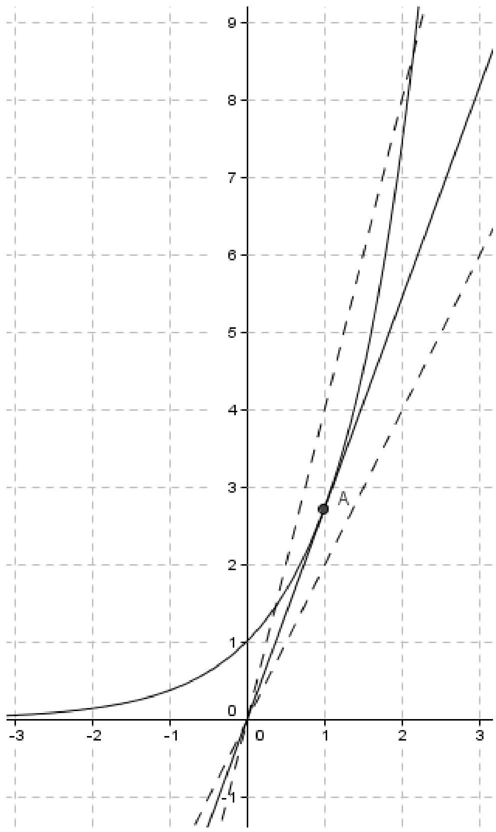
Lorsque n tend vers $+\infty$, u_n et u_{n+1} tendent vers L et $\frac{1}{n+1}$ tend vers 0 donc par passage à la limite, on obtient $2L=0$ d'où $L=0$.

<u>Ex 3</u> : 1) L'équation de la tangente $\mathcal{D}_e$ au point d'abscisse 1 est $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ où f est la fonction définie par $f(x)=e^x$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x)=e^x$.

$\mathcal{D}_e$ a pour équation $y=e^1(x-1)+e^1$ d'où $y=ex$.

2) La droite $\mathcal{D}_m$ est la droite passant par l'origine O et de coefficient directeur m.

Il semblerait que le nombre de point(s) d'intersection entre $\mathcal{D}_m$ et $\mathcal{C}$ soit de : 2 si $m>e$; 1 si $m=e$; et 0 si $0<m<e$ (figure).



3) On souhaite donc avoir le nombre de solutions de l'équation $e^x = mx$. Cela doit vous faire pensez au corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

Mais pour il ne s'applique que pour une équation de la forme $g(x) = k$ où k est une constante. Il suffit alors de transformer l'équation : $e^x = mx \Leftrightarrow e^x - mx = 0$.

Posons donc $g(x) = e^x - mx$ et étudions ses variations :

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et pour tout réel x, on a :

$g'(x) = e^x - m$.

Pour étudier le signe de $g'(x)$, résolvons l'inéquation $g'(x) \geq 0$:

Puisque $m > 0$, on a : $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq m \Leftrightarrow x \geq \ln m$.

x	$-\infty$		$\ln m$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$m(1-\ln m)$	$\nearrow$	$+\infty$

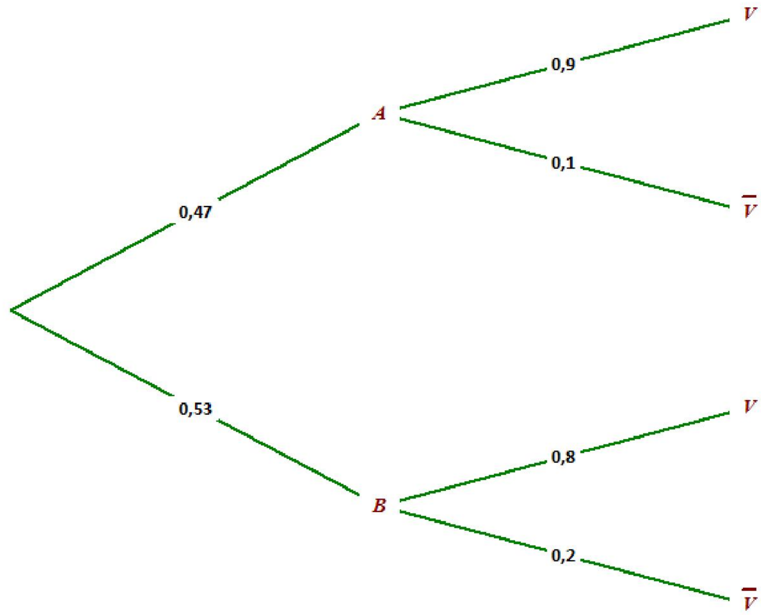
(C) $g(\ln m) = e^{\ln m} - m\ln m = m - m\ln m = m(1 - \ln m)$

Lorsque x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0 et $-mx$ tend vers $+\infty$ (puisque $m > 0$) donc $g(x)$ tend vers $+\infty$.
Pour la limite en $+\infty$, on a une forme indéterminée. Modifions l'expression :

Pour tout $x > 0$, $g(x) = x\left(\frac{e^x}{x} - m\right)$. lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$ par croissance comparée donc $\frac{e^x}{x} - m$ tend vers $+\infty$ et x tend vers $+\infty$ donc $g(x)$ tend vers $+\infty$ par produit.

On s'intéresse à l'équation $g(x)=0$ donc tout dépend du signe du minimum $m(1-\ln m)$:
Si $m=e$, ce minimum vaut 0 et donc l'équation $g(x)=0$ n'aura qu'une seule solution ce qui prouve bien qu'il n'y aura qu'un seul point d'intersection.
Si $m<e$, alors $\ln m<\ln e$ c'est-à-dire $\ln m<1$ donc $m(1-\ln m)>0$ et donc l'équation $g(x)=0$ n'aura aucune solution ce qui prouve qu'il n'y aura aucun point d'intersection.
Si $m>e$, alors $\ln m>\ln e$ c'est-à-dire $\ln m>1$ donc $m(1-\ln m)<0$ et donc l'équation $g(x)=0$ aura exactement deux solutions (appliquez le corollaire du TVI sur chacun des intervalles $]-\infty;\ln m[$ et $[\ln m;+\infty[$) ce qui prouve bien qu'il aura deux points d'intersection.

Ex 4 : 1)



2) a) $P(V)=P(A\cap V)+P(B\cap V)=P(A)\times P_A(V)+P(B)\times P_B(V)=0,47\times 0,9+0,53\times 0,8=0,847$.

b) $P_V(A)=\dfrac{P(A\cap V)}{P(V)}=\dfrac{0,47\times 0,9}{0,847}\approx 0,5$.

3) La probabilité que la personne vote effectivement pour A est :

$$P(A\cap V)+P(B\cap \overline{V})=0,47\times 0,9+0,53\times 0,2=0,529.$$

4) On nous donne ici la fréquence observée $f=0,529$. L'intervalle de confiance au seuil de confiance 0,95 est $I=\left[0,529-\dfrac{1}{\sqrt{1200}}\;;0,529+\dfrac{1}{\sqrt{1200}}\right]\approx[0,50013;0,55787]$ ce qui signifie qu'en principe (avec une probabilité de 0,95), la proportion p (non connue) de tous les électeurs (pas seulement l'échantillon) qui votent pour A est entre 0,50013 et 0,55787. Donc oui, A peut croire en sa victoire.

5) Déterminons tout d'abord le nombre moyen de personnes qui acceptent de répondre. Notons X la variable aléatoire égale au nombre de personnes qui acceptent de répondre. Vu le nombre important de l'échantillon, on peut supposer l'indépendance entre deux appels et dire que X suit une loi binomiale de paramètres n et $p=0,4$. Le nombre moyen d'appels est alors l'espérance $E(X)=np=0,4n$: comme on veut 1200 réponses, il faut que $0,4n=1200\Rightarrow n=3000$.
A raison de 10 communications par demi-heure, c'est-à-dire 20 communications par heure, cela fait un temps moyen de $\dfrac{3000}{20}=150$ heures.