France Métropolitaine & Réunion

1. Exercice 1 (6 points)

Les résultats des probabilités seront arrondis à 10^{-3} *près.*

Partie 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif donné.

On rappelle que la densité de probabilité de cette loi est la fonction f définie sur $[0\,.+\infty[$ par

$$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}.$$

a. Soit c et d deux réels tels que $0\leq c\leq d$. Démontrer que la probabilité $\mathbb{P}(c\leq X\leq d)$ vérifie $\mathbb{P}(c\leq X\leq d)=e^{-c}-e^{-d}$.

b. Déterminer une valeur de λ à 10^{-3} près de telle sorte que la probabilité $\mathbb{P}(X>20)$ soit égale à 0,05.

c. Donner l'espérance de la variable aléatoire X.

Dans la suite de l'exercice on prend λ = 0,15.

d. Calculer $\mathbb{P}(10\leq X\leq 20)$.

e. Calculer la probabilité de l'évènement (X > 18).

2. Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 16 et d'écart-type 1,95.

a. Calculer la probabilité de l'événement $20\leq X\leq 21$.

b. Calculer la probabilité de l'événement $(Y\leq 11)\cup(Y\geq 21)$.

Partie 2

Une chaîne de magasins souhaite fidéliser ses clients en offrant des bons d'achat à ses clients privilégiés. Chacun d'eux reçoit un bon d'achat de couleur verte ou rouge sur lequel est inscrit un montant.

Les bons d'achats sont distribués de façon à avoir, dans chaque magasin, un quart de bons rouges et trois quarts de bons verts.

Les bons d'achat verts prennent la valeur de 30 euros avec une probabilité égale à 0,067 ou des valeurs comprises entre 0 et 15 euros avec des probabilités non précisées ici.

De façon analogue, les bons d'achat rouges prennent les valeurs 30 ou 100 euros avec des probabilités respectivement égales à 0,015 et 0,010 ou des valeurs comprises entre 10 et 20 euros avec des probabilités non précisées ici.

1. Calculer la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros sachant qu'il est rouge.

2. Montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité d'avoir un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros vaut 0,057.

Pour la question suivante, on utilise cette valeur.

3. Dans un des magasins de cette chaîne, sur 200 clients privilégiés, 6 ont reçu un bon d'achat d'une valeur supérieure ou égale à 30 euros.

Le directeur du magasin considéré estime que ce nombre est insuffisant et doute de la répartition au hasard des bons d'achats dans les différents magasins de la chaîne. Ses doutes sont-ils justifiés ?

2. Exercice 2 (3 points)

Dans un repere orthonormé (O, I, J, K) d'unité 1 cm, on considère les points A(0 ; −1 ; 5), B(2 ; −1 ; 5), C(11 ; 0 ; 1), D(11 ; 4 ; 4).

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées : $M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $N_t(11\ ;\ 0{,}8t\ ;\ 1+0{,}6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1. a. La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

b. La droite (CD) se trouve dans un plan (P) parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK). Lequel ? On donnera une équation de ce plan (P).

c. Vérifier que la droite (AB), orthogonale au plan (P), coupe ce plan au point E(11 ; −1 ; 5).

d. Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2. a. Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$.

b. À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

3. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - 8z + 64 = 0$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.

a. Calculer le module et un argument du nombre a.

b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.

d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2. d. complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = ae^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b' = be^{i\frac{\pi}{3}}$.

a. Montrer que $b' = 8$.

b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].

Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.

4. Exercice 3 (5 points, spécialistes)

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans $\mathbb{Z}$: $7x - 5y = 1$.

a. Vérifier que le couple (3 ; 4) est solution de (E).

b. Montrer que le couple d'entiers $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x - 3) = 5(y - 4)$.

c. Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs tels que : $\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

Lorsqu'on est en A : si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

Lorsqu'on est en B : si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

Lorsqu'on est en C : si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour tout entier naturel n, on note a_n, b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n.

On note X_n lamatrice ligne $\left(a_n, b_n, c_n\right)$ et T lamatrice $\begin{pmatrix} 0{,}72 & 0{,}12 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}72 & 0{,}16 \\ 0{,}12 & 0{,}16 & 0{,}72 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice ligne X_0 et montrer que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = X_n T$.

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}56 \end{pmatrix}$.

a. À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P. On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

b. Montrer que $T^n = PD^nP^{-1}$.

c. Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n.

On note α_n, β_n, γ_n les coefficients de la première ligne de la matrice T^n, ainsi : $T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$.

On admet que $\alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0{,}6^n$ et $\beta_n = \frac{37 - 77 \times 0{,}6^n + 40 \times 0{,}56^n}{110}$.

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n, $X_n = X_0 T^n$.

a. Déterminer les nombres a_n, b_n, à l'aide des coefficients α_n et β_n. En déduire c_n.

b. Déterminer les limites des suites (a_n), (b_n) et (c_n).

c. Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?

5. Exercice 4 (6 points)

Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.

Le dessin ci-dessous en fournit une perspective cavalière.

Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.

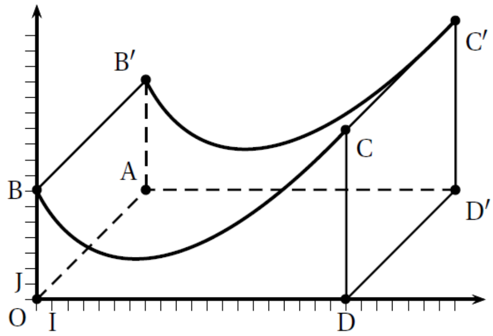
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$f(x)=(x+1)\ln(x+1)-3x+7 .$$



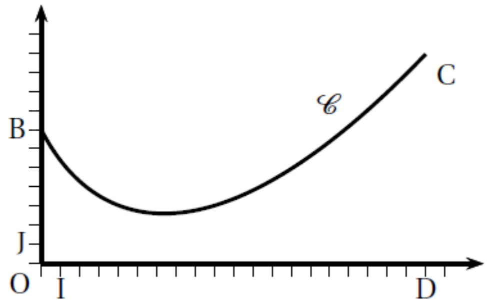
On note f' la fonction dérivée de la fonction f et C la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Partie 1

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle [0 ; 20], on a $f'(x)=\ln(x+1)-2$ .2. En déduire les variations de f sur l'intervalle [0 ; 20] et dresser son tableau de variation.

3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'*inclinaison* du module de skateboard au point B.



4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle [0 ; 20] par $g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle [0 ; 20] par $g'(x)=(x+1)\ln(x+1)$.

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 20].

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes.

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m² par litre.

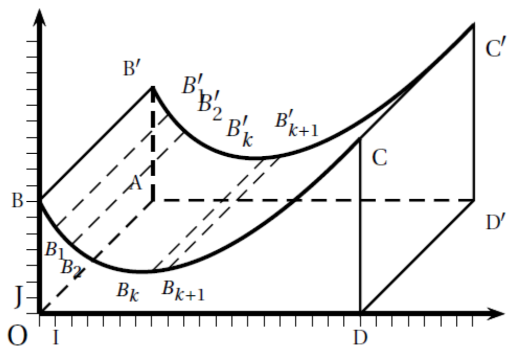
Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k\,;f(k))$ pour k variant de 0 à 20. Ainsi, B_0 = B.

On décide d'approcher l'arc de la courbeC allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$.

Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_kB_{k+1}B_k'B_{k+1}'$ (voir figure).



a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19, $B_kB_{k+1}=\sqrt{1+\left[f(k)-f(k+1)\right]^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S : réel K : entier
Fonction f	définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de . . . à . . . S prend pour valeur . . . . . . Fin Pour
Sortie	Afficher . . .