Antilles-Guyane

1. Exercice 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln x$.

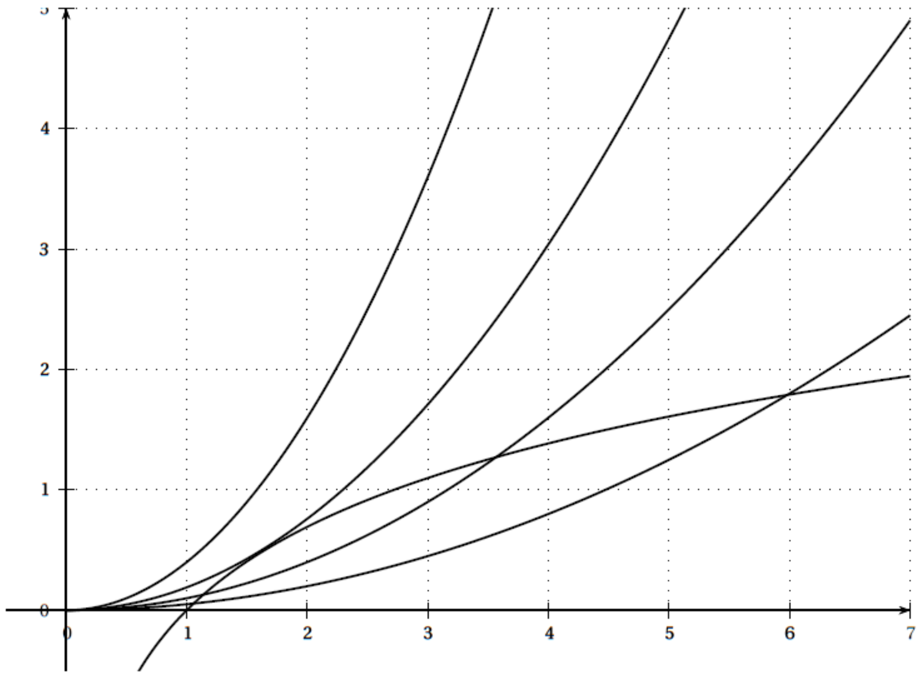
Pour tout réel a strictement positif, on définit sur $]0\,;+\infty[$ la fonction g_a par $g_a(x)=ax^2$.

On note C la courbe représentative de la fonction f et Γ_a celle de la fonction g_a dans un repère du plan.

Le but de l'exercice est d'étudier l'intersection des courbes C et Γ_a suivant les valeurs du réel strictement positif a.

Partie A

On a construit les courbes C, $\Gamma_{0,05}$, $\Gamma_{0,1}$, $\Gamma_{0,19}$ et $\Gamma_{0,4}$.



1. Nommer les différentes courbes sur le graphique. Aucune justification n'est demandée.

2. Utiliser le graphique pour émettre une conjecture sur le nombre de points d'intersection de C et Γ_a suivant les valeurs (à préciser) du réel a.

Partie B

Pour un réel a strictement positif, on considère la fonction h_a définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $h_a(x)=\ln x-ax^2$.

1. Justifier que x est l'abscisse d'un point M appartenant à l'intersection de C et Γ_a si et seulement si $h_a(x)=0$.

2. a. On admet que la fonction h_a est dérivable sur $]0\,;+\infty[$, et on note h'_a la dérivée de la fonction h_a sur cet intervalle. Le tableau de variation de la fonction h_a est donné ci-dessous.

Justifier, par le calcul, le signe de $h'_a(x)$ pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

x	0				$+\infty$
h'_a	||	$+$	0	$-$	
h_a	||	$-\infty$ ↗	$\frac{-1-\ln(2a)}{2}$	↘	

b. Rappeler la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$ $+\infty$. En déduire la limite de la fonction h_a en $+\infty$.

On ne demande pas de justifier la limite de h_a en 0.

3. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a = 0,1$.

a. Justifier que, dans l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{\sqrt{0,2}}\right[$, l'équation $h_{0,1}(x)=0$ admet une unique solution.

On admet que cette équation a aussi une seule solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{\sqrt{0,2}}\,;+\infty\right[$.

b. Quel est le nombre de points d'intersection de C et $\Gamma_{0,1}$?

4. Dans cette question et uniquement dans cette question, on suppose que $a=\frac{1}{2e}$.

a. Déterminer la valeur du maximum de $h_{\frac{1}{2e}}$.

b. En déduire le nombre de points d'intersection des courbes C et $\Gamma_{\frac{1}{2e}}$. Justifier.

5. Quelles sont les valeurs de a pour lesquelles C et Γ_a n'ont aucun point d'intersection ? Justifier.

2. Exercice 2 (5 points)

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B.

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

On rappelle que, pour tout réel a strictement positif, $\mathbb{P}(X \le a)=\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}dt$.

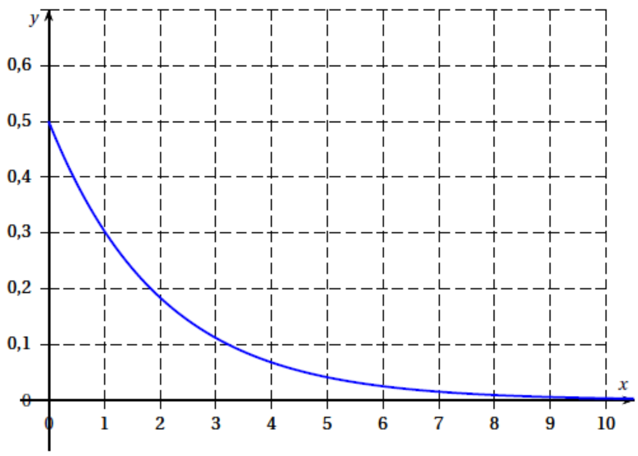
On se propose de calculer l'espérance mathématique de X, notée $\mathbb{E}(X)$, et définie par $\mathbb{E}(X)=\lim_{x\to\infty}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}dt$.

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(t)=-\left(t+\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(t)=\lambda t e^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que $\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}\left(-\lambda x e^{-\lambda x}-e^{-\lambda x}+1\right)$.

2. En déduire que $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.



Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

La courbe de la fonction densité associée est représentée ci-dessous.

1. Sur le graphique :

a. Représenter la probabilité $\mathbb{P}(X \leq 1)$.

b. Indiquer où se lit directement la valeur de ¸ .

2. On suppose que $\mathbb{E}(X)=2$.

a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?

b. Calculer la valeur de λ.

c. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.

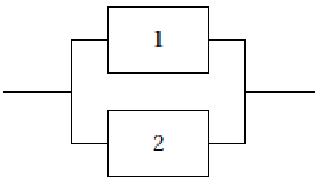
d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années ? On donnera la valeur exacte.

Partie C

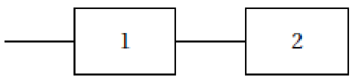
Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux événements D_1 et D_2 sont indépendants et que $\mathbb{P}(D_1)=\mathbb{P}(D_2)=0{,}39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



Circuit en parallèle A



Circuit en série B

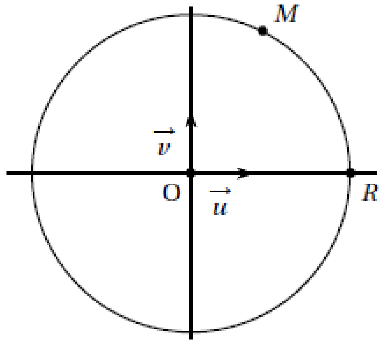
1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants enmême temps.

Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.

2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.

3. Exercice 3 (4 points)

Partie A



On appelle $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on a placé un point M d'affixe z appartenant à $\mathbb{C}$, puis le point R intersection du cercle de centre O passant par M et du demi-axe $\left[O\,;\vec{u}\right)$.

1. Exprimer l'affixe du point R en fonction de z.

2. Soit le point M' d'affixe z' définie par $z'=\frac{1}{2}\left(\frac{z+|z|}{2}\right)$. Reproduire la figure sur la copie et construire le point M'.

Partie B

On définit la suite de nombres complexes (z_n) par un premier terme z_0 appartenant à $\mathbb{C}$ et, pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence : $z_{n+1}=\frac{z+|z|}{4}$.

Le but de cette partie est d'étudier si le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ dépend du choix de z_0.

1. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel négatif ?

2. Que peut-on dire du comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$ quand z_0 est un nombre réel positif ?

3. On suppose désormais que z_0 n'est pas un nombre réel.

a. Quelle conjecture peut-on faire sur le comportement à l'infini de la suite $(|z_n|)$?

b. Démontrer cette conjecture, puis conclure.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée	Demander la valeur de p
Traitement	Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0{,}5u + 0{,}5(k-1) - 1{,}5$ Fin de pour
Sortie	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par $u_{n+1}=0{,}5u_n+0{,}5n-1{,}5$.

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.

2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	–0,5	–0,75	–0,375

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.

Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

4. Soit v_n la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.

Démontrer que la suite v_n est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$.

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour deux entiers naturels non nuls a et b, on note $r(a, b)$ le reste dans la division euclidienne de a par b.

On considère l'algorithme suivant :

Variables	c est un entier naturel a et b sont des entiers naturels non nuls
Entrées	Demander a Demander b
Traitement	Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Tant que $c \neq 0$ Affecter à a le nombre b Affecter à b la valeur de c Affecter à c le nombre $r(a, b)$ Fin Tant que
Sortie	Afficher b

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 26$ et $b = 9$ en indiquant les valeurs de a, b et c à chaque étape.

2. Cet algorithme donne en sortie le PGCD des entiers naturels non nuls a et b.

Le modifier pour qu'il indique si deux entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux ou non.

Partie B

À chaque lettre de l'alphabet on associe grâce au tableau ci-dessous un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : on choisit deux entiers naturels p et q compris entre 0 et 25.

Étape 2 : à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier x correspondant dans le tableau ci-dessus.

Étape 3 : on calcule l'entier x' défini par les relations $x' \equiv px + q\,[26]$ et $0 \leq x \leq 25$.

Étape 4 : à l'entier x', on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Dans cette question, on choisit $p = 9$ et $q = 2$.

a. Démontrer que la lettre V est codée par la lettre J.

b. Citer le théorème qui permet d'affirmer l'existence de deux entiers relatifs u et v tels que $9u + 26v = 1$. Donner sans justifier un couple (u, v) qui convient.

c. Démontrer que $x' \equiv 9x + 2 \left[26\right]$ équivaut à $x \equiv 3x' + 20 \left[26\right]$.

d. Décoder la lettre R.

2. Dans cette question, on choisit $q = 2$ et p est inconnu. On sait que J est codé par D.

Déterminer la valeur de p (on admettra que p est unique).

3. Dans cette question, on choisit $p = 13$ et $q = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?