

ANNALES BACCALAURÉAT 2014

MATHÉMATIQUES TERMINALE S

ANNALES BACCALAURÉAT 2014 MATHÉMATIQUES TERMINALE S 1

1. Suites	1
2. Fonctions	11
3. Probabilités	24
4. Géométrie	33
5. Spécialité	41
6. Concours	53

1. Suites

1-1 : Pondichéry, juin 2014, Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4}$.

2. a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n .

c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n entier naturel R réel P réel strictement positif
Entrée	Demander la valeur de P
Traitement	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0 Tant que $R > P$ n prend la valeur $n + 1$ R prend la valeur $\frac{\sqrt{3}}{2} R$ Fin tant que
Sortie	Afficher n

a. Quelle est la valeur affichée par l'algorithme pour $P = 0,5$?

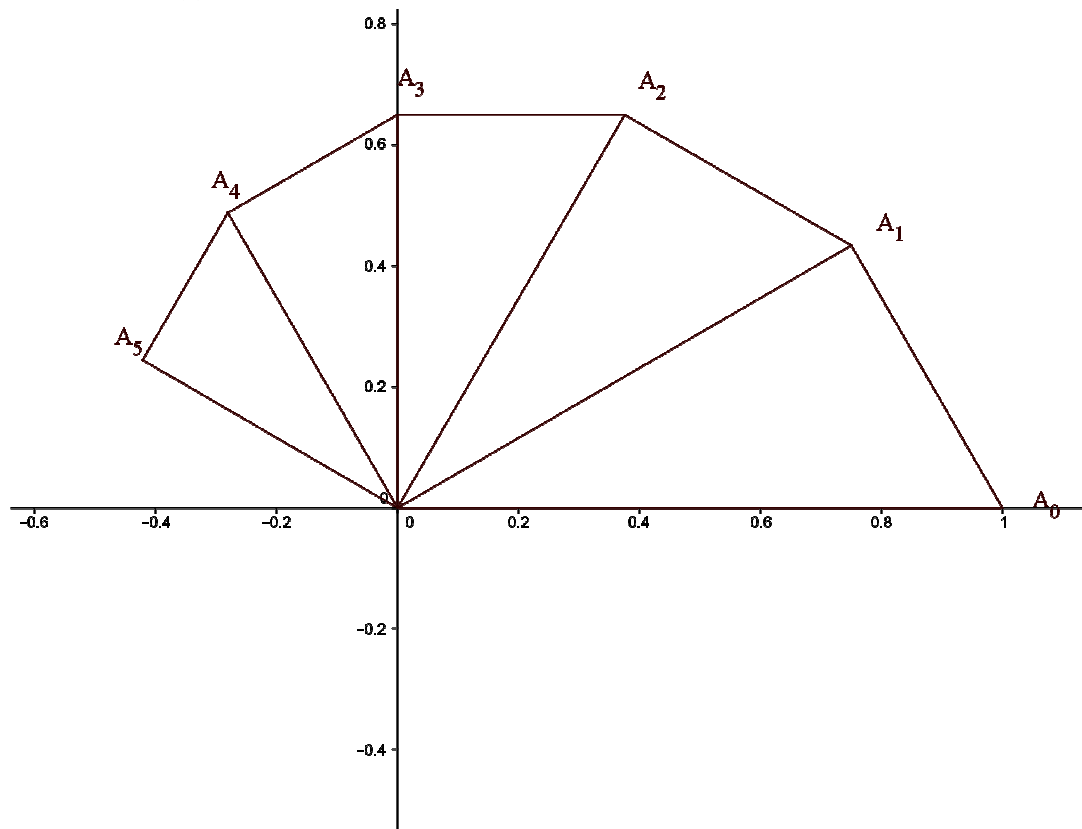
b. Pour $P = 0,01$ on obtient $n = 33$. Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. a. Démontrer que le triangle $OA_n A_{n+1}$ est rectangle en A_{n+1} .

b. On admet que $z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$.

Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c. Compléter la figure donnée ci-dessous, en représentant les points A_6 , A_7 , A_8 et A_9 . Les traits de construction seront apparents.



1-2 : Amérique du Nord, mai 2014, Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Un volume constant de 2 200 m³ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m³ d'eau et le bassin B contient 1 400 m³ d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes (...).

Variables	n est un entier naturel a est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	Tant que $a < 1100$, faire : Affecter à a la valeur . . . Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n , on note $u_n = a_n - 1320$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau. Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

1-3 : Antilles, juin 2014, Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier

naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$.

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n) .

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n > \frac{15}{4} \times 0,5^n$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite (u_n) .

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n) .

b. En déduire, que pour tout entier naturel n , $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée	n et u sont des nombres
Initialisation	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2

Traitement	Tant que ... (1) n prend la valeur ... (2) u prend la valeur ... (3) Fin Tant que
Sortie	Afficher n

1-4 : Asie, juin 2014, Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On note f_n la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$.

Pour tout entier $n > 1$, on définit le nombre I_n par : $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$.

1. Les représentations graphiques de certaines fonctions f_n obtenues à l'aide d'un logiciel sont tracées ci-contre.

En expliquant soigneusement votre démarche, conjecturer, pour la suite (I_n) l'existence et la valeur éventuelle de la limite, lorsque n tend vers $+\infty$.

2. Calculer la valeur exacte de I_1 .

3. a. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel $n > 1$, on a :

$$\frac{1}{1+x^n} \leq 1.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel $n > 1$, on a : $I_n \leq 1$.

4. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ et pour tout entier naturel $n > 1$, on a :

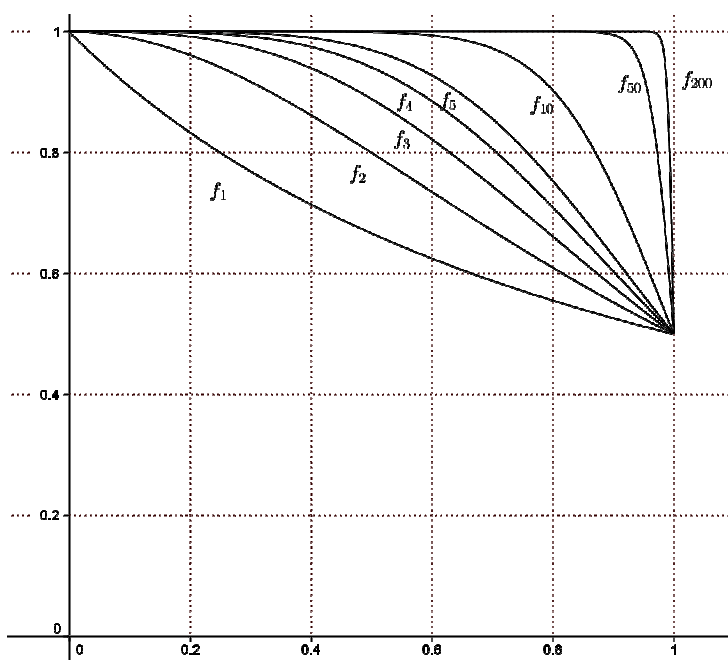
$$1-x^n \leq \frac{1}{1+x^n}.$$

5. Calculer l'intégrale $\int_0^1 1-x^n dx$.

6. À l'aide des questions précédentes, démontrer que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

7. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n, p et k sont des entiers naturels x et I sont des réels
Initialisation	I prend la valeur 0
Traitement	Demander un entier $n > 1$ Demander un entier $p > 1$ Pour k allant de 0 à $p-1$ faire : x prend la valeur $\frac{k}{p}$ I prend la valeur $I + \frac{1}{1+x^n} \times \frac{1}{p}$ Fin Pour Afficher I



a. Quelle valeur, arrondie au centième, renvoie cet algorithme si l'on entre les valeurs $n = 2$ et $p = 5$?

On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau suivant avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

Les valeurs de I seront arrondies au millième.

k	x	I
0		
4		

b. Expliquer pourquoi cet algorithme permet d'approcher l'intégrale I_n .

1-5 : Centres Etrangers, juin 2014, Exercice 2 (4 points)

On définit, pour tout entier naturel n , les nombres complexes z_n par :
$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$$
, pour tout entier naturel n .

On note r_n le module du nombre complexe z_n : $r_n = |z_n|$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine O , on considère les points A_n d'affixes z_n .

1. a. Calculer z_1 , z_2 et z_3 .

b. Placer les points A_1 et A_2 dans le plan.

c. Écrire le nombre complexe $\frac{1+i}{2}$ sous forme trigonométrique.

d. Démontrer que le triangle OA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 .

2. Démontrer que la suite (r_n) est géométrique, de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. La suite (r_n) est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note L_n la longueur de la ligne brisée qui relie le point A_0 au point A_n en passant successivement par les

points A_1, A_2, A_3 , etc. Ainsi $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$.

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel n : $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$.

b. Donner une expression de L_n en fonction de n .

c. Déterminer la limite éventuelle de la suite (L_n) .

1-6 : Polynésie, juin 2014, Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2 .

2. On considère les deux algorithmes suivants :

	Algorithme 1	Algorithme 2
Variables	n est un entier naturel u est un réel	n est un entier naturel u est un réel
Entrée	Saisir la valeur de n	Saisir la valeur de n
Traitement	u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n	u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$:

	u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	u prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie	Afficher u	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n , la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a , b et c tels que, pour tout entier naturel n , $u_n = an^2 + bn + c$.

Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a , b et c à l'aide des informations fournies.

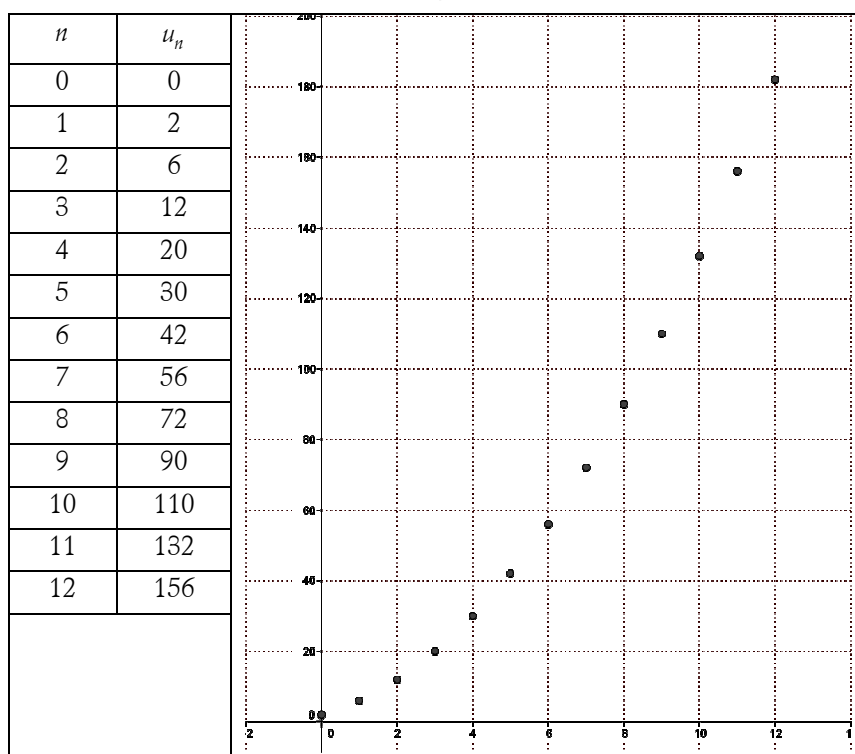
4. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = (n+1)(n+2)$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n .



1-7 : France sept 2014, Exercice 3 (5 points)

On administre à un patient un médicament par injection intraveineuse. La quantité de médicament dans le sang diminue en fonction du temps.

Le but de l'exercice est d'étudier pour différentes hypothèses, l'évolution de cette quantité minute par minute.

1. On effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament. On estime que 20% du médicament est éliminé par minute. Pour tout entier naturel n , on note u_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang au bout de n minutes. Ainsi $u_0 = 10$.

a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

b. Pour tout entier naturel n , donner l'expression de u_n en fonction de n .

c. Au bout de combien de temps la quantité de médicament restant dans le sang devient-elle inférieure à 1% de la quantité initiale ? Justifier la réponse.

2. Une machine effectue à l'instant 0 une injection de 10 mL de médicament.

On estime que 20% du médicament est éliminé par minute. Lorsque la quantité de médicament tombe en-dessous de 5mL, la machine réinjecte 4mL de produit.

Au bout de 15 minutes, on arrête la machine.

Pour tout entier naturel n , on note v_n la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang à la minute n .

L'algorithme suivant donne la quantité restante de médicament minute par minute.

Variables	n est un entier naturel. v est un nombre réel.
Initialisation	Affecter à v la valeur 10.
Traitement	Pour n allant de 1 à 15 Affecter à v la valeur $0,8 \times v$. Si $v < 5$ alors affecter à v la valeur $v + 4$ Afficher v . Fin de boucle.

a. Calculer les éléments manquants du tableau ci-dessous donnant, arrondie à 10^{-2} et pour n supérieur ou égal à 1, la quantité restante de médicament minute par minute obtenue avec l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
v_n	10	8	6,4					8,15	6,52	5,21	8,17	6,54	5,23	8,18	6,55	5,24

b. Au bout de 15 minutes, quelle quantité totale de médicament a été injectée dans l'organisme ?

c. On souhaite programmer la machine afin qu'elle injecte 2 mL de produit lorsque la quantité de médicament dans le sang est inférieure ou égale à 6mL et qu'elle s'arrête au bout de 30 minutes.

Recopier l'algorithme précédent en le modifiant pour qu'il affiche la quantité de médicament, en mL, restant dans le sang minute par minute avec ce nouveau protocole.

3. On programme la machine de façon que :

- à l'instant 0, elle injecte 10mL de médicament,
- toutes les minutes, elle injecte 1mL de médicament.

On estime que 20% du médicament présent dans le sang est éliminé par minute.

Pour tout entier naturel n , on note w_n la quantité de médicament, en mL, présente dans le sang du patient au bout de n minutes.

a. Justifier que pour tout entier naturel n , $w_{n+1} = 0,8w_n + 1$.

b. Pour tout entier naturel n , on pose $z_n = w_n - 5$.

Démontrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c. En déduire l'expression de w_n en fonction de n .

d. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? Quelle interprétation peut-on en donner ?

1-8 : Antilles - Guyane, sept 2014, Exercice 2 (6 points)

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0; +\infty[$.

On donne ci-dessous la courbe C_f représentative de la fonction f dans un repère du plan.

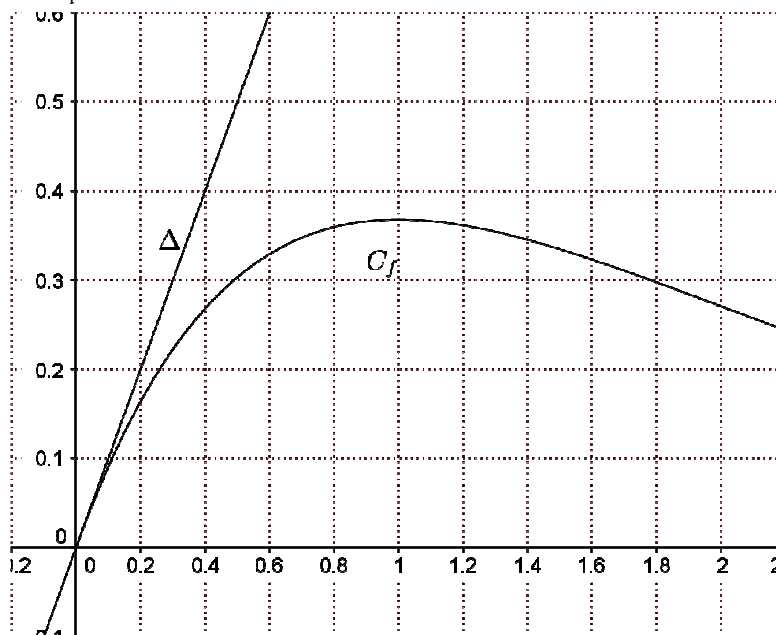
La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique, en utilisant la courbe C_f et la droite Δ , les points A_0 , A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 . Laisser les tracés explicatifs apparents.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. a. Montrer que la suite (u_n) est convergente.
b. On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $xe^{-x} = x$.

Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.



Partie C

On considère la suite (S_n) définie pour tout entier naturel n par $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Compléter l'algorithme suivant afin qu'il calcule S_{100} .

Déclaration des variables	S et u sont des nombres réels k est un nombre entier
Initialisation	u prend la valeur S prend la valeur
Traitement	Pour k variant de 1 à u prend la valeur $u \times e^{-u}$ S prend la valeur

	Fin Pour Afficher
--	--------------------------------

1-9 : Nelle Calédonie, mars 2014, exercice 3 (5 points)

Partie A

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$.

- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- On appelle f' la fonction dérivée de f sur $]0; +\infty[$. Montrer que $f'(x) = \ln(x) + 1$.
- Déterminer les variations de f sur $]0; +\infty[$.

Partie B

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Soit A l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$.

On utilise l'algorithme suivant pour calculer, par la méthode dite « des rectangles », une valeur approchée de l'aire A . (voir la figure ci-après).

Algorithme

Variables : k, n sont des entiers naturels ; U, V sont des nombres réels.

Initialisation :

U prend la valeur 0, V la valeur 0, n la valeur 4.

Traitement :

Pour k allant de 0 à $n - 1$:

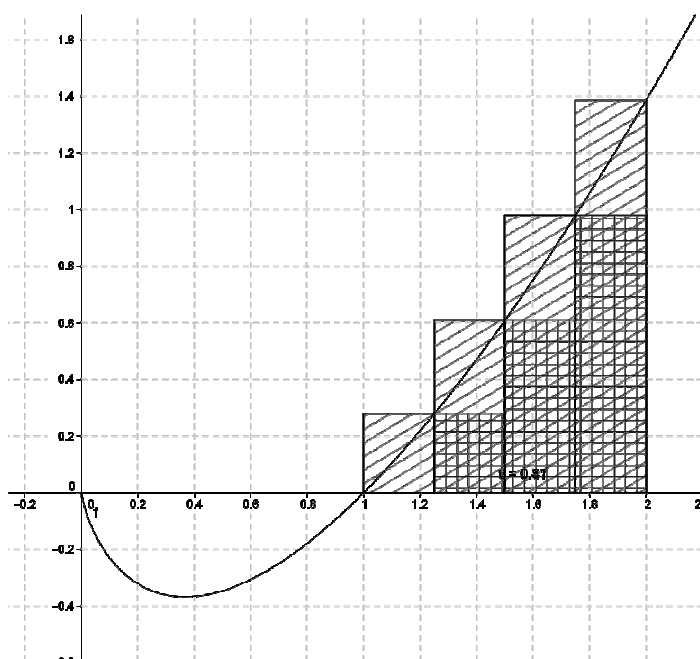
Affecter à U la valeur $U + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k}{n}\right)$

Affecter à V la valeur $V + \frac{1}{n} f\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$

Fin pour

Affichage :

Afficher U , Afficher V .



- Que représentent U et V sur le graphique précédent ?
 - Quelles sont les valeurs U et V affichées en sortie de l'algorithme (on donnera une valeur approchée de U par défaut à 10^{-4} près et une valeur approchée par excès de V à 10^{-4} près) ?
 - En déduire un encadrement de A .
- Soient les suites (U_n) et (V_n) définies pour tout entier n non nul par :

$$U_n = \frac{1}{n} \left[f\left(1\right) + f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) \right];$$

$$V_n = \frac{1}{n} \left[f\left(1 + \frac{1}{n}\right) + f\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(1 + \frac{n-1}{n}\right) + f(2) \right].$$

On admettra que, pour tout n entier naturel non nul, $U_n \leq A \leq V_n$.

- Trouver le plus petit entier n tel que $V_n - U_n < 0,1$.
- Comment modifier l'algorithme précédent pour qu'il permette d'obtenir un encadrement de A d'amplitude inférieure à $0,1$?

Partie C

Soit F la fonction dérivable, définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln(x) - \frac{x^2}{4}$.

1. Montrer que F est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer la valeur exacte de A .

1-10 : Amérique du Sud, nov. 2014, exercice 3 (5 points, non spécialistes)

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n^2 + 3u_n - \frac{3}{2}.$$

Partie A : Conjecture

1. Calculer les valeurs exactes, données en fractions irréductibles, de u_1 et u_2 .
2. Donner une valeur approchée à 10^{-5} près des termes u_3 et u_4 .
3. Conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) .

Partie B : Validation des conjectures

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n , par : $v_n = u_n - 3$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n^2$.
2. Démontrer par récurrence que ; pour tout entier naturel n , $-1 \leq v_n \leq 0$.
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = -v_n \left(\frac{1}{2}v_n + 1 \right)$.
b. En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .
4. Pourquoi peut-on alors affirmer que la suite (v_n) converge ?
5. On note L la limite de la suite (v_n) .

On admet que L appartient à l'intervalle $[-1; 0]$ et vérifie l'égalité : $L = -\frac{1}{2}L^2$.

Déterminer la valeur de L .

6. Les conjectures faites dans la partie A sont-elles validées ?

1-11 : Nouvelle-Calédonie, nov. 2014, exercice 4 (5 points, non spécialistes)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$.

On admettra que f est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé la courbe C représentative de f ainsi que la droite D d'équation $y = x$.

1. Démontrer que f est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$. On note α la solution.

On donnera la valeur exacte de α puis on en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

Sur la figure, en utilisant la courbe C et la droite D , placer les points M_0 , M_1 et M_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .

Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

4. a. Démontrer, par récurrence, que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$ où α est le réel défini dans la question 2.

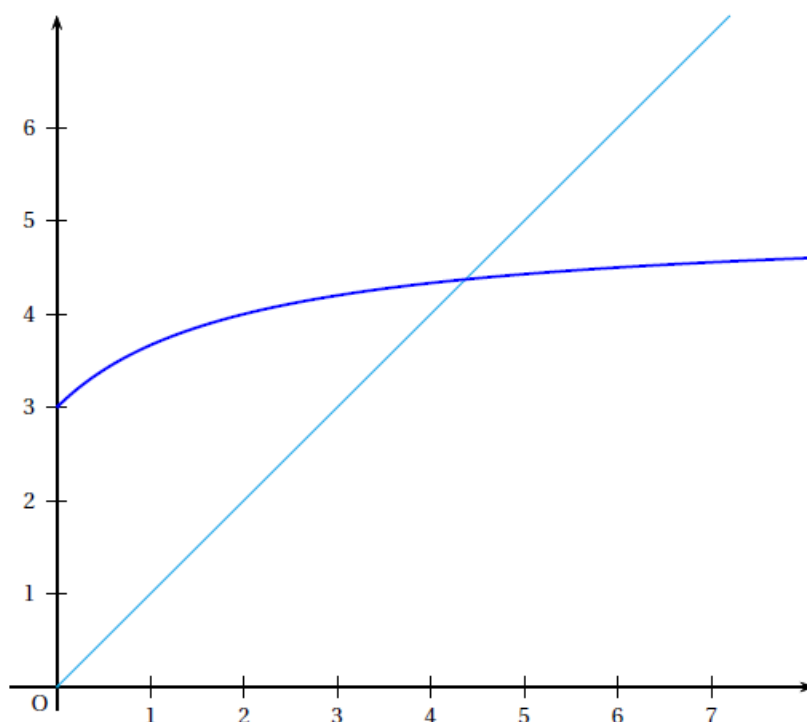
b. Peut-on affirmer que la suite (u_n) est convergente ? On justifiera la réponse.

5. Pour tout entier naturel n , on définit la suite (S_n) par $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

a. Calculer S_0 , S_1 et S_2 . Donner une valeur approchée des résultats à 10^{-2} près.

b. Compléter l'algorithme donné ci-dessous pour qu'il affiche la somme S_n pour la valeur de l'entier n demandée à l'utilisateur.

c. Montrer que la suite (S_n) diverge vers $+\infty$.



Entrée :	n un entier naturel.
Variables :	u et s sont des variables réelles, n et i sont des variables entières.
Initialisation :	u prend la valeur 1 s prend la valeur u i prend la valeur 0 demander la valeur de n .
Traitement :	Tant que . . . affecter à i la valeur $i + 1$ affecter à u la valeur . . . affecter à s la valeur . . . fin Tant que.
Sortie :	afficher s .

2. Fonctions

2-1 : Pondichéry, juin 2014, Exercice 2 (4 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Proposition 1

Toute suite positive croissante tend vers $+\infty$.

2. g est la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par $g(x) = 2x \ln(2x+1)$.

Proposition 2

Sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$, l'équation $g(x) = 2x$ a une unique solution : $\frac{e-1}{2}$.

Proposition 3

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est : $1 + \ln 4$.

3. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

P et R sont les plans d'équations respectives : $2x + 3y - z - 11 = 0$ et $x + y + 5z - 11 = 0$.

Proposition 4

Les plans P et R se coupent perpendiculairement.

2-2 : Pondichéry, juin 2014, Exercice 4 (7 points)

Partie A

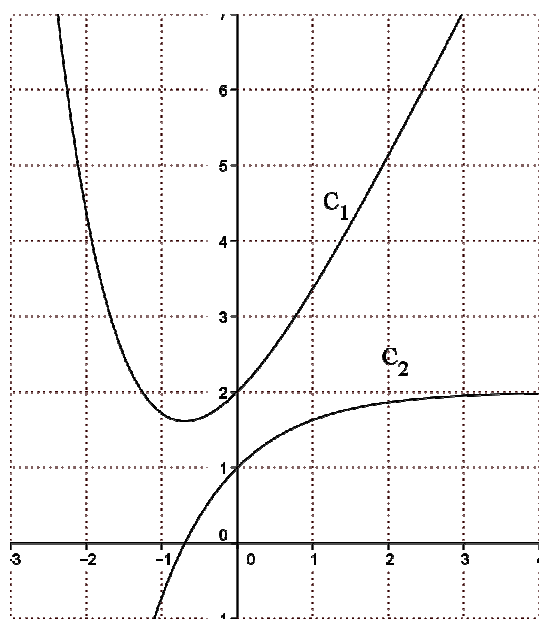
f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. f' est la fonction dérivée de la fonction f .

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on nomme C_1 la courbe représentative de la fonction f et C_2 la courbe représentative de la fonction f' .

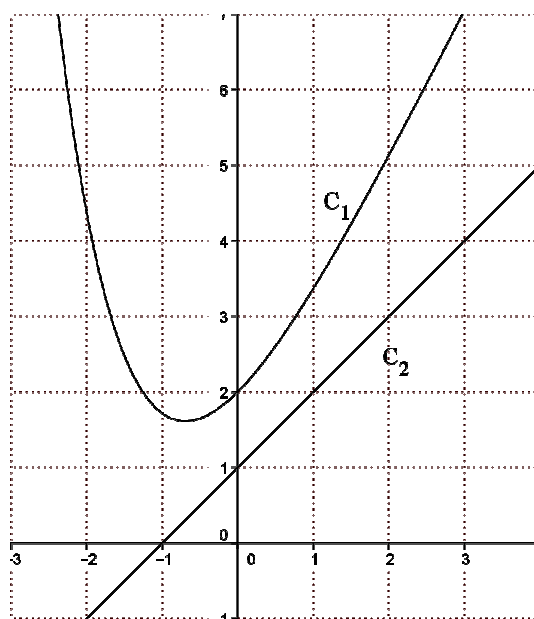
Le point A de coordonnées $(0; 2)$ appartient à la courbe C_1 .

Le point B de coordonnées $(0; 1)$ appartient à la courbe C_2 .

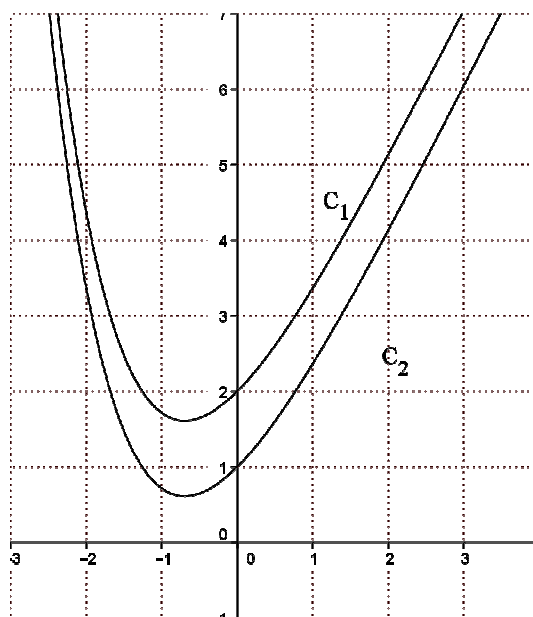
1. Dans les trois situations ci-dessous, on a dessiné la courbe représentative C_1 de la fonction f . Sur l'une d'entre elles, la courbe C_2 de la fonction dérivée f' est tracée convenablement. Laquelle ? Expliquer le choix effectué.



Situation 1



Situation 2



Situation 3

2. Déterminer l'équation réduite de la droite D tangente à la courbe C_1 en A.
3. On sait que pour tout réel x , $f(x) = e^{-x} + ax + b$ où a et b sont deux nombres réels.
 - a. Déterminer la valeur de b en utilisant les renseignements donnés par l'énoncé.
 - b. Prouver que $a = 2$.
4. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - (x + 2)$.

1. a. Montrer que la fonction g admet 0 comme minimum sur $\mathbb{R}$.
- b. En déduire la position de la courbe C_1 par rapport à la droite D.

La figure 2 ci-dessous représente le logo d'une entreprise. Pour dessiner ce logo, son créateur s'est servi de la courbe C_1 et de la droite D, comme l'indique la figure 3 ci-dessous. Afin d'estimer les coûts de peinture, il souhaite déterminer l'aire de la partie colorée en gris.

Le contour du logo est représenté par le trapèze DEFG où :

- D est le point de coordonnées $(-2 ; 0)$,
- E est le point de coordonnées $(2 ; 0)$,
- F est le point d'abscisse 2 de la courbe C_1 ,
- G est le point d'abscisse -2 de la courbe C_2 .

La partie du logo colorée en gris correspond à la surface située entre la droite D, la courbe C_1 , la droite d'équation $x = -2$ et la droite d'équation $x = 2$.

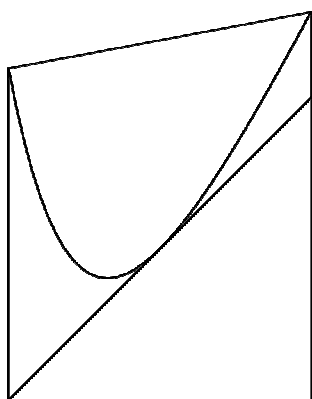


figure 2

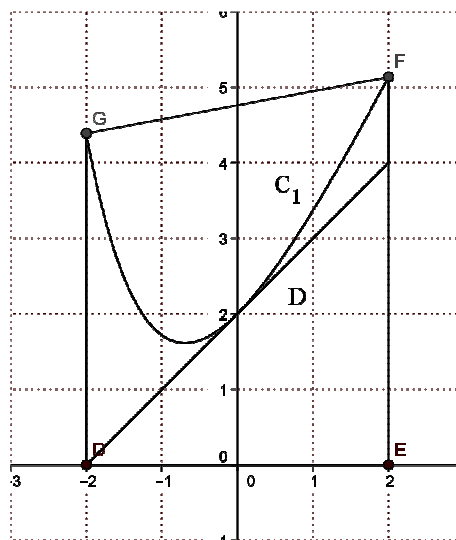


figure 3

2. Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du logo colorée en gris (on donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} du résultat).

2-3 : Amérique du Nord, mai 2014, Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$.

On note C_f la représentation graphique de la fonction f et D la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de C_f et D

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

- Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g(x) > 0$.
- La courbe C_f et la droite D ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe C_f , N le point d'abscisse x de la droite D et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN .

- Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.
- On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

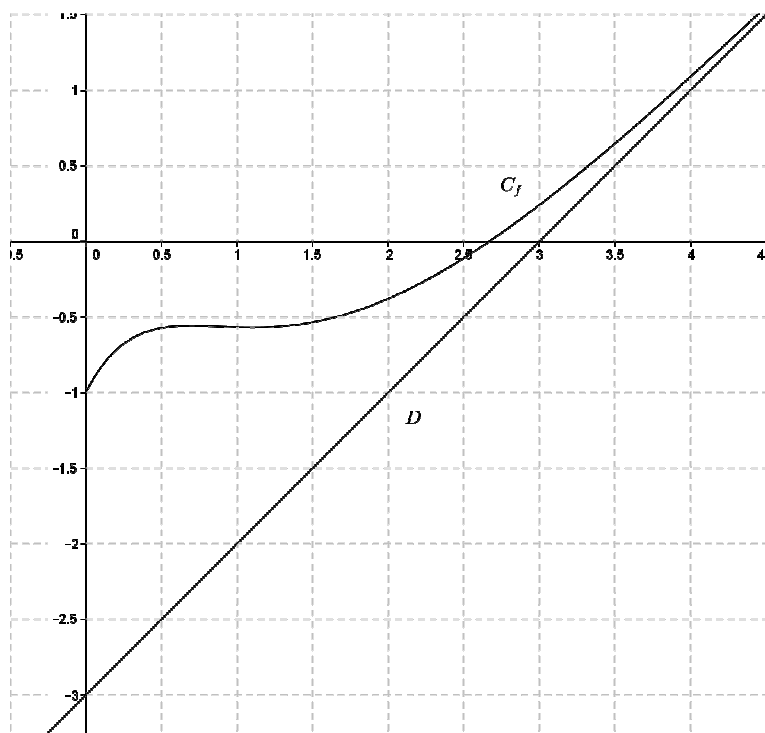
Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.

- Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0; +\infty[$ que l'on déterminera. En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

On considère la fonction A définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $A(x) = \int_0^x f(t) - (t - 3) dt$.

- Hachurer sur le graphique ci-dessous le domaine dont l'aire est donnée par $A(2)$.
- Justifier que la fonction A est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- Pour tout réel x strictement positif, calculer $A(x)$.
- Existe-t-il une valeur de x telle que $A(x) = 2$?



2-4 : Liban, mai 2014, Exercice 3 (5 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{-x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Partie A

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $f'(x)$. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ce résultat ?

Partie B

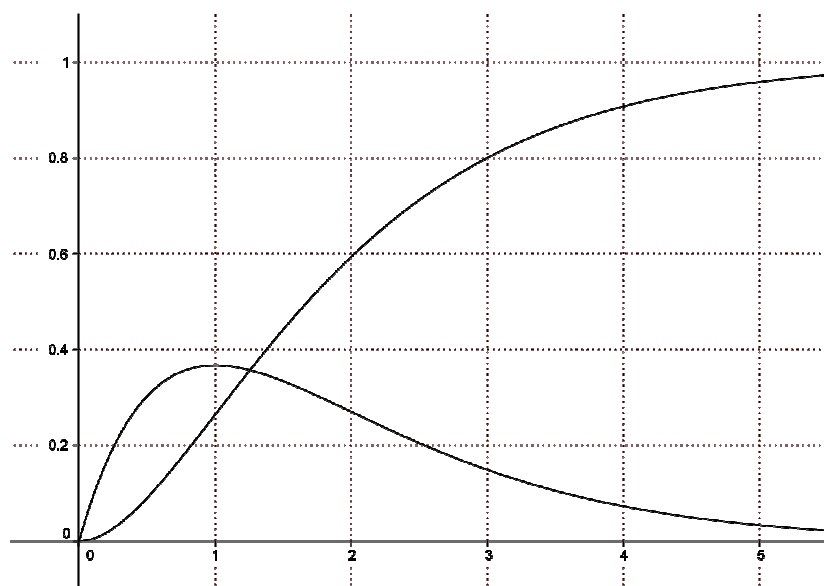
Soit A la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ de la façon suivante : pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, $A(t)$ est l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x = 0$ et $x = t$.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction A .

2. On admet que l'aire du domaine délimité par la courbe C et l'axe des abscisses est égale à 1 unité d'aire. Que peut-on en déduire pour la fonction A ?

3. On cherche à prouver l'existence d'un nombre réel α tel que la droite d'équation $x = \alpha$ partage le domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe C , en deux parties de même aire, et à trouver une valeur approchée de ce réel.

a. Démontrer que l'équation $A(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution sur l'intervalle $[0; +\infty[$.



b. Sur le graphique ci-dessus sont tracées la courbe C ainsi que la courbe Γ représentant la fonction A.

Sur le graphique, identifier les courbes C et Γ , puis tracer la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

En déduire une valeur approchée du réel α . Hachurer le domaine correspondant à $A(\alpha)$.

4. On définit la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = (x+1)e^{-x}$.

a. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$. Pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.

b. En déduire, pour tout réel t de l'intervalle $[0; +\infty[$, une expression de $A(t)$.

c. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près de $A(6)$.

2-5 : Antilles, juin 2014, Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$.

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues). En déduire le signe de $g(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6. a. Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite T.

Partie B

1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x - 1)e^{-x}$.

Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$.

2. On note D le domaine délimité par la courbe C , la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.

Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine D .

2-6 : Asie, juin 2014, Exercice 3 (5 points)

Une chaîne, suspendue entre deux points d'accroche de même hauteur peut être modélisée par la représentation graphique d'une fonction g définie sur $[-1; 1]$ par $g(x) = \frac{1}{2a}(e^{ax} + e^{-ax})$ où a est un paramètre réel strictement positif. On ne cherchera pas à étudier la fonction g .

On montre en sciences physiques que, pour que cette chaîne ait une tension minimale aux extrémités, il faut et il suffit que le réel a soit une solution strictement positive de l'équation $(x-1)e^{2x} - 1 - x = 0$.

Dans la suite, on définit sur $[0; +\infty[$ la fonction f par $f(x) = (x-1)e^{2x} - 1 - x$ pour tout réel $x > 0$.

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction f . Vérifier que $f'(0) = -2$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.

2. On note f'' la fonction dérivée de f' . Vérifier que, pour tout réel $x > 0$, $f'' = 4xe^{2x}$.

3. Montrer que, sur l'intervalle $[0; +\infty[$ la fonction f' s'annule pour une unique valeur, notée x_0 .

4. a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$, puis montrer que $f(x)$ est négatif pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; x_0]$.

b. Calculer $f(2)$.

En déduire que sur l'intervalle $[0; +\infty[$, la fonction f s'annule pour une unique valeur.

Si l'on note a cette valeur, déterminer à l'aide de la calculatrice la valeur de a arrondie au centième.

5. On admet sans démonstration que la longueur L de la chaîne est donnée par l'expression

$$L = \int_0^1 (e^{ax} + e^{-ax}) dx.$$

Calculer la longueur de la chaîne ayant une tension minimale aux extrémités, en prenant 1,2 comme valeur approchée du nombre a .

2-7 : Centres Etrangers, juin 2014, Exercice 3 (7 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel x de la façon suivante :

- $x = 0$ pour le blanc ;
- $x = 1$ pour le noir ;
- $x = 0,01$; $x = 0,02$ et ainsi de suite jusqu'à $x = 0,99$ par pas de 0,01 pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$;
- $f(1) = 1$;
- f est continue sur l'intervalle $[0; 1]$;
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

Une nuance codée x est dite assombrie par la fonction f si $f(x) > x$, et éclaircie, si $f(x) < x$.

Ainsi, si $f(x) = x^2$, un pixel de nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $0,2^2 = 0,04$. L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si $f(x) = \sqrt{x}$, la nuance codée 0,2 prendra la nuance codée $\sqrt{0,2} \approx 0,45$. L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

Partie A

1. On considère la fonction f_1 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$.

a. Démontrer que la fonction f_1 est une « fonction de retouche ».

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f_1(x) \leq x$, à l'aide du graphique donné ci-contre en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction f_2 définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f_2(x) = \ln[1 + (e-1)x]$.

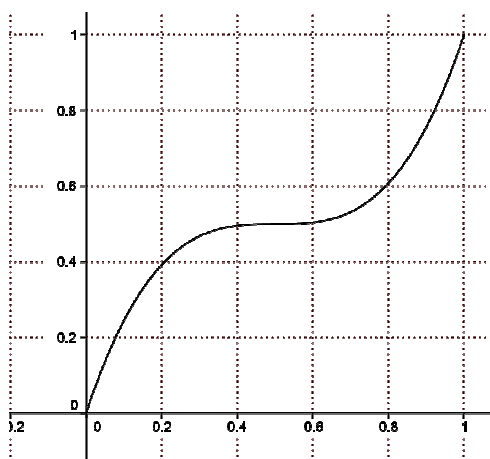
On admet que f_2 est une fonction de retouche. On définit sur l'intervalle $[0 ; 1]$ la fonction g par : $g(x) = f_2(x) - x$.

a. Établir que, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$: $g'(x) = \frac{(e-2) - (e-1)x}{1 + (e-1)x}$.

b. Déterminer les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0 ; 1]$. Démontrer que la fonction g admet un maximum en $\frac{e-2}{e-1}$ dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. Établir que l'équation $g(x) = 0,05$ admet sur l'intervalle $[0 ; 1]$ deux solutions α et β avec $\alpha < \beta$.

On admettra que : $0,08 < \alpha < 0,09$ et que : $0,85 < \beta < 0,86$.



Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous, f désigne une fonction de retouche.

Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables	x (nuance initiale) : réel ; y (nuance retouchée) : réel ; E (écart) : réel c (compteur) : entier ; k : entier
Initialisation	c prend la valeur 0
Traitement	Pour k allant de 0 à 100, faire x prend la valeur $\frac{k}{100}$

	y prend la valeur $f(x)$ E prend la valeur $ y - x $ Si $E > 0,05$, faire c prend la valeur $c + 1$ Fin si Fin pour
Sortie	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction f_2 définie dans la deuxième question de la partie A ?

Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche f dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $f(x) \leq x$.

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire A_f de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f , et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle ayant la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_1(x) = xe^{x^2-1} ; f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. a. Calculer A_{f_1} .

b. Calculer A_{f_2} .

2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

2-8 : Polynésie, juin 2014, Exercice 4 (5 points)

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$.

On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente T dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe C_g et de la droite T .

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.

a. Déterminer la limite de la fonction h en $-\infty$.

b. Justifier que, pour tout réel x , $h(x) = x \left(\frac{e^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \frac{2}{x} \right)$. En déduire la limite de la fonction h en $+\infty$.

c. On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Pour tout réel x , calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x .

d. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

e. En déduire que, pour tout réel x , $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 2$.

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g et de la droite T ?

3. Étude de la position relative des courbes C_f et C_g

a. Pour tout réel x , développer l'expression $\left(e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2$.

b. Déterminer la position relative des courbes C_f et C_g .

4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes C_f et C_g et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

2-9 : France Métropolitaine, juin 2014, Exercice 1 (5 points)

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C_1 la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x + e^{-x}$.

1. Justifier que C_1 passe par le point A de coordonnées $(0 ; 1)$.

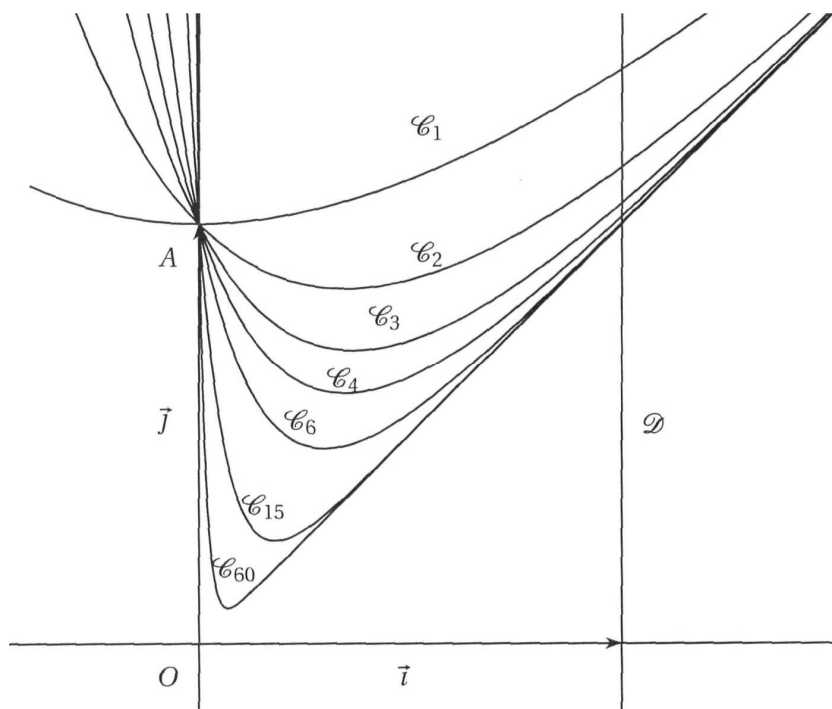
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1 . On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^1 (x + e^{-nx}) dx$.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, pour tout entier naturel n , on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + e^{-nx}$. Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe C_n pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite D d'équation $x = 1$.

a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n .



b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} (1 - e^x) dx$.

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

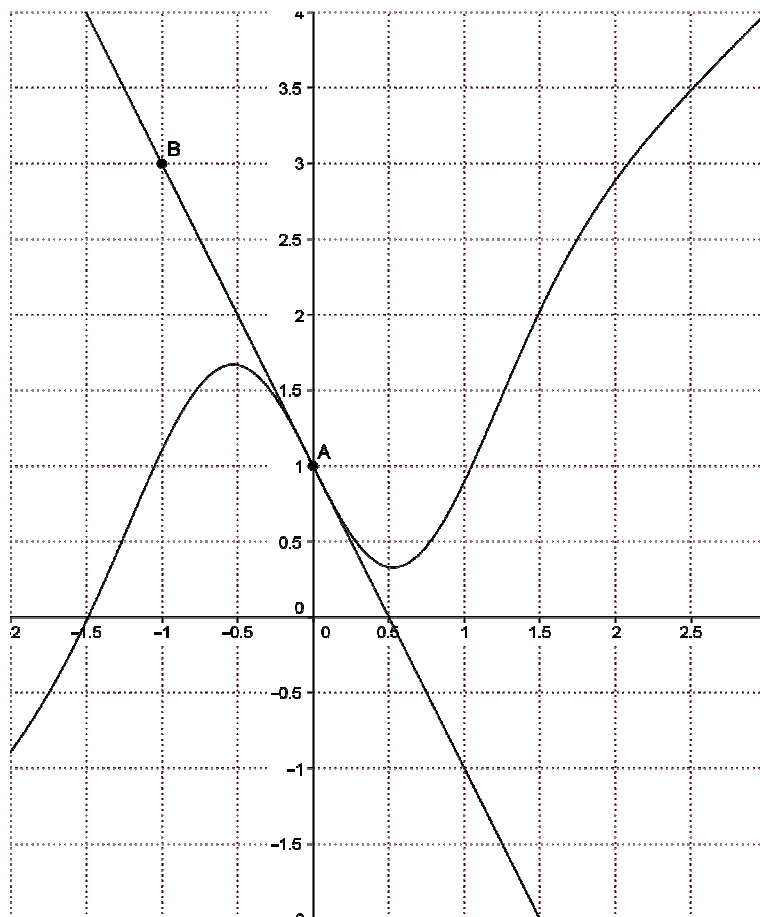
3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n) .

2-10 : France sept 2014, Exercice 1 (5 points)

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une courbe C et la droite (AB) où A et B sont les points de coordonnées respectives $(0; 1)$ et $(-1; 3)$.

On désigne par f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative est C.

On suppose, de plus, qu'il existe un réel a tel que pour tout réel x , $f(x) = x + 1 + axe^{-x^2}$.



1. a. Justifier que la courbe C passe par le point A.
- b. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
- c. Démontrer que pour tout réel x , $f'(x) = 1 - a(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.
- d. On suppose que la droite (AB) est tangente à la courbe C au point A. Déterminer la valeur du réel a .

2. D'après la question précédente, pour tout réel x ,

$$f(x) = x + 1 - 3xe^{-x^2} \text{ et } f'(x) = 1 + 3(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

- a. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-1; 0]$, $f(x) > 0$.
- b. Démontrer que pour tout réel x inférieur ou égal à -1 , $f'(x) > 0$.
- c. Démontrer qu'il existe un unique réel c de l'intervalle $\left[-\frac{3}{2}; -1\right]$ tel que $f(c) = 0$.

Justifier que $c < -\frac{3}{2} + 2 \cdot 10^{-2}$.

3. On désigne par A l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine défini par : $c \leq x \leq 0$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

- a. Écrire A sous la forme d'une intégrale.

b. On admet que l'intégrale $I = \int_{-\frac{3}{2}}^0 f(x) dx$ est une valeur approchée de A à 10^{-3} près.

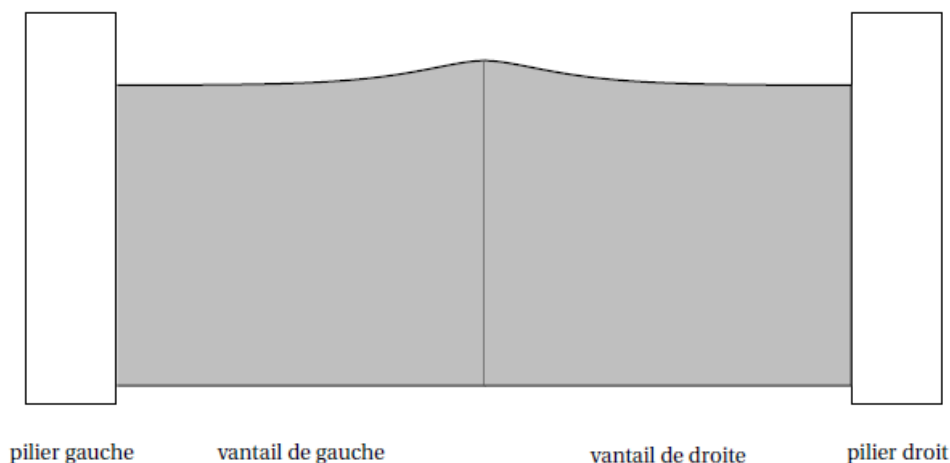
Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.

2-11 : Antilles - Guyane, sept 2014, Exercice 3 (3 points)

On considère l'équation $(E_1) : e^x - x^n = 0$ où x est un réel strictement positif et n un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation (E_1) est équivalente à l'équation $(E_2) : \ln x - \frac{x}{n} = 0$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de n l'équation (E_1) admet-elle deux solutions ?

2-12 : Amérique du Sud, nov. 2014, exercice 4 (5 points)



On désire réaliser un portail comme indiqué ci-dessus. Chaque vantail mesure 2 mètres de large.

Partie A : modélisation de la partie supérieure du portail

On modélise le bord supérieur du vantail de droite du portail avec une fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + b$ où b est un nombre réel. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.

1. a. Calculer $f'(x)$, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0 ; 2]$.
- b. En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 2]$.
2. Déterminer le nombre b pour que la hauteur maximale du portail soit égale à 1,5 m.

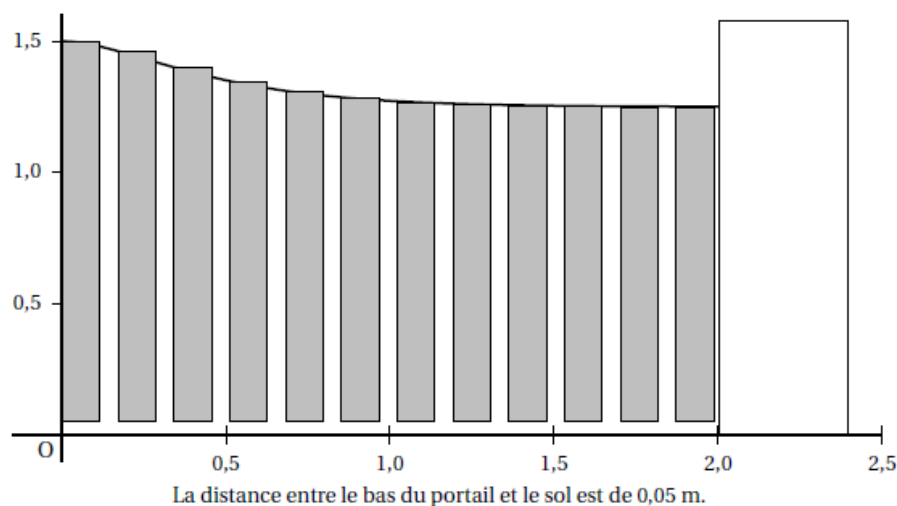
Dans la suite la fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4}$.

Partie B : détermination d'une aire

Chaque vantail est réalisé à l'aide d'une plaque métallique. On veut calculer l'aire de chacune des plaques, sachant que le bord inférieur du vantail est à 0,05 m de hauteur du sol.

1. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 2]$ par $F(x) = \left(-\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\right)e^{-4x} + \frac{5}{4}x$ est une primitive de la fonction f .
2. En déduire l'aire en m^2 de chaque vantail. On donnera la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2} près de cette aire. (On s'intéresse ici à l'objet « vantail » sans faire référence à son environnement).

Partie C : utilisation d'un algorithme



On désire réaliser un portail de même forme mais à partir de planches rectangulaires disjointes de largeur 0,12 m, espacées de 0,05 m. Pour le vantail de droite, le coin supérieur gauche de chaque planche est situé sur le bord supérieur du vantail (voir la figure ci-dessus) et le bas de chaque planche à 0,05 m de hauteur. Les planches sont numérotées à partir de 0 : ainsi la première planche à gauche porte le numéro 0.

1. Donner l'aire de la planche numéro k .
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des aires des planches du vantail de droite.

Variables :	Les nombres X et S sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à S la valeur 0 Affecter à X la valeur 0
Traitement :	Tant que $X + 0,17 < \dots$ S prend la valeur $S + \dots$ X prend la valeur $X + 0,17$ Fin de Tant que
Affichage :	Afficher S

2-13 : Nouvelle-Calédonie, nov 2014, exercice 2 (5 points)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Dans les questions 1 et 2, le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels.

1. **Affirmation 1** : Le point d'affixe $(-1+i)^{10}$ est situé sur l'axe imaginaire.

2. **Affirmation 2** :

Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet une solution unique.

3. **Affirmation 3** : $\ln \sqrt{e^7} \frac{\ln e^9}{\ln e^2} = \frac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 2 - \ln 4}}$.

4. **Affirmation 4** : $\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x + 2} dx = -\ln\left(\frac{3}{5}\right)$.

5. **Affirmation 5** :

L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

3. Probabilités

3-1 : Pondichéry, juin 2014, Exercice 1 (4 points)

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , où λ est un réel strictement positif.

On sait que $\mathbb{P}(X \leq 2) = 0,15$. Déterminer la valeur exacte du réel λ .

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ .

2. a. Déterminer $\mathbb{P}(X \geq 3)$.

b. Montrer que pour tous réels positifs t et h , $\mathbb{P}_{\{X \geq t\}}(X \geq t+h) = \mathbb{P}(X \geq h)$.

c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?

d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.

3. Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3} près.

L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1%. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.

Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier (On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.)

3-2 : Amérique du Nord, mai 2014, Exercice 1 (5 points)

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.

On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.

2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X , sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.

On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\frac{X-50}{\sigma'}$.

a. Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z .

b. Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $\mathbb{P}(Z \leq u) = 0,06$.

c. En déduire la valeur attendue de σ' .

3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.

On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

a. On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.

b. Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème.

Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.

Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

3-3 : Liban, mai 2014, Exercice 1 (5 points)

Les trois parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendante. Les probabilités seront arrondies au dix millième.

Un élève doit se rendre à son lycée chaque matin pour 8 h 00. Pour cela, il utilise, selon les jours, deux moyens de transport : le vélo ou le bus.

Partie A

L'élève part tous les jours à 7 h 40 de son domicile et doit arriver à 8 h 00 à son lycée.

Il prend le vélo 7 jours sur 10 et le bus le reste du temps.

Les jours où il prend le vélo, il arrive à l'heure dans 99,4% des cas et lorsqu'il prend le bus, il arrive en retard dans 5% des cas.

On choisit une date au hasard en période scolaire et on note V l'évènement « L'élève se rend au lycée à vélo », B l'évènement « l'élève se rend au lycée en bus » et R l'évènement « L'élève arrive en retard au lycée ».

1. Traduire la situation par un arbre de probabilités.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement $V \cap R$.
3. Démontrer que la probabilité de l'évènement R est 0,0192.
4. Un jour donné, l'élève est arrivé en retard au lycée. Quelle est la probabilité qu'il s'y soit rendu en bus ?

Partie B : le vélo

On suppose dans cette partie que l'élève utilise le vélo pour se rendre à son lycée. Lorsqu'il utilise le vélo, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 17$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

1. Déterminer la probabilité que l'élève mette entre 15 et 20 minutes pour se rendre à son lycée.
2. Il part de son domicile à vélo à 7 h 40. Quelle est la probabilité qu'il soit en retard au lycée ?
3. L'élève part à vélo. Avant quelle heure doit-il partir pour arriver à l'heure au lycée avec une probabilité de 0,9 ? Arrondir le résultat à la minute près.

Partie C : le bus

Lorsque l'élève utilise le bus, on modélise son temps de parcours, exprimé en minutes, entre son domicile et son lycée par une variable aléatoire T' qui suit la loi normale d'espérance $\mu' = 15$ et d'écart-type σ' .

On sait que la probabilité qu'il mette plus de 20 minutes pour se rendre à son lycée en bus est de 0,05.

On note Z' la variable aléatoire égale à $\frac{T' - 15}{\sigma'}$.

1. Quelle loi la variable aléatoire Z' suit-elle ?
2. Déterminer une valeur approchée à 0,01 près de l'écart-type σ' de la variable aléatoire T' .

3-4 : Antilles, juin 2014, Exercice 1 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.

Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.

Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1. Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur.

On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.

On considère les événements suivants :

* J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,

* C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

- Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.
 - Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.
 - Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est 0,695.
 - Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?
2. La masse d'une huître peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.
- Donner la probabilité que l'huître prélevée dans la production de l'ostréiculteur ait une masse comprise entre 87 g et 89 g.
 - Donner $\mathbb{P}(X > 91)$.

Partie B

Cet ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considèrera comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise.

Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

- Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.

Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F .

- Que peut penser le restaurateur de l'affirmation de l'ostréiculteur ?

3-5 : Asie, juin 2014, Exercice 2 (6 points)

Le taux d'hématocrite est le pourcentage du volume de globules rouges par rapport au volume total du sang. On note X la variable aléatoire donnant le taux d'hématocrite d'un adulte choisi au hasard dans la population française. On admet que cette variable suit une loi normale de moyenne $\mu = 45,5$ et d'écart-type σ .

Partie A

On note Z la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

- Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?
 - Déterminer $\mathbb{P}(X \leq \mu)$.
- En prenant $\sigma = 3,8$, déterminer $\mathbb{P}(37,9 \leq X \leq 53,1)$. Arrondir le résultat au centième.

Partie B

Une certaine maladie V est présente dans la population française avec la fréquence 1 %.

On sait d'autre part que 30 % de la population française a plus de 50 ans, et que 90 % des porteurs de la maladie V dans la population française ont plus de 50 ans.

On choisit au hasard un individu dans la population française.

On note α l'unique réel tel que $\mathbb{P}(X \leq \alpha) = 0,995$ où X est la variable aléatoire définie au début de l'exercice. On ne cherchera pas à calculer α .

On définit les événements :

M : « l'individu est porteur de la maladie V » ;

S : « l'individu a plus de 50 ans » ;

H : « l'individu a un taux d'hématocrite supérieur à α ».

Ainsi $\mathbb{P}(M) = 0,01$, $\mathbb{P}_M(S) = 0,9$ et $\mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(X > \alpha)$.

D'autre part, une étude statistique a révélé que 60 % des individus ayant un taux d'hématocrite supérieur à α sont porteurs de la maladie V.

1. a. Déterminer $\mathbb{P}(M \cap S)$.

b. On choisit au hasard un individu ayant plus de 50 ans. Montrer que la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V est égale à 0,03.

2. a. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(H)$.

b. L'individu choisi au hasard a un taux d'hématocrite inférieur ou égal à α . Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie V. Arrondir au millièème.

Partie C

Le but de cette partie est d'étudier l'influence d'un gène sur la maladie V.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de la maladie V dans des échantillons de taille 1 000, prélevés au hasard et avec remise dans l'ensemble de la population française. On arrondira les bornes de l'intervalle au millièème.

2. Dans un échantillon aléatoire de 1 000 personnes possédant le gène, on a trouvé 14 personnes porteuses de la maladie V.

Au regard de ce résultat, peut-on décider, au seuil de 95%, que le gène a une influence sur la maladie ?

3-6 : Centres Etrangers, juin 2014, Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes. Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1

Dans un hypermarché, 75% des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millièème :

a. 0,750	b. 0,150	c. 0,462	d. 0,700
----------	----------	----------	----------

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millièème :

a. 0,900	b. 0,092	c. 0,002	d. 0,267
----------	----------	----------	----------

Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . La durée de vie moyenne d'un

téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par : $\lambda = \frac{1}{8}$.

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millièème :

a. 0,750	b. 0,250	c. 0,472	d. 0,528
----------	----------	----------	----------

Question 4

Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 200 g. La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à 0,954.

La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième :

a. 0,16	b. 0,32	c. 0,84	d. 0,48
---------	---------	---------	---------

3-7 : Polynésie, juin 2014, Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.

Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.

Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.

Affirmation 1 : « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B .

Affirmation 2 : « Si A et B sont indépendants, alors A et $\bar{B}$ sont aussi indépendants. »

3. On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,7.

Affirmation 3 : « La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est 0,7 environ. »

Affirmation 4 : « Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes. »

4. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+.

On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.

On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.

Affirmation 5 : « On ne peut pas rejeter, au seuil de 5%, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39% comme dans l'ensemble de la population. »

3-8 : France Métropolitaine, juin 2014, Exercice 2 (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'événement « la personne choisie est malade » et T l'événement « le test est positif ».

a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité $\mathbb{P}(T)$ de l'événement T est égale à $1,989 \times 10^{-3}$.

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population. À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaîne de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

a. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2} .

b. Déterminer l'entier positif h tel que $\mathbb{P}(900 - h \leq X \leq 900 + h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

2. La chaîne de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.

Le contrôle effectué a permis de dénombrier 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.

Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

3-9 : France sept 2014, Exercice 2 (5 points)

Dans cet exercice, on s'intéresse au mode de fonctionnement de deux restaurants : sans réservation ou avec réservation préalable.

1. Le premier restaurant fonctionne sans réservation mais le temps d'attente pour obtenir une table est souvent un problème pour les clients.

On modélise ce temps d'attente en minutes par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que l'espérance mathématique de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

Une étude statistique a permis d'observer que le temps moyen d'attente pour obtenir une table est de 10 minutes.

a. Déterminer la valeur de λ .

b. Quelle est la probabilité qu'un client attende entre 10 et 20 minutes pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4} .

c. Un client attend depuis 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'il doive attendre au moins 5 minutes de plus pour obtenir une table ? On arrondira à 10^{-4} .

2. Le deuxième restaurant a une capacité d'accueil de 70 places et ne sert que des personnes ayant réservé au préalable. La probabilité qu'une personne ayant réservé se présente au restaurant est estimée à 0,8.

On note n le nombre de réservations prises par le restaurant et Y la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes ayant réservé qui se présentent au restaurant.

On admet que les comportements des personnes ayant réservé sont indépendants les uns des autres. La variable aléatoire Y suit alors une loi binomiale.

a. Préciser, en fonction de n , les paramètres de la loi de la variable aléatoire Y , son espérance mathématique $\mathbb{E}(Y)$ et son écart-type $\sigma(Y)$.

b. Dans cette question, on désigne par Z une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 64,8$ et d'écart-type $\sigma = 3,6$.

Calculer la probabilité p_1 de l'évènement $\{Z \leq 70\}$ à l'aide de la calculatrice.

c. On admet que lorsque $n = 81$, p_1 est une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité $\mathbb{P}(Y \leq 70)$ de l'évènement $\{Y \leq 70\}$.

Le restaurant a reçu 81 réservations. Quelle est la probabilité qu'il ne puisse pas accueillir certains des clients qui ont réservé et se présentent ?

3-10 : Antilles - Guyane, sept 2014, Exercice 1 (6 points)

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur.

D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que

96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;

97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;

A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,8763.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée D , suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. On sait que $\mathbb{P}(D \leq 4) = 0,5$. Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.

Calculer la valeur exacte de λ .

2. On prendra ici $\lambda = 0,1733$.

Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa soeur qui vient de naître.

Calculer la probabilité pour que sa soeur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté J , où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres μ et σ . Il apparaît que $\mu = 358$ jours.

1. Soit $X = \frac{J - 358}{\sigma}$. Quelle est la loi suivie par X ?
2. On sait que $\mathbb{P}(J \leq 385) = 0,975$. Déterminer la valeur de σ arrondie à l'entier le plus proche.

3-11 : Nelle Calédonie, mars 2014, Exercice 2 (6 points)

Les parties A, B et C sont indépendantes

Partie A : Restitution organisée des connaissances

L'objectif de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors pour tout réel α appartenant à l'intervalle $]0 ; 1[$, il existe un unique réel strictement positif μ_α tel que $\mathbb{P}(-\mu_\alpha < X < \mu_\alpha) = 1 - \alpha$.

Soit f la fonction définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ par $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Soit H la fonction définie et dérivable sur $[0 ; +\infty[$ par $H(x) = \mathbb{P}(-x \leq X \leq x) = \int_{-x}^x f(t) dt$.

1. Que représente la fonction f pour la loi normale centrée réduite ?
2. Préciser $H(0)$ et la limite de $H(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. À l'aide de considérations graphiques, montrer que pour tout nombre réel positif x , $H(x) = 2 \int_0^x f(t) dt$.

4. En déduire que la dérivée H' de la fonction H sur $[0; +\infty[$ est la fonction $2f$ et dresser le tableau de variations de H sur $[0; +\infty[$.

5. Démontrer alors le théorème énoncé.

Partie B

Un laboratoire se fournit en pipettes auprès de deux entreprises, notées A et B.

60 % des pipettes viennent de l'entreprise A et 4,6 % des pipettes provenant de cette entreprise présentent un défaut.

Dans le stock total de pipettes du laboratoire, 5 % des pièces présentent un défaut. On choisit au hasard une pipette dans le stock du laboratoire et on note :

A l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise A » ;

B l'évènement : « La pipette est fournie par l'entreprise B » ;

D l'évènement : « La pipette a un défaut ».

1. La pipette choisie présente un défaut ; quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'entreprise A ?

2. Montrer que $\mathbb{P}(B \cap D) = 0,0224$.

3. Parmi les pipettes venant de l'entreprise B, quel pourcentage de pipettes présente un défaut ?

Partie C

Une pipette est dite *conforme* si sa contenance est comprise, au sens large, entre 98 millilitres (mL) et 102 mL.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque pipette prise au hasard dans le stock du laboratoire associe sa contenance (en millilitres).

On admet que X suit une loi normale de moyenne μ et écart type σ tels que $\mu = 100$ et $\sigma^2 = 1,0424$.

1. Quelle est alors la probabilité, à 10^{-4} près, pour qu'une pipette prise au hasard soit conforme ?

Pour la suite, on admet que la probabilité pour qu'une pipette soit non-conforme est $p = 0,05$.

2. On prélève dans le stock du laboratoire des échantillons de pipettes de taille n , où n est un entier naturel supérieur ou égal à 100. On suppose que le stock est assez important pour considérer ces tirages comme indépendants.

Soit Y_n la variable aléatoire qui à chaque échantillon de taille n associe le nombre de pipettes non-conformes de l'échantillon.

a. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y_n ?

b. Vérifier que $n > 30$, $np > 5$ et $n(1-p) > 5$.

c. Donner en fonction de n l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence des pipettes non-conformes dans un échantillon.

3-12 : Amérique du Sud, nov. 2014, exercice 1 (6 points)

Une entreprise est spécialisée dans la fabrication de ballons de football. Cette entreprise propose deux tailles de ballons :

- une petite taille,
- une taille standard.

Les trois parties suivantes sont indépendantes.

Partie A

Un ballon de football est conforme à la réglementation s'il respecte, suivant sa taille, deux conditions à la fois (sur sa masse et sur sa circonférence).

En particulier, un ballon de taille standard est conforme à la réglementation lorsque sa masse, exprimée en grammes, appartient à l'intervalle $[410; 450]$ et sa circonférence, exprimée en centimètres, appartient à l'intervalle $[68; 70]$.

1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise, associe sa masse en grammes.

On admet que X suit la loi normale d'espérance 430 et d'écart type 10.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $\mathbb{P}(410 \leq X \leq 6450)$.

2. On note Y la variable aléatoire qui, à chaque ballon de taille standard choisi au hasard dans l'entreprise associe sa circonférence en centimètres.

On admet que Y suit la loi normale d'espérance 69 et d'écart type σ .

Déterminer la valeur de σ , au centième près, sachant que 97 % des ballons de taille standard ont une circonférence conforme à la réglementation.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite, alors $\mathbb{P}(-\beta \leq Z \leq \beta) = 0,97$ pour $\beta \approx 2,17$.

Partie B

L'entreprise affirme que 98 % de ses ballons de taille standard sont conformes à la réglementation.

Un contrôle est alors réalisé sur un échantillon de 250 ballons de taille standard.

Il est constaté que 233 d'entre eux sont conformes à la réglementation.

Le résultat de ce contrôle remet-il en question l'affirmation de l'entreprise ? Justifier la réponse. (On pourra utiliser un intervalle de fluctuation.)

Partie C

L'entreprise produit 40 % de ballons de football de petite taille et 60 % de ballons de taille standard.

On admet que 2 % des ballons de petite taille et 5 % des ballons de taille standard ne sont pas conformes à la réglementation. On choisit un ballon au hasard dans l'entreprise.

On considère les événements :

A : « le ballon de football est de petite taille »,

B : « le ballon de football est de taille standard »,

C : « le ballon de football est conforme à la réglementation » et $\bar{C}$, l'évènement contraire de C.

1. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre de probabilité.

2. Calculer la probabilité que le ballon de football soit de petite taille et soit conforme à la réglementation.

3. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,962.

4. Le ballon de football choisi n'est pas conforme à la réglementation. Quelle est la probabilité que ce ballon soit de petite taille ? On arrondira le résultat à 10^{-3} .

3-13 : Nouvelle-Calédonie, nov. 2014, exercice 1 (5 points)

Les trois parties A, B et C sont indépendantes

Une fabrique de desserts glacés dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des cônes de glace.

Partie A

Les cônes de glace sont emballés individuellement puis conditionnés en lots de 2 000 pour la vente en gros.

On considère que la probabilité qu'un cône présente un défaut quelconque avant son conditionnement en gros est égale à 0,003.

On nomme X la variable aléatoire qui, à chaque lot de 2 000 cônes prélevés au hasard dans la production, associe le nombre de cônes défectueux présents dans ce lot.

On suppose que la production est suffisamment importante pour que les tirages puissent être supposés indépendants les uns des autres.

1. Quelle est la loi suivie par X ? Justifier la réponse et préciser les paramètres de cette loi.

2. Si un client reçoit un lot contenant au moins 12 cônes défectueux, l'entreprise procède alors à un échange de celui-ci.

Déterminer la probabilité qu'un lot ne soit pas échangé ; le résultat sera arrondi au millième.

Partie B

Chaque cône est rempli avec de la glace à la vanille.

On désigne par Y la variable aléatoire qui, à chaque cône, associe la masse (exprimée en grammes) de crème glacée qu'il contient.

On suppose que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(110, \sigma^2)$, d'espérance $\mu = 110$ et d'écart-type σ .

Une glace est considérée comme commercialisable lorsque la masse de crème glacée qu'elle contient appartient à l'intervalle $[104; 116]$.

Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre σ telle que la probabilité de l'évènement « la glace est commercialisable » soit égale à 0,98.

Partie C

Une étude réalisée en l'an 2000 a permis de montrer que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces était de 84 %.

En 2010, sur 900 personnes interrogées, 795 d'entre elles déclarent consommer des glaces.

Peut-on affirmer, au niveau de confiance de 95 % et à partir de l'étude de cet échantillon, que le pourcentage de Français consommant régulièrement des glaces est resté stable entre les années 2000 et 2010 ?

4. Géométrie

4-1 : Amérique du Nord, mai 2014, Exercice 3 (4 points)

On considère un cube ABCDEFGH donné ci-contre.

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et

P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L.

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.

On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.

b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

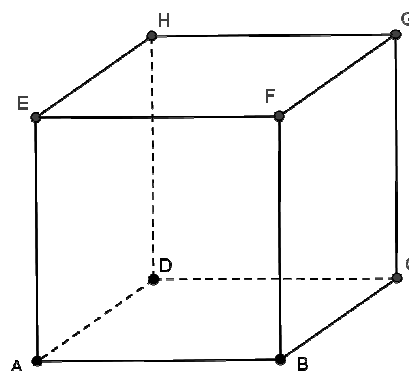
Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.

2. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On admet que le point T a pour coordonnées $\left(1; 1; \frac{5}{8}\right)$. Le triangle TPN est-il rectangle en T ?



4-2 : Liban, mai 2014, Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - i$ et pour tout entier naturel n :

$$z_{n+1} = (1+i)z_n.$$

Partie A

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0 .

- Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
- Pour tout entier naturel n , exprimer u_n en fonction de n .
- Déterminer la limite de la suite (u_n) .
- Étant donné un réel positif p , on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.

Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n .

Variables	u est un réel, p est un réel, n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 2 Demander la valeur de p
Traitement	???
Sortie	???

Partie B

- Déterminer la forme algébrique de z_1 .
- Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1+i$. En déduire la forme exponentielle de z_1 .
- Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

4-3 : Liban, mai 2014, Exercice 2 (5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère le plan P d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$ et la droite D dont une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

On donne les points A(1 ; 1 ; 0), B(3 ; 0 ; -1) et C(7 ; 1 ; -2).

Proposition 1 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = 5 - 2t' \\ y = -1 + t' \\ z = -2 + t' \end{cases}$ avec $t' \in \mathbb{R}$.

Proposition 2 : Les droites D et (AB) sont orthogonales.

Proposition 3 : Les droites D et (AB) sont coplanaires.

Proposition 4 : La droite D coupe le plan P au point E de coordonnées (8 ; -3 ; -4).

Proposition 5 : Les plans P et (ABC) sont parallèles.

4-4 : Antilles, juin 2014, Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(1 ; 2 ; 5)$, $B(-1 ; 6 ; 4)$, $C(7 ; -10 ; 8)$ et $D(-1 ; 3 ; 4)$.

1. Proposition 1 : Les points A, B et C définissent un plan.

2. On admet que les points A, B et D définissent un plan.

Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$.

3. Proposition 3 : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}t - 15 \\ y = -3t + 14, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{3}{2}t + 2 \end{cases}$$

4. Soit P le plan d'équation cartésienne $2x - y + 5z + 7 = 0$ et

P' le plan d'équation cartésienne $-3x - y + z + 5 = 0$.

Proposition 4 : Les plans P et P' sont parallèles.

4-5 : Asie, juin 2014, Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes. Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Dans l'espace, rapporté à un repère orthonormal, on considère les points

$A(1 ; -1 ; -1)$, $B(1 ; 1 ; 1)$, $C(0 ; 3 ; 1)$ et le plan P d'équation $2x + y - z + 5 = 0$.

Question 1

Soit D_1 la droite de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$ passant par A.

Une représentation paramétrique de la droite D_1 est :

a. $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - t \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + t \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -3 - 2t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 + 2t \end{cases}$ d. $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -2 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - 4t \end{cases}$

Question 2

Soit D_2 la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 - 2t \end{cases}$.

a. La droite D_2 et le plan P ne sont pas sécants

b. La droite D_2 est incluse dans le plan P.

c. La droite D_2 et le plan P se coupent au point $E\left(\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; \frac{10}{3}\right)$.

d. La droite D_2 et le plan P se coupent au point $F\left(\frac{4}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{22}{3}\right)$.

Question 3

a. L'intersection du plan P et du plan (ABC) est réduite à un point.

b. Le plan P et le plan (ABC) sont confondus.

c. Le plan P coupe le plan (ABC) selon une droite.

d. Le plan P et le plan (ABC) sont strictement parallèles.

Question 4

Une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondie au dixième de degré est égale à :

a. $22,2^\circ$

b. $0,4^\circ$

c. $67,8^\circ$

d. $1,2^\circ$

4-6 : Centres Etrangers, juin 2014, Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(1 ; 2 ; 7), B(2 ; 0 ; 2), C(3 ; 1 ; 3), D(3 ; -6 ; 1) \text{ et } E(4 ; -8 ; -4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit $\vec{u}(1 ; b ; c)$ un vecteur de l'espace, où b et c désignent deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs de b et c telles que $\vec{u}$ soit un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $x - 2y + z - 4 = 0$.

c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

3. On considère la droite Δ de l'espace dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \text{ où } t \text{ est un}$$

nombre réel.

a. La droite Δ est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

4-7 : Polynésie, juin 2014, Exercice 1 (5 points)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5 ; -5 ; 2), B(-1 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) \text{ et } D(6 ; 6 ; -1).$$

1. Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(-2 ; 3 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (BCD).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.

4. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite (d) et du plan (BCD).

5. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

6. Calculer les distances AB et AC.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle $\widehat{BAC}$.

4-8 : France Métropolitaine, juin 2014, Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Dans l'espace, on considère un tétraèdre ABCD dont les faces ABC, ACD et ABD sont des triangles rectangles et isocèles en A. On désigne par E, F et G les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], et [CA].

On choisit AB pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace.

1. On désigne par (P) le plan qui passe par A et qui est orthogonal à la droite (DF). On note H le point d'intersection du plan (P) et de la droite (DF).

a. Donner les coordonnées des points D et F.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (DF).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

d. Calculer les coordonnées du point H.

e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. On désigne par M un point de la droite (DF) et par t le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.

Le but de cette question est de déterminer la position du point M pour que α soit maximale.

a. Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.

b. Démontrer que le triangle MEG est isocèle en M . En déduire que $ME \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

d. Conclure.

4-9 : France Métropolitaine, juin 2014, Exercice 3 (5 points)

On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z .

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.

Calculer a^2 sous forme algébrique.

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\bar{z}$ défini par $\bar{z} = x - iy$. Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 , $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$.

- Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n , $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\bar{z}$ est également une solution de (E). En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) a au plus quatre solutions.

4-10 : France sept 2014, Exercice 4 (5 points, non spé)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le tétraèdre ABCD dont les sommets ont pour coordonnées : $A(1; -\sqrt{3}; 0)$, $B(1; \sqrt{3}; 0)$, $C(-2; 0; 0)$, $D(0; 0; 2\sqrt{2})$.

1. Démontrer que le plan (ABD) a pour équation cartésienne $4x + z\sqrt{2} = 4$.

2. On note Δ la droite dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t\sqrt{2} \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a. Démontrer que Δ est la droite parallèle à (CD) et passant par O.

b. Déterminer les coordonnées du point G, intersection de la droite Δ et du plan (ABD).

3. a. On note L le milieu du segment [AC].

Démontrer que la droite (BL) passe par le point O et est orthogonale à la droite (AC).

b. Prouver que le triangle ABC est équilatéral et déterminer le centre de son cercle circonscrit.

4. Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier c'est-à-dire un tétraèdre dont les six arêtes ont la même longueur.

4-11 : Antilles - Guyane, sept 2014, Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.

Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f .

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$. Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z .

Déterminer l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z vérifie $|f(z) - 8| = 3$.

Prouver que (F) est le cercle de centre $\Omega(-1; 0)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit z un nombre complexe, tel que $z = x + iy$ où x et y sont des nombres réels.

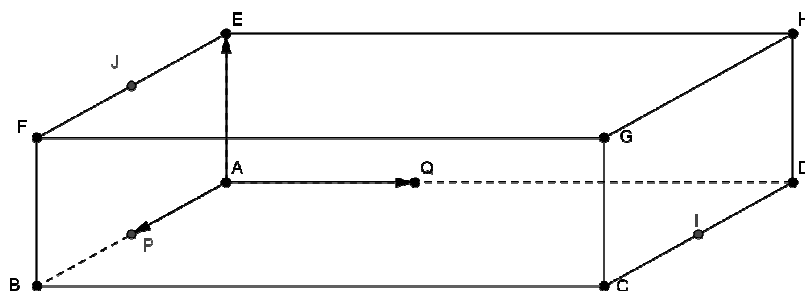
a. Montrer que la forme algébrique de $f(z)$ est $x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$.

b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe z est telle que $f(z)$ soit un nombre réel. Montrer que (E) est la réunion de deux droites D_1 et D_2 dont on précisera les équations.

Compléter le graphique en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

4-12 : Nelle Calédonie, mars 2014, Exercice 4 (5 points, non spécialistes)



Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que $AB = 2$, $AD = 3$ et $AE = 1$.

On appelle respectivement I, J et P les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[EF]$ et $[AB]$.

On note Q le point défini par $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

On appelle *plan médiateur* d'un segment le plan perpendiculaire à ce segment et passant par son milieu.

L'objectif de l'exercice est de déterminer les coordonnées du centre d'une sphère circonscrite au tétraèdre ABIJ (c'est-à-dire une sphère qui passe par les quatre points A, B, I, J).

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AE})$.

1. Justifier que les quatre points A, B, I et J ne sont pas coplanaires.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur (P_1) du segment $[AB]$.

3. Soit (P_2) le plan d'équation cartésienne $3y - z - 4 = 0$.

Montrer que le plan (P_2) est le plan médiateur du segment $[IJ]$.

4. a. Démontrer que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants.

b. Montrer que leur intersection est une droite (D) dont une représentation paramétrique est
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = 3t - 4 \end{cases}$$

où t décrit l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

c. Déterminer les coordonnées du point K de la droite (D) tel que $KA = KI$.

d. Montrer que le point K est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABIJ$.

4-13 : Nelle Calédonie, mars 2014, Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un QCM (questionnaire à choix multiple). Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte un point. Aucune justification n'est demandée. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe de la forme $x + iy$, où x et y sont des réels.

1. Soit z le nombre complexe d'affixe $(1+i)^4$. L'écriture exponentielle de z est :

a. $\sqrt{2}(e^{i\pi})$	b. $4e^{i\pi}$	c. $\sqrt{2}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$	d. $4\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$
-------------------------	----------------	--	---------------------------------------

2. L'ensemble des points M du plan d'affixe $z = x + iy$ tels que $|z - 1 + i| = |\sqrt{3} - i|$ a pour équation :

a. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 2$	b. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$	c. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$	d. $y = x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}$
----------------------------	----------------------------	----------------------------	-----------------------------------

3. On considère la suite de nombres complexes (Z_n) définie pour tout entier naturel n par $Z_0 = 1 + i$ et $Z_{n+1} = \frac{1+i}{2}Z_n$. On note M_n le point du plan d'affixe Z_n .

a. Pour tout entier naturel n , le point M_n appartient au cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

b. Pour tout entier naturel n , le triangle OM_nM_{n+1} est équilatéral.

c. La suite (U_n) définie par $U_n = |Z_n|$ est convergente.

d. Pour tout entier naturel n , un argument de $\frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_n}$ est $\frac{\pi}{2}$.

4. Soit A, B, C trois points du plan complexe d'affixes respectives : $Z_A = -1 - i$, $Z_B = 2 - 2i$ et $Z_C = 1 + 5i$.

On pose $Z = \frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A}$.

a. Z est un nombre réel.	b. Le triangle ABC est isocèle en A .	c. Le triangle ABC est rectangle en A .	d. Le point M d'affixe Z appartient à la médiatrice du segment $[BC]$.
----------------------------	---	---	---

4-14 : Amérique du Sud, nov. 2014, exercice 2 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est correcte. Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'enlève pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la proposition choisie.

1. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points $A(2; 5; -1)$, $B(3; 2; 1)$ et $C(1; 3; -2)$. Le triangle ABC est :

a. rectangle et non isocèle.	b. isocèle et non rectangle.
------------------------------	------------------------------

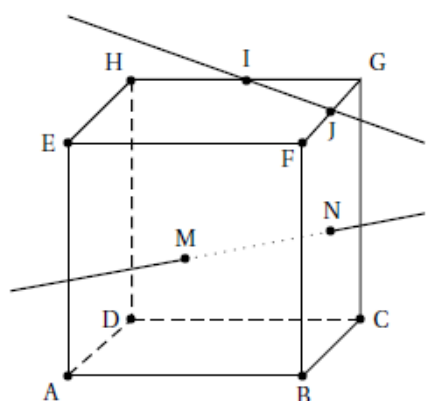
c. rectangle et isocèle.	d. équilatéral.
--------------------------	-----------------

2. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ et le point A(2 ; 5 ; -1). Une représentation paramétrique de la droite Δ , perpendiculaire au plan P et passant par A est :

a. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 5 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$	b. $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 - t \end{cases}$
c. $\begin{cases} x = 6 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 5 - 3t \end{cases}$	d. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 4 - t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

3. Soit A et B deux points distincts du plan. L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est :

a. l'ensemble vide.	b. la médiatrice du segment [AB].
c. le cercle de diamètre [AB]	d. la droite (AB)



4. La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.

Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes [GH] et [FG].

Les points M et N sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.

Les droites (IJ) et (MN) sont :

- perpendiculaires.
- sécantes, non perpendiculaires.
- orthogonales.
- parallèles.

4-15 : Nouvelle-Calédonie, nov. 2014, exercice 3 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A(1 ; 0 ; -1), B(1 ; 2 ; 3), C(-5 ; 5 ; 0) et D(11 ; 1 ; -2).

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments [AB] et [CD].

Le point K est défini par $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

- Déterminer les coordonnées des points I, J et K.
 - Démontrer que les points I, J et K définissent un plan.
 - Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (3 ; 1 ; 4) est un vecteur normal au plan (IJK).

En déduire une équation cartésienne de ce plan.

2. Soit P le plan d'équation $3x + y + 4z - 8 = 0$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BD).
- Démontrer que le plan P et la droite (BD) sont sécants et donner les coordonnées de L, point d'intersection du plan P et de la droite (BD).
- Le point L est-il le symétrique du point D par rapport au point B ?

5. Spécialité

5-1 : Pondichéry, avril 2014, Exercice 3 (5 points, spécialistes)

Chaque jeune parent utilise chaque mois une seule marque de petits pots pour bébé.

Trois marques X, Y et Z se partagent le marché. Soit n un entier naturel.

On note : X_n l'évènement « la marque X est utilisée le mois n »,

Y_n l'évènement « la marque Y est utilisée le mois n »,

Z_n l'évènement « la marque Z est utilisée le mois n ».

Les probabilités des évènements X_n , Y_n , Z_n sont notées respectivement x_n , y_n et z_n .

La campagne publicitaire de chaque marque fait évoluer la répartition.

Un acheteur de la marque X le mois n , a le mois suivant :

50% de chance de rester fidèle à cette marque,

40% de chance d'acheter la marque Y,

10% de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Y le mois n , a le mois suivant :

30% de chance de rester fidèle à cette marque,

50% de chance d'acheter la marque X,

20% de chance d'acheter la marque Z.

Un acheteur de la marque Z le mois n , a le mois suivant :

70% de chance de rester fidèle à cette marque,

10% de chance d'acheter la marque X,

20% de chance d'acheter la marque Y.

1. a. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n , y_n et z_n .

On admet que : $y_{n+1} = 0,4x_n + 0,3y_n + 0,2z_n$ et que $z_{n+1} = 0,1x_n + 0,2y_n + 0,7z_n$.

b. Exprimer z_n en fonction de x_n , y_n . En déduire l'expression de x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

2. On définit la suite (U_n) par $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n .

On admet que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où $A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$.

Au début de l'étude statistique (mois de janvier 2014 : $n = 0$), on estime que $U_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$.

On considère l'algorithme suivant :

Variables	n et i des entiers naturels A, B et U des matrices R réel P réel strictement positif
Entrée et initialisation	Demander la valeur de n i prend la valeur 0 A prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,4 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}$ B prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,2 \end{pmatrix}$ U prend la valeur $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,3 \end{pmatrix}$

Traitement	Tant que $i < n$ U prend la valeur $A \times U + B$ i prend la valeur $i + 1$ Fin de Tant que
Sortie	Afficher U

a. Donner les résultats affichés par cet algorithme pour $n = 1$ puis pour $n = 3$.

b. Quelle est la probabilité d'utiliser la marque X au mois d'avril 2014 ?

Dans la suite de l'exercice, on cherche à déterminer une expression de U_n en fonction de n .

On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - A$.

3. On désigne par C une matrice colonne à deux lignes.

a. Démontrer que $C = A \times C + B$ équivaut à $N \times C = B$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{45}{23} & \frac{20}{23} \\ \frac{10}{23} & \frac{30}{23} \end{pmatrix}$. En déduire que $C = \begin{pmatrix} \frac{17}{46} \\ \frac{7}{23} \end{pmatrix}$.

4. On note V_n la matrice telle que $V_n = U_n - C$ pour tout entier naturel n .

a. Montrer que, pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = A \times V_n$.

b. On admet que $U_n = A^n \times (U_0 - C) + C$.

Quelles sont les probabilités d'utiliser les marques X, Y et Z au mois de mai 2014 ?

5-2 : Amérique du Nord, mai 2014, Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Un volume constant de 2 200 m³ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 1 100 m³ d'eau et le bassin B contient 1 100 m³ d'eau ;
- tous les jours, 15% du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10% du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin A est transféré vers le bassin B et, pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m³ du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1100$ et $b_0 = 1100$.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n .

2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.

Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100,00	1100,00
3	1		

4	2	1187,50	1012,50
5	3	1215,63	984,38
6	4	1236,72	963,28
7	5	1252,54	947,46
8	6	1264,40	935,60
9	7	1273,30	926,10
10	8	1279,98	920,02
11	9	1234,98	915,02
12	10	1288,74	911,26
13	11	1291,55	908,45
14	12	1293,66	906,34
15	13	1295,25	904,75
16	14	1296,44	903,56
17	15	1297,33	902,67
18	16	1298,00	902,00
19	17	1298,50	901,50
20	18	1298,87	901,13

3. Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. On note $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$. Vérifier que $S = MS + R$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} - S = M(X_n - S)$.

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n , $X_n - S = M^n(X_0 - S)$ et que

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,75^n & 0,6 - 0,6 \times 0,75^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,75^n & 0,4 + 0,6 \times 0,75^n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0,75^n \\ 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}$.

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie $1300 - a_n < 1,5$ et $b_n - 900 < 1,5$.

Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.

5-3 : Liban, mai 2014, Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Un laboratoire étudie la propagation d'une maladie sur une population :

- * Un individu sain est un individu n'ayant jamais été touché par la maladie.
- * Un individu malade est un individu qui a été touché par la maladie et non guéri.
- * Un individu guéri est un individu qui a été touché par la maladie et qui a guéri.
- * Une fois guéri, un individu est immunisé et ne peut plus tomber malade.

Les premières observations nous montrent que, d'un jour au jour suivant :

- * 5% des individus tombent malades ;

* 20% des individus guérissent.

Pour tout entier naturel n , on note a_n la proportion d'individus sains n jours après le début de l'expérience, b_n la proportion d'individus malades n jours après le début de l'expérience, et c_n celle d'individus guéris n jours après le début de l'expérience.

On suppose qu'au début de l'expérience, tous les individus sont sains, c'est à dire que $a_0 = 1$ et, $b_0 = c_0 = 0$.

1. Calculer a_1 , b_1 et c_1 .

2. a. Quelle est la proportion d'individus sains qui restent sains d'un jour au jour suivant ?

En déduire a_{n+1} en fonction de a_n .

b. Exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n . On admet que $c_{n+1} = 0,2b_n + c_n$.

Pour tout entier naturel n , on définit $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0,05 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0,2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On admet qu'il existe une matrice inversible P telle que $D = P^{-1} \times A \times P$ et que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

3. a. Vérifier que, pour tout entier naturel n , $U_{n+1} = A \times U_n$. On admet que, pour tout entier naturel n , $U_n = A^n \times U_0$.

b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $D^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ 0 & 0,8^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0,95^n & 0 & 0 \\ \frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n) & 0,8^n & 0 \\ \frac{1}{3}(3 - 4 \times 0,95^n + 0,8^n) & 1 - 0,8^n & 1 \end{pmatrix}$.

4. a. Vérifier que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{3}(0,95^n - 0,8^n)$.

b) Déterminer la limite de la suite (b_n) .

c. On admet que la proportion d'individus malades croît pendant plusieurs jours, puis décroît.

On souhaite déterminer le pic épidémique, c'est à dire le moment où la proportion d'individus malades est à son maximum.

À cet effet, on utilise l'algorithme suivant, dans lequel on compare les termes successifs de la suite (b_n) .

Compléter l'algorithme de façon qu'il affiche le rang du jour où le pic épidémique est atteint et compléter le tableau fourni ci-dessous. Conclure.

Algorithme et tableau à compléter :

Variables	b, b', x, y sont des réels ; k est un entier naturel, n est un entier
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à b' la valeur 0,05 Affecter à k la valeur 0

	Affecter à x la valeur 0,95 Affecter à y la valeur 0,8
Traitement	Tant que $b < b'$ faire : Affecter à k la valeur $k + 1$ Affecter à b la valeur b' Affecter à x la valeur $0,95x$ Affecter à y la valeur $0,80y$ Affecter à b' la valeur Fin Tant que
Sortie	Afficher

	k	b	x	y	b'	Test : $b < b'$
Après le 7 ^e passage dans la boucle Tant que	7	1628	0,6634	0,1678	0,1652	Vrai
Après le 8 ^e passage éventuel dans la boucle Tant que						
Après le 9 ^e passage éventuel dans la boucle Tant que						

5-4 : Antilles, juin 2014, Exercice 4 (5 points, spécialistes)

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergement : l'hébergement A et l'hébergement B.

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.

Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

1. a. Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.
- b. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x ; y)$ possibles.

Entrée	x et y sont des nombres
Initialisation	
Traitement	Pour x variant de 0 . . . (1) Pour y variant de 0 . . . (2) Si . . . (3) Afficher x et y Fin Si Fin Pour Fin Pour

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.
 3. a. Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.
 - b. Déterminer une telle solution.
 - c. Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.
 4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.
- Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.
- Calculer ces nombres.

5-5 : Asie, juin 2014, Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Partie A

Le but de cette partie est de démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini en raisonnant par l'absurde.

1. On suppose qu'il existe un nombre fini de nombres premiers notés $p_1, p_2, \dots, p_n$.

On considère le nombre E produit de tous les nombres premiers augmenté de 1 : $E = p_1 \times p_2 \times \dots \times p_n + 1$.

Démontrer que E est un entier supérieur ou égal à 2, et que E est premier avec chacun des nombres $p_1, p_2, \dots, p_n$.

2. En utilisant le fait que E admet un diviseur premier conclure.

Partie B

Pour tout entier naturel $k > 2$, on pose $M_k = 2^k - 1$.

On dit que M_k est le k -ième nombre de Mersenne.

1. a. Reproduire et compléter le tableau suivant, qui donne quelques valeurs de M_k :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10
M_k	3								

b. D'après le tableau précédent, si k est un nombre premier, peut-on conjecturer que le nombre M_k est premier ?

2. Soient p et q deux entiers naturels non nuls.

a. Justifier l'égalité : $1 + 2^p + (2^p)^2 + \dots + (2^p)^{q-1} = \frac{2^{pq} - 1}{2^p - 1}$.

b. En déduire que $2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$.

c. En déduire que si un entier k supérieur ou égal à 2 n'est pas premier, alors M_k ne l'est pas non plus.

3. a. Prouver que le nombre de Mersenne M_{11} n'est pas premier.

b. Que peut-on en déduire concernant la conjecture de la question 1. b. ?

Partie C

Le test de Lucas-Lehmer permet de déterminer si un nombre de Mersenne donné est premier.

Ce test utilise la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n^2 - 2$.

Si n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, le test permet d'affirmer que le nombre M_n est premier si et seulement si $u_{n-2} \equiv 0 \pmod{M_n}$. Cette propriété est admise dans la suite.

1. Utiliser le test de Lucas-Lehmer pour vérifier que le nombre de Mersenne M_5 est premier.

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.

L'algorithme suivant, qui est incomplet, doit permettre de vérifier si le nombre de Mersenne M_n est premier, en utilisant le test de Lucas-Lehmer.

Variables	u, M, n et i sont des entiers naturels
Initialisation	u prend la valeur 4 Demander un entier $n > 3$
Traitement	M prend la valeur Pour i allant de 1 à ... faire u prend la valeur ... Fin Pour Si M divise u alors afficher « M » sinon afficher « M »

Recopier et compléter cet algorithme de façon à ce qu'il remplisse la condition voulue.

5-6 : Centres Etrangers, juin 2014, Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Partie A : préliminaires

1. a. Soient n et N deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que : $n^2 \equiv N - 1 \pmod{N}$.

Montrer que : $n \times n^3 \equiv 1 \pmod{N}$.

b. Dédurre de la question précédente un entier k_1 tel que : $5k_1 \equiv 1 \pmod{26}$.

On admettra que l'unique entier k tel que : $0 \leq k \leq 25$ et $5k \equiv 1 \pmod{26}$ vaut 21.

2. On donne les matrices : $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

a. Calculer la matrice $6A - A^2$.

b. En déduire que A est inversible et que sa matrice inverse, notée A^{-1} , peut s'écrire sous la forme $A^{-1} = \alpha I + \beta A$, où α et β sont deux réels que l'on déterminera.

c. Vérifier que : $B = 5A^{-1}$.

d. Démontrer que si $AX = Y$, alors $5X = BY$.

Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, où x_1 est l'entier représentant la première lettre du mot et x_2 l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que : $Y = AX$.
- La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$, où r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.
- Les entiers r_1 et r_2 donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) donne « YE » :

$$\text{OU} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{YE}.$$

Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que : $Y = AX$.

- Démontrer que : $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$.
- En utilisant la question 1. b. de la partie A, établir que : $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \pmod{26} \end{cases}$.
- Décoder le mot « QP ».

5-7 : Polynésie, juin 2014, Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12.

Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37.

Ajoutez les deux nombres obtenus.

Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare :

« Votre anniversaire tombe le 1^{er} août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1^{er} août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

2. a. Pour un spectateur donné, on note j le numéro de son jour de naissance, m celui de son mois de naissance et z le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).

Exprimer z en fonction de j et de m et démontrer que z et m sont congrus modulo 12.

b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul (programme B) : pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est j et le numéro du mois de naissance est m , le magicien demande de calculer le nombre z défini par $z = 12j + 31m$.

Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

1. Première méthode

On considère l'algorithme suivant :

	Algorithme
Variables	j et m sont des entiers naturels
Traitement	Pour m allant de 1 à 12 faire : Pour j allant de 1 à 31 faire : z prend la valeur $12j + 31m$ Afficher z Fin Pour Fin Pour

Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de j et de m telles que $12j + 31m = 503$.

2. Deuxième méthode

a. Démontrer que $7m$ et z ont le même reste dans la division euclidienne par 12.

b. Pour m variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de $7m$ par 12.

c. En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

3. Troisième méthode

a. Démontrer que le couple $(-2 ; 17)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$.

b. En déduire que si un couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ est solution de l'équation $12x + 31y = 503$, alors

$$12(x + 2) = 31(17 - y).$$

c. Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs $(x ; y)$, solutions de l'équation

$$12x + 31y = 503.$$

d. Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs $(x ; y)$ tel que $1 \leq y \leq 612$.

En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme (B).

5-8 : France Métropolitaine, juin 2014, Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A ;
- par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de n années. En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2 .

2. On désigne par A et B les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = AX_n + B$.

b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

c. Pour tout entier naturel n , on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n , $Y_{n+1} = AY_n$.

3. Pour tout entier naturel n , on pose $Z_n = Y_{2n}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = A^2 Z_n$.

En déduire que pour tout entier naturel n , $Z_{n+1} = 2Z_n$.

b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que $Y_{2n} = 2^n Y_0$ pour tout entier naturel n .

En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n , $a_{2n} = 600 \times 2^n - 400$ et $a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400$.

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant :

Variables	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation	Demander à l'utilisateur la valeur de p .
Traitement	Si p est pair Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$ Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$ Sinon Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$ Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$ Fin de Si
Sortie	Afficher a

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.

5-9 : France sept 2014, Exercice 4 (5 points, spé)

Dans le cadre d'une étude sur les interactions sociales entre des souris, des chercheurs enferment des souris de laboratoire dans une cage comportant deux compartiments A et B. La porte entre ces compartiments est ouverte pendant dix minutes tous les jours à midi.

On étudie la répartition des souris dans les deux compartiments. On estime que chaque jour :

- 20% des souris présentes dans le compartiment A avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment B après fermeture de la porte,
- 10% des souris qui étaient dans le compartiment B avant l'ouverture de la porte se trouvent dans le compartiment A après fermeture de la porte.

On suppose qu'au départ, les deux compartiments A et B contiennent le même effectif de souris.

On pose $a_0 = 0,5$ et $b_0 = 0,5$.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note a_n et b_n les proportions de souris présentes respectivement dans les compartiments A et B au bout de n jours, après fermeture de la porte. On désigne

par U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Soit n un entier naturel.

a. Justifier que $U_1 = \begin{pmatrix} 0,45 \\ 0,55 \end{pmatrix}$.

b. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n .

c. En déduire que $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice que l'on précisera.

On admet sans démonstration que $U_n = M^n U_0$.

d. Déterminer la répartition des souris dans les compartiments A et B au bout de 3 jours.

2. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer P^2 . En déduire que P est inversible et $P^{-1} = \frac{1}{3}P$.

b. Vérifier que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $M^n = PD^nP^{-1}$.

À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $M^n = \begin{pmatrix} \frac{1+2 \times 0,7^n}{3} & \frac{1-0,7^n}{3} \\ \frac{2-2 \times 0,7^n}{3} & \frac{2+0,7^n}{3} \end{pmatrix}$.

3. En s'aidant des questions précédentes, que peut-on dire de la répartition à long terme des souris dans les compartiments A et B de la cage ?

5-10 : Antilles - Guyane, sept 2014, Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.

D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement.

De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit n un entier naturel. On note x_n la quantité de fonds détenue par l'agence X et y_n la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1^{er} Janvier de l'année 2014 + n , exprimées en millions d'euros.

On note U_n la matrice $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et on note $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On suppose que le 1^{er} Janvier de l'année 2014, l'agence X détient 50 millions d'euros et l'agence Y détient 10 millions d'euros.

L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1} = A \times U_n + B, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B.

2. Donner la matrice U_0 puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.

3. On note $D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$.

a. Donner sans détailler le calcul, la matrice $P \times D \times Q$.

b. Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel $Q \times P$. Dans la suite, on admettra que $Q \times P = I$.

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul n , $A^n = P \times D^n \times Q$.

4. On pose pour tout entier naturel n , $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n , $V_{n+1} = A \times V_n$.

b. Déterminer V_0 puis pour tout entier naturel n , donner l'expression de V_n en fonction de A , n et V_0 .

5. Soit n un entier naturel. On admet que $A^n = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375(0,7^n - 0,3^n) \\ 0,375(0,7^n - 0,3^n) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}$.

a. Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice V_n en détaillant les calculs.

b. En déduire l'expression de x_n en fonction de n .

c. Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.

5-11 : Amérique du Sud, nov.2014, exercice 3 (5 points, spécialistes)

Une ville possède un réseau de vélos en libre service dont deux stations A et B se situent en haut d'une colline. On admet qu'aucun vélo des autres stations n'arrive en direction des stations A et B.

On constate pour chaque heure n qu'en moyenne :

* 20% des vélos présents à l'heure $n - 1$ à la station A sont toujours à cette station.

* 60% des vélos présents à l'heure $n - 1$ à la station A sont à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.

* 10% des vélos présents à l'heure $n - 1$ à la station B sont à la station A, 30 % sont toujours à la station B et les autres sont dans d'autres stations du réseau ou en circulation.

* Au début de la journée, la station A comporte 50 vélos, la station B 60 vélos.

Partie A

Au bout de n heures, on note a_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et b_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note U_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ et donc $U_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice M telle que $U_{n+1} = M \times U_n$.

2. Déterminer U_1 et U_2 .

3. Au bout de combien d'heures reste-t-il un seul vélo dans la station A ?

Partie B

Le service décide d'étudier les effets d'un approvisionnement des stations A et B consistant à apporter après chaque heure de fonctionnement 30 vélos à la station A et 10 vélos à la station B.

Afin de conduire cette étude, il décide de modéliser la situation présente de la manière suivante :

Au bout de n heures, on note α_n le nombre moyen de vélos présents à la station A et β_n le nombre moyen de vélos présents à la station B. On note V_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$ et $V_0 = \begin{pmatrix} 50 \\ 60 \end{pmatrix}$.

Dans ces conditions $V_{n+1} = M \times V_n + R$ avec $R = \begin{pmatrix} 30 \\ 10 \end{pmatrix}$.

1. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et N la matrice $I - M$.

a. On désigne par V une matrice colonne à deux lignes. Montrer que $V = M \times V + R$ équivaut à $N \times V = R$.

b. On admet que N est une matrice inversible et que $N^{-1} = \begin{pmatrix} 1,4 & 0,2 \\ 1,2 & 1,6 \end{pmatrix}$. En déduire que $V = \begin{pmatrix} 44 \\ 52 \end{pmatrix}$.

2. Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = V_n - V$.

a. Montrer que $W_{n+1} = M \times W_n$.

b. On admet que :

– pour tout entier naturel n , $W_n = M^n \times W_0$,

– pour tout entier naturel $n > 1$, $M^n = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{pmatrix} 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}$.

Calculer, pour tout entier naturel $n > 1$, V_n en fonction de n .

c. Le nombre moyen de vélos présents dans les stations A et B a-t-il tendance à se stabiliser ?

5-12 : Nouvelle-Calédonie, nov. 2014, exercice 4 (5 points, spécialistes)

On considère l'algorithme suivant, où A et B sont des entiers naturels tels que $A < B$:

Entrées :	A et B entiers naturels tels que $A < B$
Variables :	D est un entier. Les variables d'entrées A et B
Traitement :	Affecter à D la valeur de $B - A$ Tant que $D > 0$ B prend la valeur de A A prend la valeur de D Si $B > A$ alors D prend la valeur de $B - A$ sinon D prend la valeur de $A - B$ fin Si fin Tant que
Sortie :	Afficher A

1. On entre $A = 12$ et $B = 14$.

En remplissant le tableau donné ci-dessous, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

A	B	D
12	14	

2. Cet algorithme calcule la valeur du PGCD des nombres A et B .

En entrant $A = 221$ et $B = 331$, l'algorithme affiche la valeur 1.

a. Justifier qu'il existe des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) $221x - 331y = 1$.

b. Vérifier que le couple $(3 ; 2)$ est une solution de l'équation (E).

En déduire l'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

3. On considère les suites d'entiers naturels (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$u_n = 2 + 221n \text{ et } \begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = v_n + 331 \end{cases}$$

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n .

b. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(p ; q)$ tels que $up = vq$, $0 \leq p \leq 500$ et $0 \leq q \leq 500$.

6. Concours

6-1 : Concours Accès 2014

Cette épreuve est composée de trois parties de 6 questions chacune :

Partie 1 : raisonnement logique

Partie 2 : raisonnement mathématique

Partie 3 : problème mathématique

L'utilisation d'une calculatrice est strictement interdite pour cette épreuve.

Chaque question comporte quatre items, notées A. B. C. D.. Pour chaque item, vous devez signaler s'il est vrai ou faux.

Règle d'attribution des points : vous disposez d'un capital de points initial. Chaque erreur entraîne une pénalité (P) qui entame votre capital. Une absence de réponse entraîne une pénalité (p) qui entame aussi votre capital (p est inférieur à P). Enfin, un bonus est attribué si vous répondez correctement aux quatre items d'une même question.

Exercices n° 1 à 6 : Raisonnement logique

1. Dans un cinéma, on vend des glaces et des popcorns, les dimanches après-midi. La monnaie locale est l'UM.

Les glaces achetées 3 UM sont revendues 4 UM et les popcorns vendus 5 UM sont achetés 2,5 UM. Par beau temps, le cinéma vend 200 glaces et 150 popcorns. Par mauvais temps, l'affluence au cinéma est plus forte et l'on y vend 150 glaces et 250 popcorns.

Le samedi, le gérant achète ses produits en fonction des prévisions météorologiques du dimanche. Par exemple, si le beau temps est prévu, il achètera 200 glaces et 150 popcorns. Ses produits étant périssables, il ne pourra conserver les invendus pour le dimanche suivant.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Le gérant fait un bénéfice maximal lors d'une journée de mauvais temps qu'il avait anticipée.

B. Quel que soit le temps et sa prévision, le gérant aura toujours un bénéfice.

C. Le bénéfice minimal sera obtenu lorsque le gérant prévoira du mauvais temps et que le dimanche sera beau.

D. Ayant subi quelques déboires de prévision, il décide d'acheter tous les samedis 150 glaces et 150 popcorns. Cela lui assurera un bénéfice de 525 UM chaque dimanche.

2. Un grossiste achète 2 articles pour un total de 114 €. Il les revend à un détaillant en faisant une marge de 25 % sur le premier article et de 30 % sur le deuxième. Le détaillant tente de les vendre dans son magasin

en affichant des prix lui permettant de s'octroyer une marge de 20 € sur le premier article et de 15 € sur le second. Finalement, après avoir accordé une réduction de 20 % sur le prix affiché du premier article, le détaillant réussit à les vendre tous les deux au même prix.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

- A. Le grossiste a acheté le premier article 50 €.
- B. Le grossiste a gagné plus de 30 € en revendant les 2 articles au détaillant.
- C. Les 2 articles ont été vendus 80 € pièce au client final.
- D. Le détaillant a gagné plus de 20 € en revendant les 2 articles à son client.

3. Un cycliste doit effectuer un aller-retour entre 2 villes distantes de x km en 6 heures. À mi-parcours, soit après x km, il remarque que sa vitesse moyenne a été trop faible de 2 km/h pour respecter son timing.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet doit être de $\frac{x}{6}$ km/h pour respecter son timing.

B. Il a mis $\frac{\frac{x}{3}-2}{x}$ h pour effectuer l'aller.

C. Sa vitesse moyenne pour le retour doit être de $\frac{x}{6-\frac{x}{3}-2}$ km/h pour respecter son timing.

D. Sa vitesse moyenne pour le retour devra être de $\frac{x}{6-\frac{x}{3}-2} - \left(\frac{x}{3} - 4\right)$ km/h supérieure à celle de l'aller

pour respecter son timing.

4. Un détournement de fonds a été réalisé par un ou plusieurs membres du personnel d'une entreprise. Le commissaire chargé de l'enquête est confronté aux problèmes suivants :

- rien ne permet de distinguer les coupables des innocents ;
- les coupables mentent systématiquement à toutes les questions qu'on leur pose, alors que les innocents disent toujours la vérité.

Le commissaire interroge un groupe de 3 personnes X, Y et Z qui connaissent les coupables et déclarent :

X : « Aucun de nous n'est innocent. »

Y : « Je suis innocent. »

Z : « Au moins deux d'entre nous sont des coupables. »

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A	B	C	D
Y dit la vérité.	Il y a 2 innocents.	Z ment.	X et Y sont coupables.

5. Jean et Mathieu effectuent un stage d'été de 30 jours ouvrables dans la même entreprise. Chacun doit classer N dossiers sur cette période.

- Jean débute le classement dès le premier jour et programme de classer a dossiers par jour.
- Mathieu déclare : « Je commencerai le classement quand après-demain sera hier. Les 9 premiers jours, je classerai b dossiers par jour puis je doublerai ma cadence journalière tous les 9 jours. »

Jean et Mathieu terminent leur classement le dernier jour de leur stage.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A	B	C	D
$a = 2b$.	Si $N = 1260$ alors b est égal à 22.	Si $b = 40$ alors a est égal à 84.	Mathieu a réalisé le classement en exactement 28 jours.

6. Dans une école de commerce, la promotion de première année comprend 200 étudiants qui doivent pratiquer au moins l'une des 3 langues suivantes : anglais, allemand, espagnol. On sait que :

- * 160 étudiants pratiquent l'anglais
- * 120 étudiants pratiquent l'espagnol
- * 60 étudiants pratiquent l'allemand.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

- A. Si 30 étudiants pratiquent les 3 langues alors 80 étudiants pratiquent exactement 2 langues.
- B. Si 60 étudiants pratiquent seulement une langue alors aucun étudiant ne pratique les 3 langues.
- C. Le nombre d'étudiants pratiquant une seule langue est inférieur ou égal à 130.
- D. Plus de 180 étudiants pratiquent au moins l'une des 2 langues : allemand ou espagnol

Exercices n° 7 à 12 : Raisonnement mathématique

7. La fonction $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x-2}$. C_f est la courbe représentative de la fonction f .

- A. $f(x) = ax + \frac{b}{x-2}$ avec $a=1$ et $b=2$ pour tout x différent de 2.
- B. f a une asymptote verticale $x = 2$.
- C. La droite d'équation $y = x$ est asymptote (oblique) à la courbe C_f quand x tend vers $-\infty$ ou $+\infty$.
- D. La courbe C_f est au-dessus de la droite d'équation $y = x$ lorsque $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

8. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2}{2^x} = \frac{x^2}{e^{x \ln 2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $h(x) = \left[\frac{x^2}{\ln 2} + \frac{2x}{(\ln 2)^2} + \frac{2}{(\ln 2)^3} \right] 2^{-x}$.

- A. $f'(x) = \frac{x(2 - x \ln 2)}{2^x}$
- B. Sur $[0; +\infty[$, f a un minimum m lorsque $x = \frac{2}{\ln 2}$.
- C. $h'(x) = -x^2 e^{-x \ln 2}$.
- D. Une primitive de f est F définie par : $F(x) = -h(x)$

9. Soit g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{a}{e^{bx} + 1}$ où a et b sont des réels.

Soient $A(0; 6)$ et $B(4; 0)$ deux points. La droite (AB) est tangente à la courbe de g au point A.

Soit $f(x) = e^{bx} - 1$ pour tout réel x dans $[0; +\infty[$.

- A. $g(0) = 6$ et $g'(0) = -\frac{3}{2}$.
- B. $g'(x) = \frac{a}{(e^{bx} + 1)^2}$.
- C. Nous avons $a = 12$ et $b = \frac{1}{2}$.
- D. La solution de l'équation $f(x) = g(x)$ sur $[0; +\infty[$ est $x = \frac{\ln(a+1)}{2b}$.

10. Pour un prix de vente unitaire x , exprimé en centaines d'euros, $f(x)$ est le nombre d'objets, exprimés en centaines, proposés sur le marché et $g(x)$ est le nombre d'objets, exprimés en centaines que les consommateurs sont prêts à acheter.

La fonction f est la *fonction d'offre* : $f(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 1$.

La fonction g est la *fonction de demande* : $g(x) = \frac{12}{e^{\frac{1}{2}x} + 1}$.

A. Le prix d'équilibre (prix auquel la demande est égale à l'offre) est $p = \ln 13$ centaines d'euros.

B. Si $n = f(p)$ avec $p =$ prix d'équilibre, $n = \sqrt{13} - 1$.

C. $\int_0^{13} \left(e^{\frac{1}{2}x} - 1 \right) dx = 2\sqrt{13} - \ln 13 - 2$.

D. Soit $R = np - \int_0^{13} \left(e^{\frac{1}{2}x} - 1 \right) dx$, la *rente du producteur*. Alors $R = \sqrt{13} \ln 13 - 2\sqrt{13} + 2$.

11. Une entreprise embauche des cadres ingénieurs, les uns sous contrat A travaillant 35 heures et payés 550 euros par semaine, les autres sous contrat B travaillant 20 heures et payés 220 euros par semaine. Le chef d'entreprise peut embaucher au plus 8 personnes sous contrat A et 15 personnes sous contrat B. Chaque semaine, il dispose d'un budget de 5060 euros et 370 heures de travail au moins, doivent être effectuées.

Pour satisfaire ses besoins, l'entreprise ne peut pas embaucher :

A. 7 personnes en contrat A et 7 personnes en contrat B.

B. 4 personnes en contrat A et 12 personnes en contrat B.

C. 2 personnes en contrat A et 14 personnes en contrat B.

D. 6 personnes en contrat A et 8 personnes en contrat B.

12. Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

A. $f(2x) = f(2) + f(x)$.

B. $f(2^n) = nf(2)$.

C. $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln 2}{\ln 10}$.

D. $f^{-1}(y) = 10^y$ définie sur $\mathbb{R}$ est la réciproque de f .

Exercices n° 13 à 18 : Problème mathématique

Certaines questions peuvent être traitées indépendamment. D'autres nécessitent les résultats obtenus dans les questions précédentes.

On dispose d'une machine M_1 depuis déjà un certain temps et on anticipe qu'elle puisse être en panne au cours des prochains mois.

L'entreprise peut acheter le modèle M_2 dès maintenant ou acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois.

On sait que le modèle M_1 va certainement résister pendant encore au moins deux autres mois mais qu'il y a des chances égales qu'il s'arrête au cours du 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} ou 6^{ème} mois. Il y a aussi une probabilité égale à 0,40 qu'il fonctionnera correctement jusqu'à l'arrivée du modèle M_3 .

S'il s'arrête avant l'arrivée du modèle M_3 , on estime qu'il serait illogique d'acheter le modèle M_2 plus tard et qu'il serait alors plus sage de louer une autre machine à un coût égal à 500 € par mois jusqu'à l'arrivée du modèle M_3 .

Si on achète le modèle M_2 maintenant, on va le payer 14 000 € que nous pourrions amortir de façon linéaire sur 66 mois mais si nous attendons l'arrivée du modèle M_3 , nous allons le payer 12 900 € que nous pourrions amortir de façon linéaire sur 60 mois.

Ces machines, compte tenu de leurs capacités respectives, généreront des revenus de 2 € par unité fabriquée. Le modèle M_1 permet de fabriquer 200 unités par mois, une machine louée pourrait fabriquer 220 unités par mois, les modèles M_2 et M_3 pourront fabriquer 250 unités par mois.

13. À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Si on décide d'acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois et si le modèle M_1 ne tombe pas en panne dans cette période, le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de l'amortissement serait de 19 500 €.

B. Si on décide d'acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois et si le modèle M_1 tombe en panne à la fin du 2^{ème} mois, le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de l'amortissement serait de 17 660 €.

C. Si on décide d'acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois et si le modèle M_1 tombe en panne à la fin du 3^{ème} mois, le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de l'amortissement serait de 18 120 €.

D. Si on décide d'acheter le modèle M_2 dès maintenant le bénéfice total réalisé jusqu'à la fin de l'amortissement serait de 19 000 €.

14. À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. 30 mois après l'achat du modèle M_3 , la somme restante à amortir est égale à 6 450 €.

B. 33 mois après l'achat du modèle M_2 , la somme restante à amortir est strictement supérieure à 7 000 €.

C. x mois après l'achat du modèle M_2 , la somme restante à amortir est égale à $14000\left(1 - \frac{x}{66}\right)$ €.

D. y mois après l'achat du modèle M_3 , la somme restante à amortir est égale à $12900\left(1 - \frac{y}{60}\right)$ €.

15. Soit une expérience aléatoire produisant n événements $A_1, A_2, \dots, A_n$ pouvant conduire respectivement aux bénéfices : $x_1, x_2, \dots, x_n$ (nombres réels) avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_n$ (avec $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$).

On appelle bénéfice espéré associé à une telle expérience la quantité réelle : $p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$.

On décide d'acheter le modèle M_3 qui sortira dans 6 mois.

À partir des informations précédentes, on peut conclure que :

A. Les valeurs possibles du bénéfice (notées x_i) sont au nombre de 5.

B. Les valeurs x_i varient entre 17 660 et 19 500 €.

C. La probabilité p_i associée à la plus petite valeur x_i est 0,20.

D. Le bénéfice espéré est égal à 18 580 €.

16. Un expert mécanicien jouissant d'une bonne expérience peut prédire avec un taux de réussite de 85 % si la machine va résister pour les 6 prochains mois et avec le même taux de réussite de 85 % si la machine tombera en panne. Mais il est incapable de prédire à quel moment elle tombera en panne si elle tombe en panne.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

A. La probabilité que l'expert prédise que le modèle M_1 tombe en panne est 0,57.

B. Si la machine ne tombe pas en panne, la probabilité que l'expert prédise qu'elle tombera en panne est 0,15.

C. Sachant que l'expert affirme que la machine ne tombera en panne, la probabilité qu'elle ne tombe pas en panne est supérieure à 0,6.

D. La probabilité que le modèle M_1 tombe en panne au cours du 3^{ème} mois est 0,30.

17. La production mensuelle q d'un autre produit fabriqué par l'entreprise est lié à son prix de vente p (exprimé en €) par la relation : $q - M + 2p = 0$, où M est un paramètre entier positif.

La fonction coût moyen mensuel notée $C(q)$ dépend de la production mensuelle q avec :

$$C(q) = q^2 - 8q + 57 + \frac{2}{q}.$$

On note $R(q)$ la recette totale mensuelle en fonction de q .

On note $G(q)$ le profit mensuel en fonction de q , égal à la différence entre recette totale mensuelle et le coût total mensuel.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

A. La recette totale mensuelle s'écrit : $R(q) = \frac{q}{2}M - \frac{q^2}{2}$.

B. La recette totale mensuelle est maximale pour un volume de production de M unités.

C. Le coût total mensuel est $q^3 - 8q^2 + 57q + 2$.

D. Le profit mensuel s'écrit $G(q) = -q^3 + \frac{15q^2}{2} + (M - 57)q - 2$.

18. L'entreprise qui utilise les machines précédentes envisage aussi de confier à l'une de ses unités de production, à l'étranger, l'élaboration des produits A et des produits B demandés par certains industriels.

Cette fabrication doit répondre aux contraintes mensuelles de fabrication minimale de 4000 produits A et de 5000 produits B. La matière première sera livrée par l'usine principale à l'unité de production qui traite un minimum de 36000 kg de matière. En ce qui concerne la main-d'œuvre le maximum sera fixé à 20000 heures.

Par ailleurs on dispose des informations suivantes :

	Produit A	Produit B
La matière première par produit	6 Kg	9 Kg
La main-d'œuvre par produit	2 heures	1 heure
Poids du produit fini	3 Kg	4 Kg

Le coût des transports mis en place entre l'unité de production et l'unité principale pour l'acheminement des matières premières et le retour des produits finis devra être rendu minimal.

Le prix de ce transport a été estimé à 4 € par kilogramme de matière ou de produit fini transporté.

On note x et y respectivement le nombre de produits A et le nombre de produits B à fabriquer.

À partir des informations précédentes, on peut en conclure que :

A. $4000 - \frac{2}{3}x \leq y \leq 20000$.

B. Le coût total des transports est égal à : $36x + 52y$.

C. En tenant compte de toutes les contraintes, il est possible de produire 7 000 unités de A et 7 000 unités de B.

D. La production qui rend minimal le coût total des transports et qui tient compte de toutes les contraintes est celle qui consiste à produire 5 000 unités de A et 6 000 unités de B.

<http://www.concoursavenir.fr/b/epreuves/>

Remplace les concours EPF, ECE, EIGSI et ESTACA

depuis 2010.

7. Concours Avenir 2014 maths

Durée 1 h 30.

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale.

Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon. L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.

Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème : afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points, tandis que chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point.

Les complexes

1. Le nombre complexe i est :

a. nul	b. négatif	c. positif	d. aucune des trois propositions n'est correcte
--------	------------	------------	---

L'équation $z^3 + z = 0$ admet :

2. dans $\mathbb{R}$:

a. 0 solution	b. 1 solution	c. 2 solutions	d. 3 solutions
---------------	---------------	----------------	----------------

3. dans $\mathbb{C}$:

a. 0 solution	b. 1 solution	c. 2 solutions	d. 3 solutions
---------------	---------------	----------------	----------------

Soient, dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe, les points A, B, C et D d'affixes respectives : $4+i$, $-2-i$, $2+3i$ et 1.

4. Le triangle ABC est :

a. rectangle en A	b. rectangle en B	c. rectangle en C	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------------	-------------------	-------------------	---

5. Un argument de $i \frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}$ correspond à une mesure de l'angle orienté :

a. $(\overline{CD}; \overline{AB})$	b. $(\overline{AB}; \overline{CD})$	c. $\frac{\pi}{2} - (\overline{AB}; \overline{CD})$	d. $\frac{\pi}{2} + (\overline{AB}; \overline{CD})$
-------------------------------------	-------------------------------------	---	---

6. Le module de $i \frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}$ correspond à :

a. $i \frac{AB}{CD}$	b. $i \frac{CD}{AB}$	c. $\frac{AB}{CD}$	d. $\frac{CD}{AB}$
----------------------	----------------------	--------------------	--------------------

7. L'écriture algébrique de $i \frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}$ est :

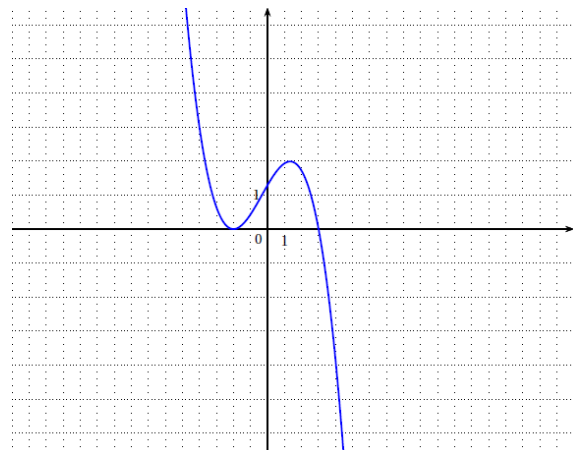
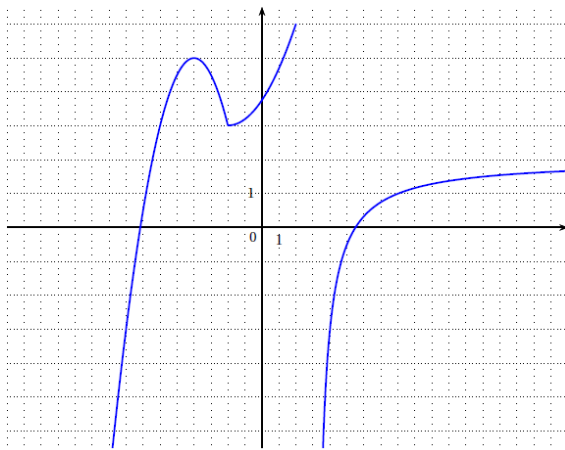
a. $\frac{9}{5} + \frac{3}{5}i$	b. $\frac{8}{5} + \frac{6}{5}i$	c. $-2 + 2i$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---------------------------------	---------------------------------	--------------	---

8. Le point D appartient au segment :

a. $[AB]$	b. $[AC]$	c. $[BC]$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-----------	-----------	-----------	---

Interprétation graphique

Ci-dessous les courbes C et S représentant respectivement les fonctions f définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ et g' définie sur $\mathbb{R}$.



9. $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ est :

a. $-\infty$	b. $+\infty$	c. un réel	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	--------------	------------	---

10. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. 3
------	------	------	------

11. Le nombre de solutions de l'équation $f'(x) = 1$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. 3
------	------	------	------

12. Le nombre de solutions de l'équation $f'(x) \times g'(x) = 0$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. 3
------	------	------	------

13. Sur $[-2; 3[\cup]3; +\infty]$ la fonction f est :

a. constante	b. strictement décroissante	c. strictement croissante	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	-----------------------------	---------------------------	---

14. Sur $[-2; 3[$ la fonction g est :

a. constante	b. strictement décroissante	c. strictement croissante	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	-----------------------------	---------------------------	---

15. $\int_5^7 f'(x) dx$ est :

a. nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------	-------------------------	-------------------------	---

16. $\int_5^7 g'(x) dx$ est :

a. nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------	-------------------------	-------------------------	---

Fonctions

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-3x} - 4x + 6\cos(0,5x)$, f' sa fonction dérivée et F sa primitive s'annulant en 0.

17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

a. $-\infty$	b. $+\infty$	c. n'existe pas	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	--------------	-----------------	---

18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

a. $-\infty$	b. $+\infty$	c. n'existe pas	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	--------------	-----------------	---

19. Pour tout réel x on a : $f'(x) =$

a. $f'(x) = 2e^{-3x} - 4 + 6\sin(0,5x)$	b. $f'(x) = 2e^{-3x} - 4 - 6\sin(0,5x)$
c. $f'(x) = -6e^{-3x} - 4 + 3\sin(0,5x)$	d. $f'(x) = -6e^{-3x} - 4 - 3\sin(0,5x)$

20. Le nombre de solution(s) de l'équation $f(x) = 0$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

21. La plus petite solution de l'équation $f(x) = 0$ est :

a. strictement négative	b. strictement positive	c. nulle	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------------------	-------------------------	----------	---

22. Pour tout réel x on a : $F(x) =$

a. $2e^{-3x} - 2x^2 + 6\sin(0,5x)$	b. $2e^{-3x} - 2x^2 + 6\sin(0,5x) - 2$
c. $\frac{2}{3}e^{-3x} - 2x^2 + 12\sin(0,5x)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

23. $\int_{-1}^{-3} f'(x) dx$ est :

a. nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------	-------------------------	-------------------------	---

24. $\int_{-1}^{-3} f(x) dx$ est :

a. nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------	-------------------------	-------------------------	---

25. f est une fonction :

a. à la fois paire et impaire	b. paire non impaire	c. impaire non paire	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------------------------	----------------------	----------------------	---

26. f est une fonction :

a. périodique de période 2π	b. périodique de période π	c. périodique de période $\pi/2$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---------------------------------	--------------------------------	----------------------------------	---

Suites

Soient les suites (U_n) définie par $U_0 = 4$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = -\frac{3}{2}U_n + \frac{5}{2}n + 1$ et (V_n) par $V_n = U_n - n$.

27. $U_2 =$

a. 11	b. $\frac{39}{4}$	c. -5	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------	-------------------	-------	---

28. (U_n) est :

a. arithmétique et géométrique	b. arithmétique non géométrique	c. géométrique non arithmétique	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---

29. (V_n) est :

a. arithmétique et géométrique	b. arithmétique non géométrique	c. géométrique non arithmétique	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------------------------	---------------------------------	---------------------------------	---

30. Quel que soit n : $U_n =$

a. $4 \times (-1,5)^n - n$	b. $4 \times (-1,5)^n$	c. $4 \times (-1,5)^n + n$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------------------------	------------------------	----------------------------	---

31. La suite (U_n) :

a. converge	b. diverge vers $-\infty$	c. diverge vers $+\infty$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------	---------------------------	---------------------------	---

32. $\sum_{k=0}^{2014} U_k$ est :

a. nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------	-------------------------	-------------------------	---

Probabilités

On lance deux fois de suite et de manière indépendante un dé parfaitement équilibré à six faces dont deux sont blanches marquées chacune du chiffre 2, une est blanche marquée du chiffre 1, une est noire marquée du chiffre 1 et les deux autres sont noires marquées du chiffre 3.

On considère les variables aléatoires X correspondant à la somme des deux chiffres obtenus et Y le nombre de couleurs différentes obtenues.

33. Le nombre de valeurs différentes pouvant être prises par X est :

a. 3	b. 4	c. 5	d. 6
------	------	------	------

34. $\mathbb{P}(X=2) =$

a. $\frac{1}{6}$	b. $\frac{2}{36}$	c. $\frac{4}{36}$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------------------	-------------------	-------------------	---

35. $\mathbb{P}(Y=1) - \mathbb{P}(Y=2)$ est :

a. nul	b. strictement négatif	c. strictement positif	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------	------------------------	------------------------	---

36. $\mathbb{P}(X=Y) =$

a. $\mathbb{P}(X=1)$	b. $\mathbb{P}(X=2)$	c. $\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------------------	----------------------	--	---

37. L'espérance mathématique $\mathbb{E}(Y) =$

a. $\frac{1}{2}$	b. $\frac{2}{2}$	c. $\frac{3}{2}$	d. 2
------------------	------------------	------------------	------

38. $\mathbb{P}_{Y=2}(X=2) =$

a. $\frac{1}{2}$	b. $\frac{1}{9}$	c. $\frac{1}{18}$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------------------	------------------	-------------------	---

39. $\mathbb{P}_{X=2}(Y=2) =$

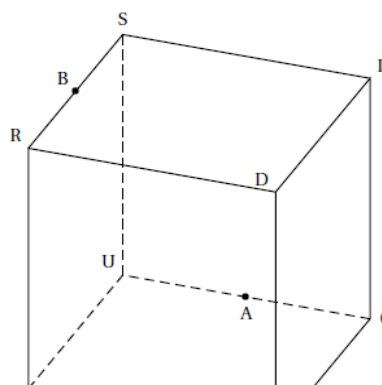
a. $\frac{1}{2}$	b. $\frac{1}{9}$	c. $\frac{1}{18}$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------------------	------------------	-------------------	---

Géométrie non analytique dans l'espace

Soient ETOURDIS un cube et les points A et B milieux respectifs des arêtes [OU] et [RS] :

40. La section de ce cube par le plan (EAS) est :

a. un segment	b. un triangle
c. un quadrilatère	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte



41. La section de ce cube par le plan (EAB) est :

a. un segment	b. un triangle	c. un quadrilatère	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---------------	----------------	--------------------	---

42. La section de ce cube par le plan (EAD) est :

a. un segment	b. un triangle	c. un quadrilatère	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---------------	----------------	--------------------	---

Géométrie analytique dans l'espace

Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points $A(0; -5; 0)$, $B(1; 0; 1)$, $C(-1; -$

$7; 0)$, la droite D d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = -6a + 6 \\ y = 4a - 9 \\ z = 0 \end{cases} \text{ où } a \in \mathbb{R} \text{ et le plan } P \text{ d'équation cartésienne :}$$

$$3x - 2y - 10 = 0.$$

43. Le point A :

a. appartient à D et à P	b. appartient à D mais pas à P	c. appartient à P mais pas à D	d. n'appartient ni à D ni à P
------------------------------	------------------------------------	------------------------------------	-----------------------------------

44. Le triangle ABC est :

a. rectangle en A	b. rectangle en B	c. rectangle en C	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------------	-------------------	-------------------	---

45. D et P sont :

a. parallèles	b. sécantes non perpendiculaires	c. perpendiculaires	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---------------	----------------------------------	---------------------	---

46. Les droites (AB) et D sont :

a. parallèles	b. sécantes non perpendiculaires	c. perpendiculaires	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---------------	----------------------------------	---------------------	---

47. C est sur la sphère de centre B et de rayon r où r appartient à l'intervalle :

a. $[5; 6]$	b. $[6; 7]$	c. $[7; 8]$	d. $[8; 9]$
-------------	-------------	-------------	-------------

Algorithmique

On considère l'algorithme suivant :

```

Saisir un entier  $N > 1$ 
Affecter à  $S$  la valeur 1
Affecter à  $T$  la valeur 1
Tant que  $T \leq N$ 
    Affecter à  $S$  la valeur  $S + \ln(T)$ 
    Affecter à  $T$  la valeur  $T + 1$ 
Fin de tant que
Affecter à  $L$  la valeur  $S - 1$ 
Afficher  $L$ 

```

48. La valeur de L affichée pour $N = 1$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

49. La valeur de L affichée pour $N = 3$ est :

a. $\ln(5)$	b. $\ln(6)$	c. $\ln(7)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------	-------------	-------------	---

50. La plus grande valeur de N telle que $L \leq \ln(25)$ est :

a. 3	b. 4	c. 5	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

51. La plus petite valeur de N telle que $e^L \geq 25$ est :

a. 3	b. 4	c. 5	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

Lois à densité

X suit la loi normale de moyenne -2 et de variance V telle que $\mathbb{P}(X \leq 0) = a$ et Y suit la loi exponentielle de paramètre $0,2$.

52. Ainsi :

a. $a = 0,5$	b. $a < 0,5$	c. $a > 0,5$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	--------------	--------------	---

53. $\mathbb{P}(X = 0) =$

a. 0	b. 0,5	c. 1	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	--------	------	---

54. $\mathbb{P}(-2 \leq X \leq 0) =$

a. $a - 0,5$	b. $a + 0,5$	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	--------------	------	---

55. $\mathbb{P}(X < -2) = b$ où :

a. $b = 0,5$	b. $b < 0,5$	c. $b > 0,5$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	--------------	--------------	---

56. $\mathbb{E}(Y) =$

a. 0,2	b. 5	c. $5\ln(2)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------	------	--------------	---

57. $\mathbb{P}(-1 \leq Y \leq 1) =$

a. $e^{0,2} - e^{-0,2}$	b. $e^{-0,2} - e^{0,2}$	c. $1 - e^{0,2}$	d. $1 - e^{-0,2}$
-------------------------	-------------------------	------------------	-------------------

58. La valeur de t telle que $\mathbb{P}(Y < t) = \mathbb{P}(Y > t)$ est

a. 0	b. $\frac{1}{2}$	c. 1	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------------------	------	---

59. $\mathbb{P}_{Y>8}(Y < 5) =$

a. $\frac{\mathbb{P}(Y < 8) - \mathbb{P}(Y < 5)}{\mathbb{P}(Y < 8)}$	b. $\frac{\mathbb{P}(Y > 8) - \mathbb{P}(Y < 5)}{\mathbb{P}(Y > 8)}$	c. $1 - \mathbb{P}(Y < 3)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--	--	----------------------------	---

60. $\mathbb{P}_{Y<8}(Y > 5) =$

a. $\frac{\mathbb{P}(Y < 8) - \mathbb{P}(Y < 5)}{\mathbb{P}(Y < 8)}$	b. $\frac{\mathbb{P}(Y > 8) - \mathbb{P}(Y < 5)}{\mathbb{P}(Y > 8)}$	c. $1 - \mathbb{P}(Y < 3)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--	--	----------------------------	---

7-1 : Concours Avenir 2013 maths

DUREE : 1h30mn, Coefficient 5

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale.

Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon. L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.

Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème : afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points, tandis que chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point.

Simplifications d'écritures

1. $\frac{1}{2}\ln(27) - 2\ln(3) + \ln(\sqrt{3})$ est :

a. nul	b. strictement négatif	c. strictement positif	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------	------------------------	------------------------	---

2. $\frac{-2e^2 \times 3e^4}{(2e^2)^2 - 3e^4}$ est égal à :

a. $\frac{1}{2e^2}$	b. $-6e^2$	c. $-5e^2$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---------------------	------------	------------	---

3. $(\ln(3))^2 - 2\ln(3)$ est :

a. nul	b. strictement négatif	c. strictement positif	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------	------------------------	------------------------	---

4. $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ est égal à :

a. $\frac{1}{2}$	b. 1	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------------------	------	------	---

Continuité et dérivabilité

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$

5. f est continue en -1 signifie que :

a. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ est un réel	b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x-1)$ est un réel	c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-1+x) - f(-1)}{x}$ est un réel	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---	--	---	---

6. f est dérivable en -1 signifie que :

a. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ est un réel	b. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x-1)$ est un réel	c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(-1+x) - f(-1)}{x}$ est un réel	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---	--	---	---

Soit g une fonction définie sur $[-1; 2]$ telle que $g(-1)=2$; $g(0)=1$; $g(1)=0$ et $g(2)=-1$

7. On est certain que sur $[-1; 2]$:

a. g est strictement décroissante	b. g est strictement croissante	c. g n'est pas strictement décroissante	d. g n'est pas strictement croissante
-------------------------------------	-----------------------------------	---	---

8. On est certain que sur $[-1; 2]$, l'équation $g(x)=0,5$:

a. n'admet pas de solution	b. admet une unique solution	c. admet au moins une solution	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------------------------	------------------------------	--------------------------------	---

Équations et inéquations

9. $\frac{1}{x} \leq 0,2$ a pour solution :

a. $]0; 5[$	b. $[5; +\infty[$	c. $] -\infty; 5]$	d. aucune des trois propositions
-------------	-------------------	--------------------	----------------------------------

			proposées n'est correcte
--	--	--	--------------------------

10. Le nombre de solutions de l'équation $(\ln x)^2 = \ln(x^2)$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

11. Le nombre de solutions de l'équation $(\ln x)^2 = -(\ln x)^2$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

12. Le nombre de solutions de l'inéquation : $e^{-x^2} \geq 1$ est :

a. infini	b. 0	c. 1	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-----------	------	------	---

13. Le nombre de complexes solutions de l'équation : $2z^2 - 5z + 3 = 0$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

Implications et équivalences

Dans les quatre items suivants, P_1 et P_2 sont deux propositions ; a et b sont deux réels.

De manière générale :

14. Si $P_1 : "a^3 = b^3"$ est vraie et $P_2 : "a = b"$ est vraie, alors :

a. P_1 implique P_2	b. P_2 implique P_1	c. P_1 et P_2 sont équivalentes	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------------------	-------------------------	-------------------------------------	---

15. Si $P_1 : "\ln(a) = \ln(b)"$ est vraie et $P_2 : "e^a = e^b"$ est vraie alors :

a. P_1 implique P_2	b. P_2 implique P_1	c. P_1 et P_2 sont équivalentes	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------------------	-------------------------	-------------------------------------	---

16. Si $P_1 : "a^2 = b"$ est vraie et $P_2 : "a = \sqrt{b}"$ est vraie alors :

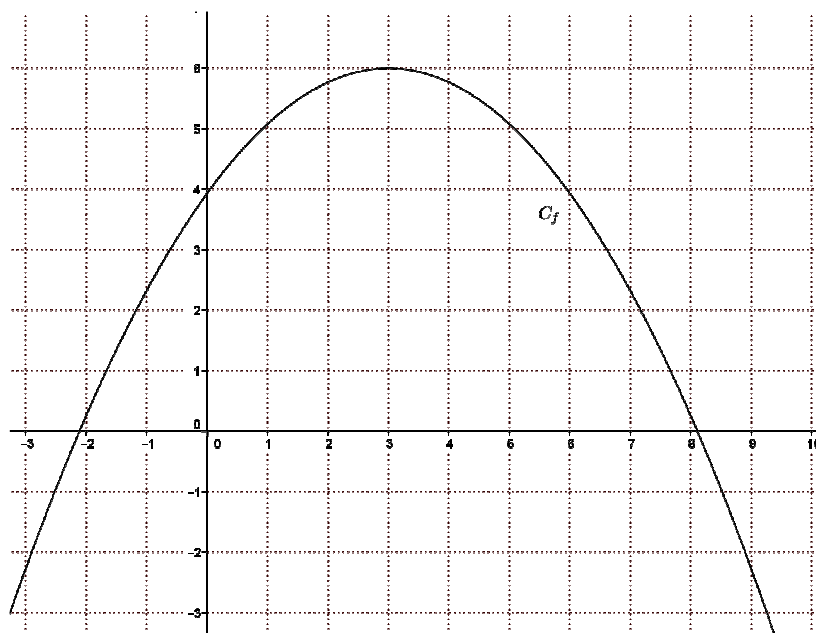
a. P_1 implique P_2	b. P_2 implique P_1	c. P_1 et P_2 sont équivalentes	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------------------	-------------------------	-------------------------------------	---

17. Si $P_1 : "AB^2 = AC^2 + BC^2"$ est vraie et $P_2 : "ABC$ est un triangle rectangle" est vraie alors :

a. P_1 implique P_2	b. P_2 implique P_1	c. P_1 et P_2 sont équivalentes	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------------------	-------------------------	-------------------------------------	---

Interprétation graphique

Ci-dessous la parabole représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$.



Soient les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n , respectivement par :

$$u_n = f(n) \text{ et } \begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \text{ où } a \text{ est un réel.}$$

18. La tangente à la parabole au point d'abscisse 3 a pour équation

a. $x = 6$	b. $y = 6$	c. $y = 6x - 18$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------------	------------	------------------	---

19. Sur $\mathbb{R}$, la dérivée de f est définie par $f'(x) =$

a. $-\frac{4}{9}x - \frac{4}{3}$	b. $-\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}$	c. $\frac{4}{9}x - \frac{4}{3}$	d. $\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}$
----------------------------------	----------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) =$

a. $-\infty$	b. $+\infty$	c. 0	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	--------------	------	---

21. $\int_{-1}^{-4} f(x) dx$

a. est nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	-------------------------	-------------------------	---

22. La suite (u_n) est :

a. minorée non majorée	b. majorée non minorée	c. bornée	d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte
------------------------	------------------------	-----------	---

23. Pour $a = 1$, v_2 appartient à :

a. $[0 ; 2]$	b. $[2 ; 4]$	c. $[4 ; 6]$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	--------------	--------------	---

24. Pour $a = -1$, la suite (v_n) est :

a. constante	b. strictement décroissante	c. strictement croissante	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	-----------------------------	---------------------------	---

25. Pour $a = -4$, la suite (v_n) :

a. est convergente	b. diverge vers $-\infty$	c. diverge vers $+\infty$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------------	---------------------------	---------------------------	---

La trigonometrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos\left(\frac{x}{3}\right)$.

26. f est :

a. paire	b. impaire	c. paire et impaire	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------	------------	---------------------	---

27. f est :

a. périodique de période 2π	b. périodique de période 6π	c. périodique de période $\frac{2\pi}{3}$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---------------------------------	---------------------------------	---	---

28. Le nombre de solutions sur $[-2\pi; 2\pi]$ de l'équation $f(x) = 0$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. 3
------	------	------	------

29. Sur $\mathbb{R}$, la fonction dérivée f' est définie par $f'(x) =$

a. $-x \sin\left(\frac{x}{3}\right)$	b. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) + x \sin\left(\frac{x}{3}\right)$	c. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) - x \sin\left(\frac{x}{3}\right)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------------------------------	--	--	---

30. Sur $\mathbb{R}$, la primitive F de f telle que $F(0) = 0$ est définie par $F(x) =$

a. $\frac{x^2}{2} \sin\left(\frac{x}{3}\right)$	b. $\frac{3x^2}{2} \sin\left(\frac{x}{3}\right)$	c. $9 \cos\left(\frac{x}{3}\right) + 3x \sin\left(\frac{x}{3}\right)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
---	--	---	---

31. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

a. 0	b. $-\infty$	c. $+\infty$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	--------------	--------------	---

32. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) =$

a. 0	b. $-\infty$	c. $+\infty$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	--------------	--------------	---

33. $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x) dx$ est :

a. nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------	-------------------------	-------------------------	---

Algorithmique

On considère l'algorithme suivant :

```

Saisir un entier  $N \geq 1$ 
Affecter à S la valeur 0
Affecter à I la valeur 0
Tant que  $S < N$ 
    Affecter à S la valeur  $S + I^2$ 
    Affecter à I la valeur  $I + 1$ 
Fin de tant que
Afficher S
Afficher I

```

34. La valeur de S affichée pour $N=30$ est :

a. 14	b. 30	c. 55	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------	-------	-------	---

35. La valeur de I affichée pour $N=30$ est :

a. 4	b. 5	c. 6	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

36. La plus petite valeur de N telle que $I=3$ est :

a. 1	b. 2	c. 3	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

37. La plus grande valeur de N telle que $I=3$ est :

a. 1	b. 3	c. 5	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

Les complexes

38. L'écriture exponentielle de $\sqrt{3}-i$ est :

a. $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$	b. $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$	c. $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$	d. $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$
----------------------------------	----------------------------------	---------------------------	---------------------------

39. $(\sqrt{3}-i)^9$ est :

a. un réel strictement négatif	b. un réel strictement positif	c. un imaginaire pur	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------------------------	--------------------------------	----------------------	---

Dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ du plan complexe, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z où $z \neq -2$ associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1}{z+2}$.

40. Si $z = -i$ alors $z' =$

a. $-\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i$	b. $-\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$	c. $-\frac{1}{2} + i$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------------------------------	----------------------------------	-----------------------	---

41. Si $z' = -i$ alors $z =$

a. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$	b. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$	c. $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	---

42. L'ensemble des points M tels que $OM' = 1$ est :

a. une droite privée d'un point	b. un cercle privé d'un point	c. une droite	d. un cercle
---------------------------------	-------------------------------	---------------	--------------

43. L'ensemble des points M tels que $z' = -\bar{z}$ est :

a. une droite privée d'un point	b. un cercle privé d'un point	c. une droite	d. un cercle
---------------------------------	-------------------------------	---------------	--------------

La géométrie analytique dans l'espace

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points A(0 ; -5 ; 0) , B(1 ; 0 ; 1) , C(-1 ; -7 ; 0) et D(a ; 0 ; -1) où a est un réel.

44. Une équation du plan ABC est :

a. $3x + y + 2z + 5 = 0$	b. $x + y - 6z + 5 = 0$	c. $-2x + y - 3z + 5 = 0$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------------------	-------------------------	---------------------------	---

45. Le triangle ABD est rectangle en B lorsque $a =$

a. 1	b. 3	c. 4	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

46. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles lorsque $a =$

a. $-\frac{10}{7}$	b. $\frac{10}{7}$	c. 4	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------------	-------------------	------	---

47. Le nombre de valeurs de a telles que $AD=BC$ est :

a. 0	b. 1	c. 3	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	------	------	---

48. $x^2 - 4x + y^2 + 3y = 4$ est une équation :

a. de cercle	b. de sphère	c. de plan	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------------	--------------	------------	---

49. Une équation de la sphère de centre C et de rayon OA est :

a. $x^2 + 2x + y^2 + 14y + z^2 = -25$	b. $x^2 + 2x + y^2 + 14y + z^2 = 25$
c. $x^2 - 2x + y^2 - 14y + z^2 = -25$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

Les probabilités

Soient A et B deux événements non impossibles, non certains et indépendants l'un de l'autre. De manière générale :

50. $\mathbb{P}(A \cup B) =$

a. $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$	b. $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$	c. $\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\bar{B}) + \mathbb{P}(B)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------------------------------------	---	---	---

51. $\mathbb{P}_B(\bar{A}) =$

a. $\mathbb{P}_B(A)$	b. $1 - \mathbb{P}(A)$	c. $\mathbb{P}(\bar{A} \cap B)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------------------	------------------------	---------------------------------	---

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres (8 ; 0,3) ; Y une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur [-2 ; 1] et Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

52. $\mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=7)$ est :

a. nul	b. strictement négatif	c. strictement positif	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------	------------------------	------------------------	---

53. $\mathbb{E}(X) =$

a. 7,7	b. 8,3	c. 2,4	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------	--------	--------	---

54. $\mathbb{P}(-1 \leq Y \leq 2) =$

a. 1	b. 2/3	c. -1	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
------	--------	-------	---

55. $\mathbb{E}(Y) =$

a. $-\frac{1}{3}$	b. 1	c. $\frac{1}{3}$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
-------------------	------	------------------	---

56. $\mathbb{P}(Z < -2) - \mathbb{P}(Z \geq 2)$ est :

a. nul	b. strictement négatif	c. strictement positif	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
--------	------------------------	------------------------	---

57. $\mathbb{E}(Z)$ est :

a. nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte
----------	-------------------------	-------------------------	---

Les statistiques

Mesdames Ave et Nir se présentent à une élection nationale.

Un sondage effectué sur un échantillon de n personnes (où $n \geq 50$) donne 52% des suffrages à Ave et 48% à Nir. Soit p la proportion des votants pour madame Ave.

58. Pour $n = 400$, un intervalle de confiance de p, au niveau 95% est :

a. [0,51 ; 0,53]	b. [0,49 ; 0,55]	c. [0,47 ; 0,57]	d. [0,45 ; 0,59]
------------------	------------------	------------------	------------------

59. Le nombre minimal de personnes interrogées permettant d'affirmer, au niveau 95% que madame Ave va être élue est :

a. 1500	b. 2000	c. 2500	d. 3000
---------	---------	---------	---------

60. Pour obtenir une amplitude 2 fois plus petite de l'intervalle de confiance de p, il suffirait de multiplier le nombre initial de votants par :

a. $\frac{1}{4}$	b. $\frac{1}{2}$	c. 2	d. 4
------------------	------------------	------	------

7-2 : Concours Fesic / Puissance 11

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, -1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'1 point pour un exercice entièrement juste.

Exercice n°1 : Bases en Analyse

Les questions sont indépendantes.

a. Soit $x \in \mathbb{R}$, la dérivée de $x \mapsto \frac{x}{e^x}$ est $x \mapsto \frac{x-1}{e^x}$.

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = +\infty$.

Soit f une fonction définie sur $]0; +\infty[$ telle que, pour tout $x > 0$: $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{x}{e^x}$.

c. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Soit (w_n) la suite définie, pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$.

d. La suite (w_n) converge vers 0.

Exercice n°2 : Bases en Géométrie

Les questions sont indépendantes.

Soit (P) et (Q) les plans d'équations respectives (P) : $2x + y + z = 2$ et (Q) : $x + y - z = 0$.

a. L'intersection des plans (P) et (Q) a pour équation $x + 2z = 2$.

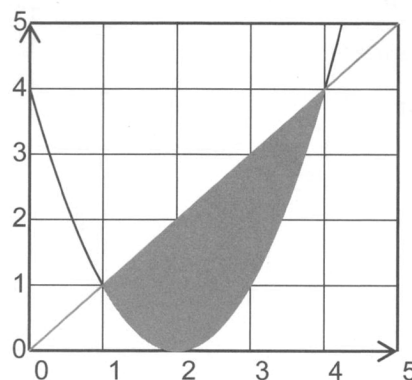
Soit (D) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t - 1 \\ z = 2 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

b. (D) est perpendiculaire au plan (R) d'équation $x - y + 2z = 0$.

c. Sur le graphique ci-contre, nous avons tracé les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto (x-2)^2$.

L'aire A du domaine hachuré est égale à $A = \frac{9}{2}$ unités d'aire.

d. La courbe représentative de la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{2x^2 - x + 3}{x-1}\right)$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = \ln 2$.

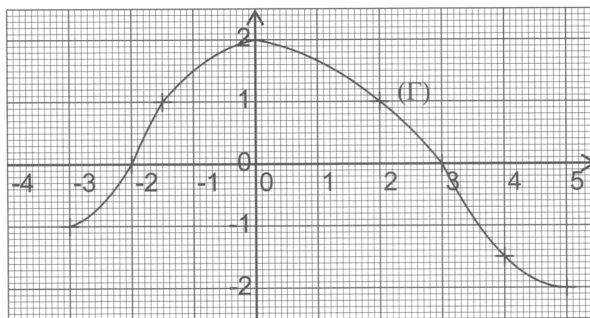


Exercice n°3 : Lecture graphique

f est une fonction définie et dérivable sur $[-3; 5]$ de courbe représentative (C).

On donne ci-dessous la courbe (Γ) représentative de sa fonction dérivée f' .

- (C) admet une tangente horizontale en $x = 0$.
- f admet un minimum relatif en $x = -2$.
- La fonction f est strictement décroissante sur $[0 ; 5]$.
- Les tangentes à (C) aux points d'abscisses $-\frac{3}{2}$ et 2 sont parallèles.



Exercice n°4 : Suite définie par un algorithme

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite (u_n) où u_n est le réel affiché par l'algorithme ci-contre lorsque l'utilisateur entre la valeur de n .

- $u_3 = 11$.
- Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$.
- La suite (u_n) est strictement croissante.
- Pour tout entier naturel n , $u_n = n^2 + 2$.

```

1  VARIABLES
2  u EST_DU_TYPE NOMBRE
3  n EST_DU_TYPE NOMBRE
4  k EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6  LIRE n
7  U PREND_LA_VALEUR 2
8  k PREND_LA_VALEUR 0
9  TANT_QUE (k < n) FAIRE
10  DEBUT_TANT_QUE
11  k PREND_LA_VALEUR k+1
12  U PREND_LA_VALEUR U+2*(k-1)+1
13  FIN_TANT_QUE
14  AFFICHER U
15  FIN_ALGORITHME

```

Exercice n°5 : Bases sur les complexes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les nombres complexes $z_1 = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ et $z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$.

- $z_1^2 = 8\sqrt{3} + 8i$.
- $|z_2| = \sqrt{2}$.
- $\arg(z_1^2) = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$.
- $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$.

Exercice n°6 : Bases de logique

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. x et y sont deux nombres réels et z est le nombre complexe $x + iy$.

- La négation de la proposition : « $x \geq 0$ et $y \geq 0$ » est la proposition « $x < 0$ et $y < 0$ ».
- Si $x = y$ alors $\arg(z) = \frac{\pi}{4}$ modulo 2π .
- La réciproque de la proposition précédente est vraie.
- On suppose $z \neq 0$. Si $z = \frac{1}{z}$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.

Exercice n°7 : Calculs de limites

- La fonction $x \mapsto x \times \sin(x)$ n'a pas de limite lorsque x tend vers $+\infty$.

$$b. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x) + 2}{\cos(x) + x} = 1.$$

$$c. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 3x}{x + 1} = 0.$$

$$d. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x^2} = 1.$$

Exercice n°8 : Calculs d'intégrales

$$a. \int_2^4 \frac{3}{x^2} dx = \frac{5}{4}.$$

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x}$.

b. La fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = 1 + \frac{\ln(x^2+2x)}{2}$ est une primitive de f .

$$c. \int_1^e \frac{1+t}{t^2} dt = \frac{1}{e}.$$

$$d. \int_0^1 \frac{e^x - xe^x}{e^{2x}} dx = \frac{1}{e}.$$

Exercice n°9 : Transformation complexe

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)z + 1$.

a. L'image, par f , du point B d'affixe 2 est le point C d'affixe $3+2i$.

b. Le point A d'affixe i est le seul point invariant par f .

c. L'image, par f , de l'axe des réels est la droite (BC).

d. Soit D le point d'affixe 1. Pour tout point M distinct de A et de D, le triangle DMM' est isocèle en M.

Exercice n°10 : Loi normale

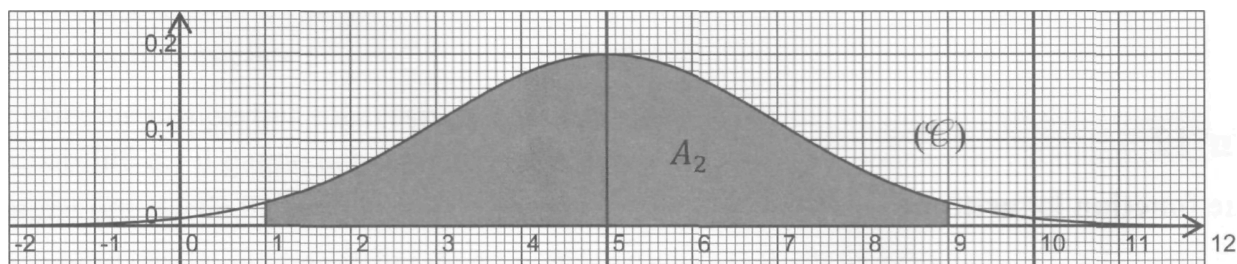
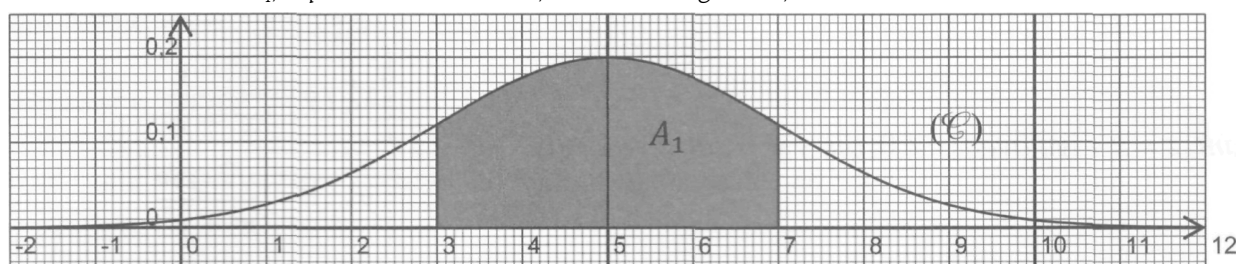
Dans tout l'exercice, on suppose T une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ avec μ et σ deux entiers naturels.

La densité de probabilité de cette loi, notée f , est représentée ci-dessous par la courbe (C).

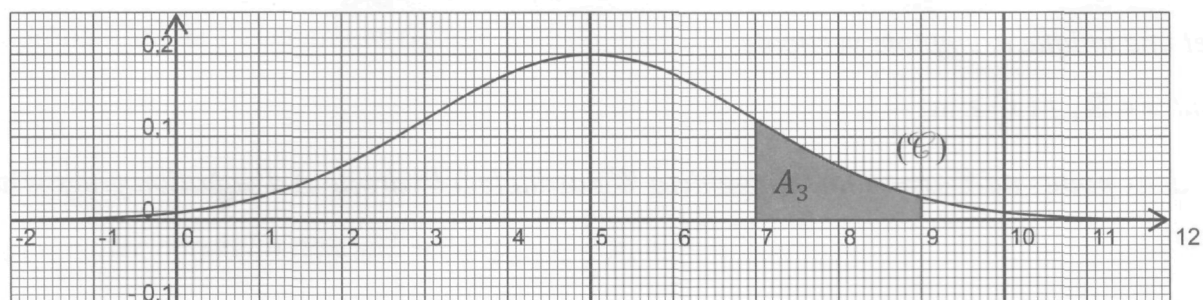
On suppose que (C) admet la droite $x = 5$ comme axe de symétrie et que l'aire du domaine A_1 (représentée en gris) est environ égale à 0,68.

a. $\mu = 5$ et $\sigma = 4$.

b. L'aire du domaine A_1 , représentée ci-dessous, est environ égale à 0,8.



c. L'aire du domaine A_2 , représentée ci-dessous, est environ égale à 0,135.



On admet, dans cette question, que $\mathbb{P}(T \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]) \approx 0,95$.

d. $\mathbb{P}(T \leq 9) \approx 0,975$.

Exercice n°11 : Nombres complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

À chaque point M d'affixe $z \neq 0$, on associe l'unique point M' d'affixe z' tel que : $z' = \left(\frac{\bar{z}}{|z|} \right)^2$.

a. En posant $z = x + iy$, avec $x \neq 0$ ou $y \neq 0$, et $z' = x' + iy'$, on a : $x' = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

b. M' appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si M appartient à la droite d'équation $y = x$ privée de O .

c. M' est un point du cercle trigonométrique.

d. M' a pour affixe -1 si et seulement si $z = i$ ou $z = -i$.

Exercice n°12 : Etude d'une fonction logarithme

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ de courbe représentative (C) .

a. f est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. (C) admet une unique asymptote verticale.

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \ln\left(\frac{3}{4}\right)$.

d. Il existe deux points de (C) ayant une tangente à (C) parallèle à la droite (D) d'équation $y = x - \ln 7$.

Exercice n°13 : Étude d'une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + e^x - 2x$. On désigne par (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

a. Pour tout réel x , on a : $f'(x) = (e^x - 1)(e^x + 2)$.

b. Pour tout réel x , on a : $f(x) > \frac{3}{2}$.

c. (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice n°14 : Probabilités conditionnelles

Un joueur effectue des parties successives d'un jeu vidéo.

- La probabilité qu'il gagne la première partie est de 0,2.
- S'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,7.
- S'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à 0,5.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- G_n l'événement : « le joueur gagne la $n^{\text{ème}}$ partie » ;
- p_n la probabilité de l'événement G_n .

a. $p_2 = 0,54$.

b. Le joueur gagne la deuxième partie. La probabilité qu'il ait perdu la première est 0,6.

c. Pour tout entier naturel n non nul, on a $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{2}$.

Pour le d., on donne l'algorithme ci-dessous :

Variables	p est un réel ; i, n sont des entiers
Algorithme	donner la valeur de n p prend la valeur 0,2 pour i allant de 2 à n p prend la valeur $0,2 * p + 0,5$ fin pour afficher p

d. Si on teste le programme pour $n = 5$ alors cet algorithme restitue la probabilité que le joueur gagne la cinquième partie.

Exercice n°15 : Différentes lois de probabilités

Les quatre questions sont indépendantes.

a. Soit $t > 0$. Si X suit une loi uniforme sur $[0 ; t]$ telle que $\mathbb{P}(X < 5) = 0,4$ alors $t = 20$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n; 0,3)$ d'espérance 12, alors $n = 40$.

c. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2 \times 10^{-3}$, alors $\mathbb{E}(X) = 5000$.

d. On considère A et B deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Si $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}_A(B)$, alors $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$.

Exercice n°16 Repérage dans un cube

Dans le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, on considère le repère orthonormé $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On rappelle que :

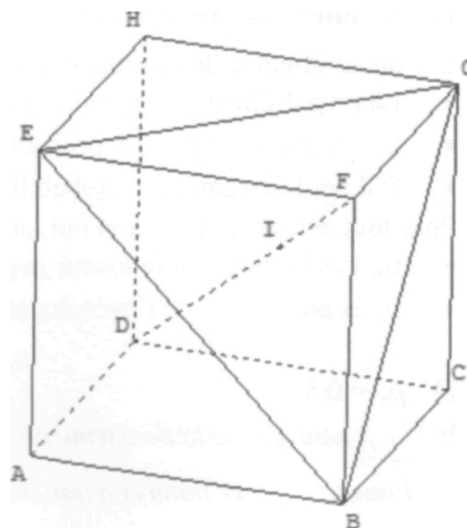
- Le plan médiateur d'un segment est le plan passant par le milieu de ce segment tout en lui étant perpendiculaire.
- Si M est un point de l'espace et (P) un plan de l'espace, on appelle *distance* du point M au plan (P) la plus petite distance d entre le point M et un point H du plan (P) .

a. (GDF) est le plan médiateur du segment $[EB]$.

b. Le plan (BEG) a pour équation : $x - y + z = 1$.

c. $I\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ est le point d'intersection de la droite (DF) avec le plan (BEG) .

d. La distance du point D au plan (BEG) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



7-3 : Concours Geipi – ENI - Polytech

Nous vous conseillons de répartir équitablement les 3 heures d'épreuves entre les sujets de mathématiques et de physique-chimie. La durée conseillée de ce sujet de mathématiques est de 1h 30.

L'usage d'une calculatrice est autorisé. Tout échange de calculatrices entre candidats, pour quelque raison que ce soit, est interdit. Aucun document n'est autorisé. L'usage du téléphone est interdit.

Vous ne devez traiter que 3 exercices sur les 4 proposés.

Chaque exercice est noté sur 10 points. Le sujet est donc noté sur 30 points. Si vous traitez les 4 exercices, seules seront retenues les 3 meilleures notes.

Correction sur <http://www.geipi.org/resultats-corriges/index.htm>

ENI : <http://www.enit.fr/sr/379/index.php>

Exercice 1

Une enquête réalisée dans le Centre de Documentation et d'Information (CDI) d'un lycée donne les résultats suivants : 60% des élèves fréquentant le CDI sont des filles et, parmi elles, 40% sont en seconde, 30% en première et le reste en terminale. Parmi les garçons fréquentant le CDI, 50% sont en seconde, 20% en première et le reste en terminale.

Partie A

On interroge au hasard un élève fréquentant le CDI et on considère les événements suivants :

F : « l'élève interrogé est une fille », G : « l'élève interrogé est un garçon ».

S : « l'élève interrogé est en seconde », P : « l'élève interrogé est en première ».

T : « l'élève interrogé est en terminale ».

1. Dresser un arbre de la situation avec les probabilités correspondantes.
2. Donner la probabilité P_1 que l'élève interrogé soit une fille de seconde.
3. Donner la probabilité P_2 que l'élève interrogé soit en seconde.
4. L'élève interrogé est en seconde. Déterminer la probabilité P_3 que ce soit une fille.

Justifier la réponse. Puis donner une valeur approchée à 10^{-4} près de P_3 .

5. L'élève interrogé n'est pas en seconde. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_4 que ce soit un garçon.

Partie B

Durant une pause, le CDI accueille n élèves. On note X la variable aléatoire représentant le nombre de filles parmi ces n élèves.

1. X suit une loi binomiale de paramètres n et p . Donner la valeur de p .
2. Donner, en fonction de n , la probabilité P_5 qu'il n'y ait aucune fille.
3. Donner, en fonction de n la probabilité P_6 qu'il y ait au moins une fille.
4. Déterminer le nombre minimal n_0 d'élèves accueillis au CDI durant cette pause pour que la probabilité qu'il y ait au moins une fille soit supérieure à 0,99. Détailler les calculs.

Partie C

On rappelle que, d'après l'enquête, la proportion de filles fréquentant le CDI est égale à 0,6.

1. Soit F la variable aléatoire représentant la fréquence de filles dans un échantillon de 100 élèves pris au hasard, fréquentant le CDI. On admet que F suit une loi normale. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95% de F . Les valeurs numériques des bornes de I seront arrondies à 10^{-3} près.
2. En fin de matinée, le documentaliste constate que 100 élèves dont 68 filles sont venus au CDI. Peut-on affirmer, au seuil de risque de 5%, que la fréquence des filles observée au CDI dans la matinée confirme l'hypothèse de l'enquête ? Expliquer pourquoi.

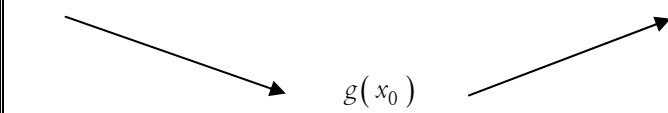
Exercice 2

On considère la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ pour tout réel x de $]1; +\infty[$.

On note C_g la courbe représentative de g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. g' désigne la dérivée de g . Déterminer, pour tout $x > 1$, $g'(x)$.

2. On donne ci-dessous le tableau des variations de g :

x	1	x_0	$+\infty$
g'		-	+
g			

Donner la valeur de x_0 . Calculer $g(x_0)$.

3. Soit m un réel. Donner, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation : $g(x) = m$.

4. a. Dédire de la question précédente que l'équation $g(x) = 4$ a deux solutions. On les notera x_1 et x_2 , avec $x_1 < x_2$.

b. Tracer la courbe C_g . Placer les valeurs x_1 et x_2 . Laisser les traits de construction.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie par : $f(x) = x - 4\ln x$ pour tout réel x de $]0; +\infty[$.

On note C_f la courbe représentative de f dans le même repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Donner $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$.

b. Que vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$? En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. f' désigne la dérivée de f . Donner, pour tout $x > 0$, $f'(x)$.

3. Soit I le point de la courbe C_f d'abscisse 1. Donner une équation de la tangente à C_f en I .

4. Dresser le tableau des variations de f . f admet un extremum au point M de coordonnées (x_M, y_M) . Donner les valeurs exactes de x_M et de y_M ainsi qu'une valeur approchée de y_M à 10^{-1} près.

5. a. Expliquer pourquoi l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution appartenant à $]0; 1]$.

On considère un point P de C_f de coordonnées $(x; f(x))$.

Montrer que P appartient à l'axe des abscisses si et seulement si $g(x) = 4$.

Sur la figure de la question A. 4. b, placer les points I et M , les tangentes à C_f en I et en M , les points A et B d'intersection de C_f avec l'axe des abscisses, puis tracer C_g .

Exercice 3

Partie A

1. Justifier que l'équation $\cos x = 0,2$ a une unique solution dans l'intervalle $[0; \pi]$.

On notera x_0 cette solution.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables	a, b et m sont des réels δ est un réel strictement positif
Début de l'Algorithme	Entrer la valeur de δ a prend la valeur 0 b prend la valeur 3 Tant que $b - a > \delta$ faire

Fin de l'algorithme.	m prend la valeur $\frac{a+b}{2}$ Si $\cos(m) > 0,2$ alors a prend la valeur m sinon b prend la valeur m Fin Si Fin Tantque Afficher a , afficher b
----------------------	--

a. On fait tourner cet algorithme en prenant $\delta = 0,5$. Compléter le tableau en utilisant le nombre de colonnes nécessaires. Quelles sont les valeurs affichées pour a et b à la fin de l'algorithme ?

b. On exécute cet algorithme avec $\delta = 0,1$. Les valeurs affichées sont 1,3125 pour a et 1,40625 pour b . Que peut-on en déduire pour x_0 ?

Partie B

On considère la fonction F définie, pour tout réel x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, par : $F(x) = \sin(2x)$. On note C_F la courbe représentative de F dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. F' désigne la dérivée de F . Déterminer, pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $F'(x)$.

2. Dresser le tableau des variations de F .

3. Tracer la courbe C_F .

Partie C

Soit $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On note D_t le domaine compris entre la courbe C_F , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=t$. Soit A_t l'aire, en unités d'aires, de D_t .

1. Justifier que : $A_t = -\frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{2}$.

2. On considère l'équation (E) : $A_t = 0,4$.

a. Justifier que l'équation (E) est équivalente à l'équation $\cos(2t) = \beta$, où β est un réel à préciser.

b. À l'aide de la question A. 2. b donner une valeur approchée à 0,05 près de la solution t_0 de l'équation (E).

3. Sur la figure de la question B.3. hachurer le domaine D_{t_0} .

Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans P_1 et P_2 d'équations cartésiennes respectives :

$$P_1 : -2x + y + z = 8 \text{ et } P_2 : 2x + 5y - z = -20.$$

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}_1$ normal au plan P_1 et d'un vecteur $\vec{n}_2$ normal au plan P_2 .

b. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

2. On note D_1 la droite d'intersection des plans P_1 et P_2 .

a. Justifier que le point $A(-4; -2; 2)$ appartient à D_1 .

b. Montrer que le vecteur $\vec{u}_1(1; 0; 2)$ est un vecteur directeur de la droite D_1 .

3. Donner un système d'équations paramétriques de la droite D_1 en notant t le paramètre.

4. On considère la droite D_2 définie par le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = 5 \\ y = k \\ z = -2 + k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

Dans cette question, on va montrer que les droites D_1 et D_2 sont non coplanaires.

- Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}_2$ de la droite D_2 .
 - Justifier que les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.
 - Montrer que l'intersection $D_1 \cap D_2$ est vide.
5. Soit H un point de la droite D_1 et K un point de la droite D_2 .
- Donner les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{HK}$ en fonction des paramètres t et k .
 - Montrer que la droite (HK) est perpendiculaire à D_1 si et seulement si on a : $5t - 2k = 1$.
 - De même, la droite (HK) est perpendiculaire à D_2 si et seulement si t et k vérifient la condition $at + bk = c$ où a, b, c sont trois réels. Donner les valeurs de ces trois réels.
 - Pour quelles valeurs de t et k la droite (HK) est-elle perpendiculaire aux deux droites D_1 et D_2 ? Donner alors les coordonnées de H et de K .
 - Cette perpendiculaire commune (HK) aux droites D_1 et D_2 permet de définir la distance entre les droites D_1 et D_2 . Cette distance d est égale à la longueur HK . Donner la valeur exacte de d .

7-4 : Concours Sciences-Po Paris

Calculatrice autorisée ; durée 3 heures.

Exercice Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

- Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 2$.

La suite (u_n) est décroissante.

- Soit (u_n) une suite croissante et majorée. La suite (u_n^2) est aussi croissante et majorée.

- Soit b un nombre réel et soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par : $f(x) = x^2 + bx + 4$. Le minimum de la fonction f est inférieur ou égal à 4.

- L'équation $e^x - 2e^{-x} = -1$ admet 2 solutions réelles.

- La courbe représentative de la fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est toujours au-dessous de sa tangente en 1.

- Une usine fabrique, en grande quantité, des rondelles d'acier pour la construction. On admet que 3 % des rondelles ont un diamètre défectueux.

On prélève au hasard 10 rondelles dans le stock pour vérification du diamètre. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. La probabilité de tirer au moins une rondelle au diamètre défectueux est égale à 0,263 arrondi à 10^{-3} près.

- Une urne contient 10 boules blanches et 4 boules rouges. Un joueur tire successivement et avec remise 20 boules de l'urne.

Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 € et pour chaque boule rouge tirée, il perd 3 €.

On désigne par G la variable aléatoire égale au gain du joueur. L'espérance de G est de $\frac{200}{7}$.

- Soient les points $A(-2 ; 1)$, $B(2 ; 2)$ et $C(1 ; 5)$. Le triangle ABC est rectangle isocèle.

- Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, une équation cartésienne de la droite d passant par le point $A(3 ; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\frac{-1}{2} ; \frac{5}{3}\right)$ est $-3x + 10y - 1 = 0$.

- On considère l'algorithme suivant :

Traitement	Affecter 1 à S Affecter 1 à n Tant que $S < 1,5$ Affecter $n+1$ à n
------------	--

	Affecter $S + \frac{1}{n^2}$ à S Fin tant que
Sortie	Afficher la valeur de S

L'algorithme calcule la somme $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2}$.

Problème

Les parties A, B et C de ce problème sont dans une large mesure indépendantes.

L'objet de ce problème est d'étudier la rémunération d'un capital donné sur un compte en faisant varier la période pour l'application d'un taux d'intérêt.

Partie A : Calculs d'intérêts

Dans ce problème on considère l'évolution au cours d'une année d'un capital de 1 millier d'euros placé en début d'année sur un compte bancaire rémunéré.

Supposons dans un premier temps que le compte est rémunéré avec un taux d'intérêt annuel de 10 %. Au bout d'un an le montant des intérêts est alors égal à 10 % de 1 millier d'euros soit un montant de 0,1 millier d'euros. Le capital disponible sur le compte devient alors égal à 1,1 milliers d'euros. Résumons avec un tableau (T_1) :

	Début janvier	Fin décembre
Intérêts		0,1
Capital	1	1,1

Supposons maintenant que le compte est rémunéré avec un taux de 5 % mais tous les 6 mois et résumons dans un tableau l'évolution du capital et des intérêts au bout de 6 mois (fin juin) puis au bout de 12 mois (fin décembre). On obtient alors le tableau (T_2) suivant :

	Début Janvier	Fin Juin	Fin Décembre
Intérêts		0,05	$1,05 \times 0,05 = 0,0525$
Capital	1	1,05	1,1025

1. Les trois capitaux successifs figurant dans la dernière ligne du tableau (T_2) ci-dessus sont-ils les premiers termes d'une suite géométrique ? Si oui, en donner la raison.

2. On suppose dans cette question que le compte est rémunéré chaque mois avec un taux égal à $\frac{a}{12}$ % où a est un réel strictement positif.

En appliquant les mêmes méthodes de calcul que précédemment, compléter le tableau ci-dessous en prenant $a = 10$. On arrondira les résultats à 10^{-4} près.

	Début 01	Début 02	Début 03	Début 04	Début 05	Début 06	
Intérêts							
Capital	1						
	Début 07	Début 08	Début 09	Début 10	Début 11	Début 12	Fin 2012
Intérêts							
Capital							

3. Expliquer pourquoi les capitaux successifs du tableau précédent sont les 13 premiers termes d'une suite géométrique de raison $\left(1 + \frac{1}{120}\right)$. En déduire la valeur exacte du capital à la fin du mois de décembre.

4. Soit n un entier non nul. On se place maintenant dans le cas d'une banque appliquant n fois au cours de l'année (à intervalles réguliers) un taux d'intérêt égal à $\frac{a}{n}\%$ où a est un réel strictement positif.

Proposer et justifier une formule permettant de calculer le capital, noté U_n , présent sur le compte à la fin décembre, c'est-à-dire au bout de n périodes. On définit ainsi une suite (U_n) .

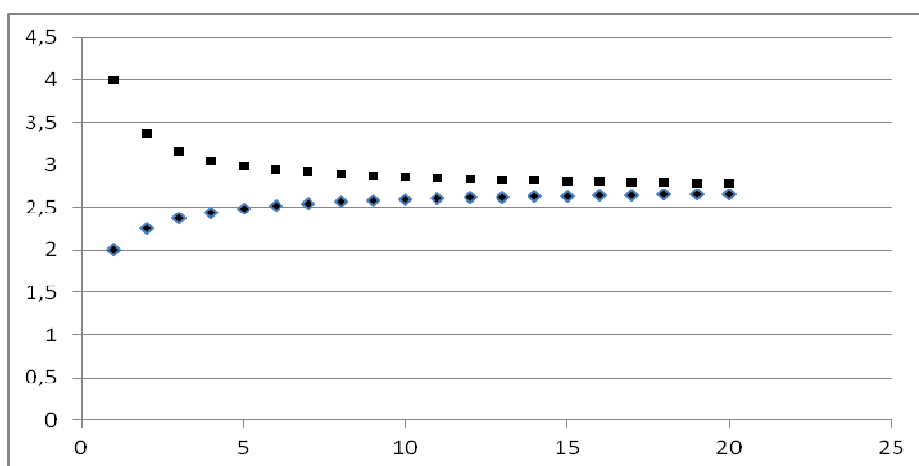
Partie B : Etude théorique

L'objectif de cette partie est de proposer un algorithme permettant de déterminer une valeur approchée du nombre e (où $\ln e = 1$).

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n non nul par : $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et

$$b_n = a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

1. Le graphique suivant représente les 20 premiers termes des suites (a_n) et (b_n) .



a. Par le calcul de quelques termes (ou par une autre justification) identifier les suites (a_n) et (b_n) sur ce graphique.

b. Conjecturer leur sens de variation.

Pour la suite du problème, on admet que les conjectures sont validées.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leq b_n$.

3. Convergence de la suite (a_n) .

a. Donner une interprétation graphique de l'inégalité suivante : pour tout nombre réel x , $1 + x \leq e^x$.

b. Démontrer, en utilisant l'inégalité précédente que l'on admet, que pour tout entier naturel n non nul, $a_n \leq e$.

c. Prouver que la suite (a_n) est convergente.

Dans la suite de l'exercice on admet que la suite (a_n) converge vers le nombre e .

4. Convergence de la suite (b_n) .

a. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{e}{n}$.

b. En déduire que la suite (b_n) est convergente et préciser sa limite.

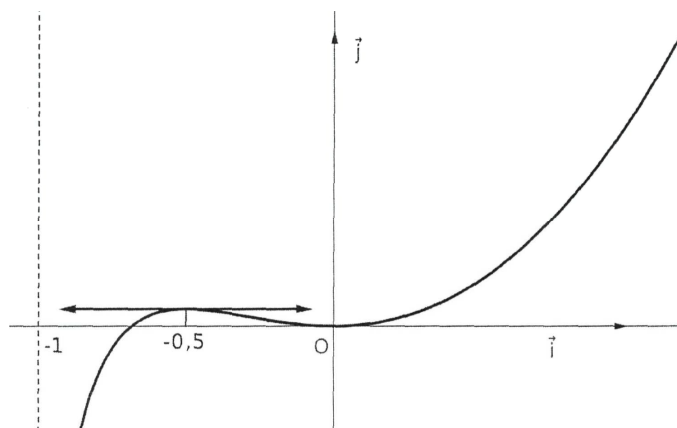
c. Démontrer alors que pour tout entier naturel n non nul, $b_n \geq e$.

d. En déduire que $e \leq 4$ et donc que, pour tout entier naturel n non nul : $0 \leq b_n - a_n \leq \frac{4}{n}$.

5. Proposer un algorithme permettant de déterminer un encadrement du nombre e à 10^{-2} près.

Partie C : Généralisation

Sur le graphique ci-dessous on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $] -1; +\infty[$.



On sait qu'il existe un nombre réel c tel que $f(x) = \ln(1+x) - x + cx^2$.

1. En utilisant le graphique, donner la valeur de $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2. Démontrer que pour tout réel x : $f'(x) = \frac{2cx^2 + (2c-1)x}{1+x}$.

3. En déduire la valeur de c .

4. a. Démontrer que pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$.

b. À l'aide de l'inégalité établie graphiquement à la question 3. a. de la partie B, prouver que, pour tout réel $x > -1$: $\ln(1+x) \leq x$.

c. En déduire que pour tout réel $x \geq 0$: $-x^2 \leq \ln(1+x) - x \leq 0$.

5. Prouver que, pour tout réel $t \geq 0$ et tout entier naturel n non nul : $-\frac{t^2}{n} \leq n \ln\left(1 + \frac{t}{n}\right) - t \leq 0$.

6. Pourquoi peut-on en déduire que, pour tout réel $t \geq 0$, la suite de terme général $\left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ tend vers e^t ?

7. Déterminer la limite de la suite (U_n) définie à la question A. 4.