

## Antilles - Guyane

---

### 1. Exercice 1 (6 points)

Une entreprise de jouets en peluche souhaite commercialiser un nouveau produit et à cette fin, effectue divers tests permettant de rejeter les peluches ne répondant pas aux normes en vigueur.

D'expérience, le concepteur sait que 9 % des nouveaux jouets ne répondent pas aux normes.

À l'issue des tests, il est noté que

96 % des peluches répondant aux normes sont acceptées par les tests ;

97 % des peluches ne répondant pas aux normes ne sont pas acceptées à l'issue des tests.

On prélève une peluche au hasard dans la production de l'entreprise. On note

N l'évènement : « la peluche répond aux normes en vigueur » ;

A l'évènement : « la peluche est acceptée à l'issue des tests ».

#### Partie A

1. Construire un arbre pondéré représentant la situation exposée précédemment.
2. Démontrer que la probabilité qu'une peluche soit acceptée à l'issue des tests est 0,8763.
3. Calculer la probabilité qu'une peluche qui a été acceptée à l'issue des tests soit véritablement aux normes en vigueur. Arrondir le résultat au dix-millième.

#### Partie B

On considère que la vie d'une peluche se termine lorsqu'elle subit un dommage majeur (déchirure, arrachage ...). On admet que la durée de vie en années d'une peluche, notée  $D$ , suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ .

1. On sait que  $\mathbb{P}(D \leq 4) = 0,5$ . Interpréter ce résultat dans le contexte de cet exercice.

Calculer la valeur exacte de  $\lambda$ .

2. On prendra ici  $\lambda = 0,1733$ .

Le jour de ses trois ans, un enfant qui joue avec cette peluche depuis sa naissance décide, voyant qu'elle est encore en parfait état, de la donner à sa soeur qui vient de naître.

Calculer la probabilité pour que sa soeur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires. Arrondir le résultat au dix-millième.

#### Partie C

Un cabinet de sondages et d'expertise souhaite savoir quel est le réel intérêt des enfants pour ce jouet. À la suite d'une étude, il apparaît que pour un enfant de quatre ans, le nombre de jours, noté  $J$ , où la peluche est son jouet préféré suit une loi normale de paramètres  $\mu$  et  $\sigma$ . Il apparaît que  $\mu = 358$  jours.

1. Soit  $X = \frac{J - 358}{\sigma}$ . Quelle est la loi suivie par  $X$  ?
2. On sait que  $\mathbb{P}(J \leq 385) = 0,975$ . Déterminer la valeur de  $\sigma$  arrondie à l'entier le plus proche.

### 2. Exercice 2 (6 points)

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie et dérivable sur l'intervalle  $[0; +\infty[$  par  $f(x) = xe^{-x}$ .

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. Déterminer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  sur  $[0; +\infty[$  et en déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $[0; +\infty[$ .

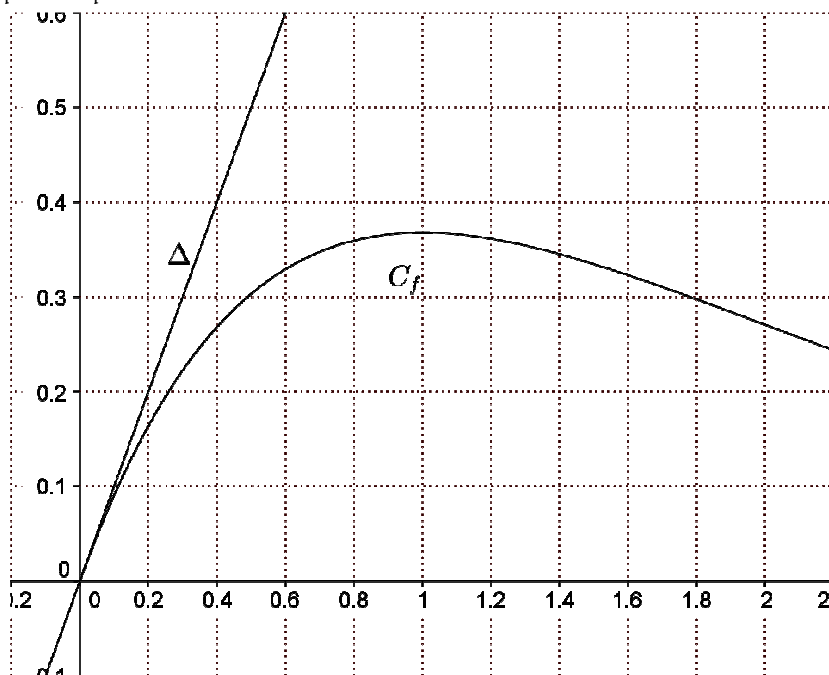
On donne ci-dessous la courbe  $C_f$  représentative de la fonction  $f$  dans un repère du plan.  
La droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  a aussi été tracée.

**Partie B**

Soit la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Placer sur le graphique, en utilisant la courbe  $C_f$  et la droite  $\Delta$ , les points  $A_0, A_1$  et  $A_2$  d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives  $u_0, u_1$  et  $u_2$ . Laisser les tracés explicatifs apparents.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n > 0$ .
3. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
4. a. Montrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
- b. On admet que la limite de la suite  $(u_n)$  est solution de l'équation  $xe^{-x} = x$ .

Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.



**Partie C**

On considère la suite  $(S_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .

Compléter l'algorithme suivant afin qu'il calcule  $S_{100}$ .

Déclaration des variables	$S$ et $u$ sont des nombres réels $k$ est un nombre entier
Initialisation	$u$ prend la valeur . . . . . $S$ prend la valeur . . . . .
Traitement	Pour $k$ variant de 1 à . . . . $u$ prend la valeur $u \times e^{-u}$ $S$ prend la valeur . . . . Fin Pour Afficher . . . . .

### 3. Exercice 3 (3 points)

---

On considère l'équation  $(E_1) : e^x - x^n = 0$  où  $x$  est un réel strictement positif et  $n$  un entier naturel non nul.

1. Montrer que l'équation  $(E_1)$  est équivalente à l'équation  $(E_2) : \ln x - \frac{x}{n} = 0$ .
2. Pour quelle(s) valeur(s) de  $n$  l'équation  $(E_1)$  admet-elle deux solutions ?

### 4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

---

On note  $\mathbb{C}$  l'ensemble des nombres complexes.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On prendra comme unité 2 cm sur chaque axe.

Le graphique sera fait sur une feuille de papier millimétré et complété au fur et à mesure des questions.

On considère la fonction  $f$  qui à tout nombre complexe  $z$  associe

$$f(z) = z^2 + 2z + 9.$$

1. Calculer l'image de  $-1 + i\sqrt{3}$  par la fonction  $f$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 5$ . Écrire sous forme exponentielle les solutions de cette équation.

Construire alors sur le graphique, à la règle et au compas, les points A et B dont l'affixe est solution de l'équation (A étant le point dont l'affixe a une partie imaginaire positive).

On laissera les traits de construction apparents.

3. Soit  $\lambda$  un nombre réel. On considère l'équation  $f(z) = \lambda$  d'inconnue  $z$ .

Déterminer l'ensemble des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles l'équation  $f(z) = \lambda$  admet deux solutions complexes conjuguées.

4. Soit (F) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  vérifie  $|f(z) - 8| = 3$ .

Prouver que (F) est le cercle de centre  $\Omega(-1; 0)$  et de rayon  $\sqrt{3}$ . Tracer (F) sur le graphique.

5. Soit  $z$  un nombre complexe, tel que  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.

a. Montrer que la forme algébrique de  $f(z)$  est  $x^2 - y^2 + 2x + 9 + i(2xy + 2y)$ .

b. On note (E) l'ensemble des points du plan complexe dont l'affixe  $z$  est telle que  $f(z)$  soit un nombre réel. Montrer que (E) est la réunion de deux droites  $D_1$  et  $D_2$  dont on précisera les équations.

Compléter le graphique en traçant ces droites.

6. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des ensembles (E) et (F).

### 5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

---

Dans une ville, une enseigne de banque nationale possède deux agences, appelées X et Y.

D'une année sur l'autre, une partie des fonds de l'agence X est transférée à l'agence Y, et réciproquement.

De plus, chaque année, le siège de la banque transfère une certaine somme à chaque agence.

Soit  $n$  un entier naturel. On note  $x_n$  la quantité de fonds détenue par l'agence X et  $y_n$  la quantité de fonds détenue par l'agence Y au 1<sup>er</sup> Janvier de l'année  $2014+n$ , exprimées en millions d'euros.

On note  $U_n$  la matrice  $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  et on note  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

On suppose que le 1<sup>er</sup> Janvier de l'année 2014, l'agence X détient 50 millions d'euros et l'agence Y détient 10 millions d'euros.

L'évolution de la quantité de fonds est régie par la relation suivante :

$$U_{n+1} = A \times U_n + B, \text{ où } A = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Interpréter, dans le contexte de l'exercice, le coefficient 0,6 de la matrice A et le coefficient 3 de la matrice B.

2. Donner la matrice  $U_0$  puis calculer la quantité de fonds détenue par chacune des agences X et Y en 2015, exprimée en millions d'euros.

3. On note  $D = \begin{pmatrix} 0,3 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  et  $Q = \begin{pmatrix} 0,25 & -0,375 \\ 0,25 & 0,125 \end{pmatrix}$ .

a. Donner sans détailler le calcul, la matrice  $P \times D \times Q$ .

b. Expliciter le calcul du coefficient de la première ligne et de la deuxième colonne du produit matriciel  $Q \times P$ . Dans la suite, on admettra que  $Q \times P = I$ .

On admettra dans la suite de cet exercice que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $A^n = P \times D^n \times Q$ .

4. On pose pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n = U_n - \begin{pmatrix} 5 \\ 20/3 \end{pmatrix}$ .

a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_{n+1} = A \times V_n$ .

b. Déterminer  $V_0$  puis pour tout entier naturel  $n$ , donner l'expression de  $V_n$  en fonction de  $A$ ,  $n$  et  $V_0$ .

5. Soit  $n$  un entier naturel. On admet que  $A^n = \begin{pmatrix} 0,25 \times 0,3^n + 0,75 \times 0,7^n & 0,375(0,7^n - 0,3^n) \\ 0,375(0,7^n - 0,3^n) & 0,75 \times 0,3^n + 0,25 \times 0,7^n \end{pmatrix}$ .

a. Déterminer le coefficient de la première ligne de la matrice  $V_n$  en détaillant les calculs.

b. En déduire l'expression de  $x_n$  en fonction de  $n$ .

c. Déterminer la limite de  $x_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  et interpréter ce résultat dans le cadre du problème.