

## Polynésie

---

### 1. Exercice 1 (5 points)

---

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points

$$A(5 ; -5 ; 2), B(-1 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 2) \text{ et } D(6 ; 6 ; -1).$$

- Déterminer la nature du triangle BCD et calculer son aire.
- a. Montrer que le vecteur  $\vec{n}(-2 ; 3 ; 1)$  est un vecteur normal au plan (BCD).  
b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
- Déterminer une représentation paramétrique de la droite ( $d$ ) orthogonale au plan (BCD) et passant par le point A.
- Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite ( $d$ ) et du plan (BCD).
- Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.
- Calculer les distances AB et AC.

Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle  $\widehat{BAC}$ .

### 2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

---

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ .

- Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .
- On considère les deux algorithmes suivants :

	Algorithme 1	Algorithme 2
Variables	$n$ est un entier naturel $u$ est un réel	$n$ est un entier naturel $u$ est un réel
Entrée	Saisir la valeur de $n$	Saisir la valeur de $n$
Traitement	$u$ prend la valeur 0 Pour $i$ allant de 1 à $n$ $u$ prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour	$u$ prend la valeur 0 Pour $i$ allant de 0 à $n - 1$ : $u$ prend la valeur $u + 2i + 2$ Fin Pour
Sortie	Afficher $u$	Afficher $u$

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de  $u_n$ , la valeur de l'entier naturel  $n$  étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où  $n$  figure en abscisse et  $u_n$  en ordonnée.

a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite  $(u_n)$  ?

Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = an^2 + bn + c$ .

Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de  $a$ ,  $b$  et  $c$  à l'aide des informations fournies.

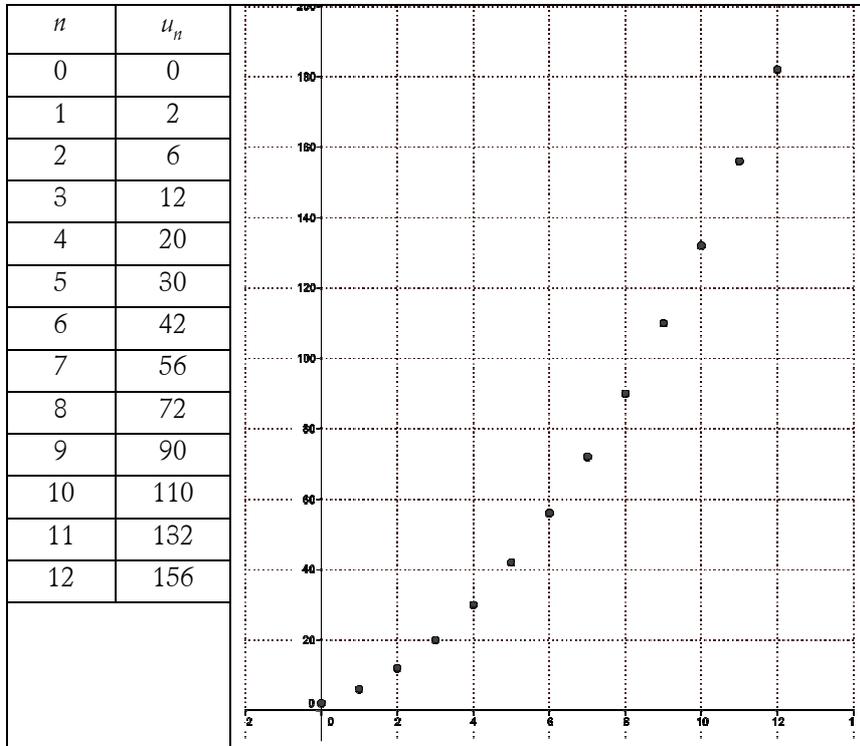
4. On définit, pour tout entier naturel  $n$ , la suite  $(v_n)$  par :  $v_n = u_{n+1} - u_n$ .

a. Exprimer  $v_n$  en fonction de l'entier naturel  $n$ . Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$  ?

b. On définit, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ .

Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = (n+1)(n+2)$ .

c. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $S_n = u_{n+1} - u_0$ , puis exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .



### 3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Dans cet exercice, on appelle numéro du jour de naissance le rang de ce jour dans le mois et numéro du mois de naissance, le rang du mois dans l'année.

Par exemple, pour une personne née le 14 mai, le numéro du jour de naissance est 14 et le numéro du mois de naissance est 5.

#### Partie A

Lors d'une représentation, un magicien demande aux spectateurs d'effectuer le programme de calcul (A) suivant :

« Prenez le numéro de votre jour de naissance et multipliez-le par 12.

Prenez le numéro de votre mois de naissance et multipliez-le par 37.

Ajoutez les deux nombres obtenus.

Je pourrai alors vous donner la date de votre anniversaire ».

Un spectateur annonce 308 et en quelques secondes, le magicien déclare :

« Votre anniversaire tombe le 1<sup>er</sup> août ! ».

1. Vérifier que pour une personne née le 1<sup>er</sup> août, le programme de calcul (A) donne effectivement le nombre 308.

2. a. Pour un spectateur donné, on note  $j$  le numéro de son jour de naissance,  $m$  celui de son mois de naissance et  $z$  le résultat obtenu en appliquant le programme de calcul (A).

Exprimer  $z$  en fonction de  $j$  et de  $m$  et démontrer que  $z$  et  $m$  sont congrus modulo 12.

b. Retrouver alors la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 474 en appliquant le programme de calcul (A).

#### Partie B

Lors d'une autre représentation, le magicien décide de changer son programme de calcul (programme B) : pour un spectateur dont le numéro du jour de naissance est  $j$  et le numéro du mois de naissance est  $m$ , le magicien demande de calculer le nombre  $z$  défini par  $z = 12j + 31m$ .

Dans les questions suivantes, on étudie différentes méthodes permettant de retrouver la date d'anniversaire du spectateur.

### 1. Première méthode

On considère l'algorithme suivant :

	Algorithme
Variables	$j$ et $m$ sont des entiers naturels
Traitement	Pour $m$ allant de 1 à 12 faire : Pour $j$ allant de 1 à 31 faire : $z$ prend la valeur $12j + 31m$ Afficher $z$ Fin Pour Fin Pour

Modifier cet algorithme afin qu'il affiche toutes les valeurs de  $j$  et de  $m$  telles que  $12j + 31m = 503$ .

### 2. Deuxième méthode

- Démontrer que  $7m$  et  $z$  ont le même reste dans la division euclidienne par 12.
- Pour  $m$  variant de 1 à 12, donner le reste de la division euclidienne de  $7m$  par 12.
- En déduire la date de l'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme de calcul (B).

### 3. Troisième méthode

- Démontrer que le couple  $(-2 ; 17)$  est solution de l'équation  $12x + 31y = 503$ .
- En déduire que si un couple d'entiers relatifs  $(x ; y)$  est solution de l'équation  $12x + 31y = 503$ , alors
 
$$12(x + 2) = 31(17 - y).$$
- Déterminer l'ensemble de tous les couples d'entiers relatifs  $(x ; y)$ , solutions de l'équation
 
$$12x + 31y = 503.$$
- Démontrer qu'il existe un unique couple d'entiers relatifs  $(x ; y)$  tel que  $1 \leq y \leq 612$ .

En déduire la date d'anniversaire d'un spectateur ayant obtenu le nombre 503 avec le programme (B).

### 4. Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Zoé se rend à son travail à pied ou en voiture. Là où elle habite, il pleut un jour sur quatre.

Lorsqu'il pleut, Zoé se rend en voiture à son travail dans 80 % des cas.

Lorsqu'il ne pleut pas, elle se rend à pied à son travail avec une probabilité égale à 0,6.

Affirmation 1 : « Zoé utilise la voiture un jour sur deux. »

2. Dans l'ensemble  $E$  des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements  $A$  et  $B$ .

Affirmation 2 : « Si  $A$  et  $B$  sont indépendants, alors  $A$  et  $\bar{B}$  sont aussi indépendants. »

3. On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire  $T$  qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,7.

Affirmation 3 : « La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est 0,7 environ. »

Affirmation 4 : « Le temps d'attente moyen à ce guichet est de sept minutes. »

4. On sait que 39 % de la population française est du groupe sanguin A+.

On cherche à savoir si cette proportion est la même parmi les donneurs de sang.

On interroge 183 donneurs de sang et parmi eux, 34 % sont du groupe sanguin A+.

Affirmation 5 : « On ne peut pas rejeter, au seuil de 5%, l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes du groupe sanguin A+ parmi les donneurs de sang est de 39% comme dans l'ensemble de la population. »

### 5. Exercice 4 (5 points)

---

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^x$  et  $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1$ .

On note  $C_f$  et  $C_g$  les courbes représentatives des fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthogonal.

1. Démontrer que les courbes  $C_f$  et  $C_g$  ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente  $T$  dont on déterminera une équation.

2. Étude de la position relative de la courbe  $C_g$  et de la droite  $T$ .

Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$ .

a. Déterminer la limite de la fonction  $h$  en  $-\infty$ .

b. Justifier que, pour tout réel  $x$ ,  $h(x) = x \left( \frac{e^{\frac{x}{2}}}{2} - 1 - \frac{2}{x} \right)$ . En déduire la limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$ .

c. On note  $h'$  la fonction dérivée de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

Pour tout réel  $x$ , calculer  $h'(x)$  et étudier le signe de  $h'(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

d. Dresser le tableau de variations de la fonction  $h$  sur  $\mathbb{R}$ .

e. En déduire que, pour tout réel  $x$ ,  $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 2$ .

f. Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe  $C_g$  et de la droite  $T$  ?

3. Étude de la position relative des courbes  $C_f$  et  $C_g$

a. Pour tout réel  $x$ , développer l'expression  $\left( e^{\frac{x}{2}} - 1 \right)^2$ .

b. Déterminer la position relative des courbes  $C_f$  et  $C_g$ .

4. Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine compris entre les courbes  $C_f$  et  $C_g$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ .