France Métropolitaine

1. Exercice 1 (5 points)

Partie A

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C_1 la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = x + e^{-x}$.

1. Justifier que C_1 passe par le point A de coordonnées (0 ; 1).

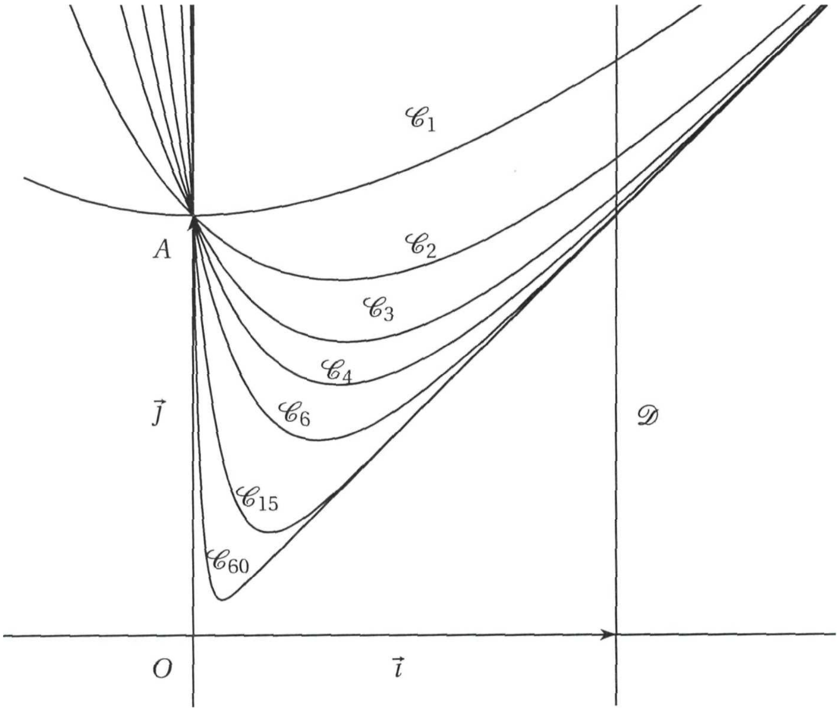
2. Déterminer le tableau de variation de la fonction f_1. On précisera les limites de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \int_0^1 \left(x + e^{-nx} \right) dx$.

1. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, pour tout entier naturel n, on note C_n la courbe représentative de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x + e^{-nx}$. Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe C_n pour plusieurs valeurs de l'entier n et la droite D d'équation $x = 1$.

a. Interpréter géométriquement l'intégrale I_n .



b. En utilisant cette interprétation, formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) et sa limite éventuelle. On précisera les éléments sur lesquels on s'appuie pour conjecturer.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 e^{-(n+1)x} \left(1 - e^x \right) dx$.

En déduire le signe de $I_{n+1} - I_n$ puis démontrer que la suite (I_n) est convergente.

3. Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (I_n).

2. Exercice 2 (5 points)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Un laboratoire pharmaceutique propose des tests de dépistage de diverses maladies. Son service de communication met en avant les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne malade présente un test positif est 0,99 ;
- la probabilité qu'une personne saine présente un test positif est 0,001.

1. Pour une maladie qui vient d'apparaître, le laboratoire élabore un nouveau test. Une étude statistique permet d'estimer que le pourcentage de personnes malades parmi la population d'une métropole est égal à 0,1 %. On choisit au hasard une personne dans cette population et on lui fait subir le test.

On note M l'événement « la personne choisie est malade » et T l'événement « le test est positif».

a. Traduire l'énoncé sous la forme d'un arbre pondéré.

b. Démontrer que la probabilité $\mathbb{P}(T)$ de l'événement T est égale à $1,989\times 10^{-3}$.

c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier la réponse.

Affirmation : « Si le test est positif, il y a moins d'une chance sur deux que la personne soit malade ».

2. Le laboratoire décide de commercialiser un test dès lors que la probabilité qu'une personne testée positivement soit malade est supérieure ou égale à 0,95. On désigne par x la proportion de personnes atteintes d'une certaine maladie dans la population. À partir de quelle valeur de x le laboratoire commercialise-t-il le test correspondant ?

Partie B

La chaîne de production du laboratoire fabrique, en très grande quantité, le comprimé d'un médicament.

1. Un comprimé est conforme si sa masse est comprise entre 890 et 920 mg. On admet que la masse en milligrammes d'un comprimé pris au hasard dans la production peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne $\mu = 900$ et d'écart-type $\sigma = 7$.

a. Calculer la probabilité qu'un comprimé prélevé au hasard soit conforme. On arrondira à 10^{-2}.

b. Déterminer l'entier positif h tel que $\mathbb{P}(900-h \le X \le 900+h) \approx 0,99$ à 10^{-3} près.

2. La chaine de production a été réglée dans le but d'obtenir au moins 97 % de comprimés conformes. Afin d'évaluer l'efficacité des réglages, on effectue un contrôle en prélevant un échantillon de 1000 comprimés dans la production. La taille de la production est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement puisse être assimilé à 1000 tirages successifs avec remise.

Le contrôle effectué a permis de dénombrer 53 comprimés non conformes sur l'échantillon prélevé.

Ce contrôle remet-il en question les réglages faits par le laboratoire ? On pourra utiliser un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 %.

3. Exercice 3 (5 points)

On désigne par (E) l'équation $z^4 + 4z^2 + 16 = 0$ d'inconnue complexe z.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 4Z + 16 = 0$.

Écrire les solutions de cette équation sous une forme exponentielle.

2. On désigne par a le nombre complexe dont le module est égal à 2 et dont un argument est égal à $\frac{\pi}{3}$.

Calculer a^2 sous forme algébrique.

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -2 + 2i\sqrt{3}$. On écrira les solutions sous forme algébrique.

3. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le fait que pour tout nombre complexe $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = x - iy$. Démontrer que :

- Pour tous nombres complexes z_1 et z_2, $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

- Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $\overline{z^n} = \left(\overline{z}\right)^n$.

4. Démontrer que si z est une solution de l'équation (E) alors son conjugué $\overline{z}$ est également une solution de (E). En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E). On admettra que (E) a au plus quatre solutions.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Dans l'espace, on considère un tétraèdre *ABCD* dont les faces *ABC, ACD* et *ABD* sont des triangles rectangles et isocèles en *A*. On désigne par *E, F* et *G* les milieux respectifs des côtés [*AB*], [*BC*], et [*CA*].

On choisit *AB* pour unité de longueur et on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$ de l'espace.

1. On désigne par (P) le plan qui passe par *A* et qui est orthogonal à la droite (*DF*). On note *H* le point d'intersection du plan (P) et de la droite (*DF*).

a. Donner les coordonnées des points *D* et *F*.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite (*DF*).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

d. Calculer les coordonnées du point *H*.

e. Démontrer que l'angle $\widehat{EHG}$ est un angle droit.

2. On désigne par *M* un point de la droite (*DF*) et par *t* le réel tel que $\overrightarrow{DM} = t\overrightarrow{DF}$. On note α la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{EMG}$.

Le but de cette question est de déterminer la position du point *M* pour que α soit maximale.

a. Démontrer que $ME^2 = \frac{3}{2}t^2 - \frac{5}{2}t + \frac{5}{4}$.

b. Démontrer que le triangle *MEG* est isocèle en *M*. En déduire que $ME\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

c. Justifier que α est maximale si et seulement si $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.

En déduire que α est maximale si et seulement si ME^2 est minimal.

d. Conclure.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Un pisciculteur dispose de deux bassins A et B pour l'élevage de ses poissons. Tous les ans à la même période :

- il vide le bassin B et vend tous les poissons qu'il contenait et transfère tous les poissons du bassin A dans le bassin B ;
- la vente de chaque poisson permet l'achat de deux petits poissons destinés au bassin A ;
- par ailleurs, le pisciculteur achète en plus 200 poissons pour le bassin A et 100 poissons pour le bassin B.

Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 1, on note respectivement a_n et b_n les effectifs de poissons des bassins A et B au bout de *n* années. En début de première année, le nombre de poissons du bassin A est $a_0 = 200$ et celui du bassin B est $b_0 = 100$.

1. Justifier que $a_1 = 400$ et $b_1 = 300$ puis calculer a_2 et b_2.

2. On désigne par *A* et *B* les matrices telles que $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel *n,* on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

a. Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n + B$.

b. Déterminer les réels x et y tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B$.

c. Pour tout entier naturel n, on pose $Y_n = \begin{pmatrix} a_n + 400 \\ b_n + 300 \end{pmatrix}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n, $Y_{n+1} = AY_n$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $Z_n = Y_{2n}$.

a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = A^2 Z_n$.

En déduire que pour tout entier naturel n, $Z_{n+1} = 2Z_n$.

b. On admet que cette relation de récurrence permet de conclure que $Y_{2n} = 2^n Y_0$ pour tout entier naturel n.

En déduire que $Y_{2n+1} = 2^n Y_1$ puis démontrer que pour tout entier naturel n, $a_{2n} = 600 \times 2^n - 400$ et $a_{2n+1} = 800 \times 2^n - 400$.

4. Le bassin A a une capacité limitée à 10 000 poissons.

a. On donne l'algorithme suivant :

Variables	a, p et n sont des entiers naturels.
Initialisation	Demander à l'utilisateur la valeur de p.
Traitement	Si p est pair Affecter à n la valeur $\frac{p}{2}$ Affecter à a la valeur $600 \times 2^n - 400$ Sinon Affecter à n la valeur $\frac{p-1}{2}$ Affecter à a la valeur $800 \times 2^n - 400$ Fin de Si
Sortie	Afficher a

Que fait cet algorithme ? Justifier la réponse.

b. Écrire un algorithme qui affiche le nombre d'années pendant lesquelles le pisciculteur pourra utiliser le bassin A.