

## Centres Etrangers

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

### 1. Exercice 1 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant quatre questions indépendantes. Pour chaque question, une seule des quatre affirmations proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fautive ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

#### Question 1

Dans un hypermarché, 75% des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.

Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750	b. 0,150	c. 0,462	d. 0,700
----------	----------	----------	----------

#### Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.

La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,900	b. 0,092	c. 0,002	d. 0,267
----------	----------	----------	----------

#### Question 3

Cet hypermarché vend des téléviseurs dont la durée de vie, exprimée en année, peut être modélisée par une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . La durée de vie moyenne d'un téléviseur est de huit ans, ce qui se traduit par :  $\lambda = \frac{1}{8}$ .

La probabilité qu'un téléviseur pris au hasard fonctionne encore au bout de six ans a pour valeur arrondie au millième :

a. 0,750	b. 0,250	c. 0,472	d. 0,528
----------	----------	----------	----------

#### Question 4

Cet hypermarché vend des baguettes de pain dont la masse, exprimée en gramme, est une variable aléatoire réelle qui suit une loi normale de moyenne 200 g. La probabilité que la masse d'une baguette soit comprise entre 184 g et 216 g est égale à 0,954.

La probabilité qu'une baguette prise au hasard ait une masse inférieure à 192 g a pour valeur arrondie au centième :

a. 0,16	b. 0,32	c. 0,84	d. 0,48
---------	---------	---------	---------

### 2. Exercice 2 (4 points)

On définit, pour tout entier naturel  $n$ , les nombres complexes  $z_n$  par : 
$$\begin{cases} z_0 = 16 \\ z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n \end{cases}$$
, pour tout entier naturel  $n$ .

On note  $r_n$  le module du nombre complexe  $z_n$  :  $r_n = |z_n|$ .

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct d'origine  $O$ , on considère les points  $A_n$  d'affixes  $z_n$ .

1. a. Calculer  $z_1$ ,  $z_2$  et  $z_3$ .
- b. Placer les points  $A_1$  et  $A_2$  dans le plan.
- c. Écrire le nombre complexe  $\frac{1+i}{2}$  sous forme trigonométrique.
- d. Démontrer que le triangle  $OA_0A_1$  est isocèle rectangle en  $A_1$ .
2. Démontrer que la suite  $(r_n)$  est géométrique, de raison  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . La suite  $(r_n)$  est-elle convergente ?

Interpréter géométriquement le résultat précédent.

On note  $L_n$  la longueur de la ligne brisée qui relie le point  $A_0$  au point  $A_n$  en passant successivement par les

points  $A_1, A_2, A_3$ , etc. Ainsi  $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1} = A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{n-1} A_n$ .

3. a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  :  $A_n A_{n+1} = r_{n+1}$ .
- b. Donner une expression de  $L_n$  en fonction de  $n$ .
- c. Déterminer la limite éventuelle de la suite  $(L_n)$ .

### 3. Exercice 3 (7 points)

Les parties A et B sont indépendantes.

Une image numérique en noir et blanc est composée de petits carrés (pixels) dont la couleur va du blanc au noir en passant par toutes les nuances de gris. Chaque nuance est codée par un réel  $x$  de la façon suivante :

- $x = 0$  pour le blanc ;
- $x = 1$  pour le noir ;
- $x = 0,01$  ;  $x = 0,02$  et ainsi de suite jusqu'à  $x = 0,99$  par pas de  $0,01$  pour toutes les nuances intermédiaires (du clair au foncé).

L'image A, ci-après, est composée de quatre pixels et donne un échantillon de ces nuances avec leurs codes.

Un logiciel de retouche d'image utilise des fonctions numériques dites « fonctions de retouche ».

Une fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  est dite « fonction de retouche » si elle possède les quatre propriétés suivantes :

- $f(0) = 0$  ;
- $f(1) = 1$  ;
- $f$  est continue sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  ;
- $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

Une nuance codée  $x$  est dite assombrie par la fonction  $f$  si  $f(x) > x$ , et éclaircie, si  $f(x) < x$ .

Ainsi, si  $f(x) = x^2$ , un pixel de nuance codée  $0,2$  prendra la nuance codée  $0,2^2 = 0,04$ . L'image A sera transformée en l'image B ci-dessous.

Si  $f(x) = \sqrt{x}$ , la nuance codée  $0,2$  prendra la nuance codée  $\sqrt{0,2} \approx 0,45$ . L'image A sera transformée en l'image C ci-dessous.

0,20	0,40
0,60	0,80

Image A

0,04	0,16
0,36	0,64

Image B

0,45	0,63
0,77	0,89

Image C

### Partie A

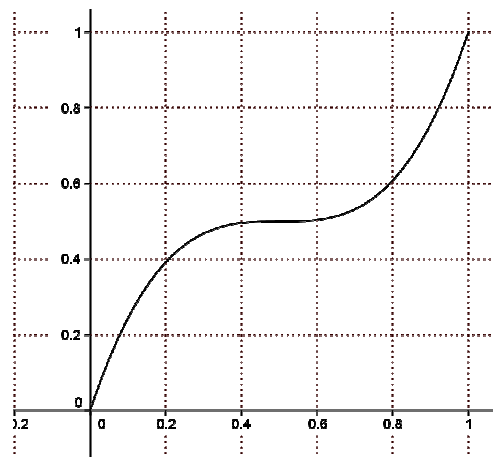
1. On considère la fonction  $f_1$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par :  $f_1(x) = 4x^3 - 6x^2 + 3x$ .

a. Démontrer que la fonction  $f_1$  est une « fonction de retouche ».

b. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f_1(x) \leq x$ , à l'aide du graphique donné ci-contre en faisant apparaître les pointillés utiles.

Interpréter ce résultat en termes d'éclaircissement ou d'assombrissement.

2. On considère la fonction  $f_2$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  par :  $f_2(x) = \ln[1 + (e-1)x]$ .



On admet que  $f_2$  est une fonction de retouche. On définit sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  la fonction  $g$  par :  $g(x) = f_2(x) - x$ .

a. Établir que, pour tout  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$  :  $g'(x) = \frac{(e-2) - (e-1)x}{1 + (e-1)x}$ .

b. Déterminer les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[0 ; 1]$ . Démontrer que la fonction  $g$  admet un maximum en  $\frac{e-2}{e-1}$  dont une valeur arrondie au centième est 0,12.

c. Établir que l'équation  $g(x) = 0,05$  admet sur l'intervalle  $[0 ; 1]$  deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  avec  $\alpha < \beta$ .

On admettra que :  $0,08 < \alpha < 0,09$  et que :  $0,85 < \beta < 0,86$ .

### Partie B

On remarque qu'une modification de nuance n'est perceptible visuellement que si la valeur absolue de l'écart entre le code de la nuance initiale et le code de la nuance modifiée est supérieure ou égale à 0,05.

1. Dans l'algorithme décrit ci-dessous,  $f$  désigne une fonction de retouche.

Quel est le rôle de cet algorithme ?

Variables	x (nuance initiale) : réel ; y (nuance retouchée) : réel ; E (écart) : réel c (compteur) : entier ; k : entier
Initialisation	c prend la valeur 0
Traitement	Pour k allant de 0 à 100, faire x prend la valeur $\frac{k}{100}$ y prend la valeur $f(x)$ E prend la valeur $ y - x $ Si $E > 0,05$ , faire c prend la valeur $c + 1$ Fin si Fin pour
Sortie	Afficher c

2. Quelle valeur affichera cet algorithme si on l'applique à la fonction  $f_2$  définie dans la deuxième question de la partie A ?

### Partie C

Dans cette partie, on s'intéresse à des fonctions de retouche  $f$  dont l'effet est d'éclaircir l'image dans sa globalité, c'est-à-dire telles que, pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[0 ; 1]$ ,  $f(x) \leq x$ .

On décide de mesurer l'éclaircissement global de l'image en calculant l'aire  $A_f$  de la portion de plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction  $f$ , et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = 1$ .

Entre deux fonctions, celle qui aura pour effet d'éclaircir le plus l'image sera celle ayant la plus petite aire. On désire comparer l'effet des deux fonctions suivantes, dont on admet qu'elles sont des fonctions de retouche :

$$f_1(x) = xe^{x^2-1} ; f_2(x) = 4x - 15 + \frac{60}{x+4}.$$

1. a. Calculer  $A_{f_1}$ .

b. Calculer  $A_{f_2}$ .

2. De ces deux fonctions, laquelle a pour effet d'éclaircir le plus l'image ?

### 4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

---

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points :

$$A(1 ; 2 ; 7), B(2 ; 0 ; 2), C(3 ; 1 ; 3), D(3 ; -6 ; 1) \text{ et } E(4 ; -8 ; -4).$$

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit  $\vec{u}(1 ; b ; c)$  un vecteur de l'espace, où  $b$  et  $c$  désignent deux nombres réels.

a. Déterminer les valeurs de  $b$  et  $c$  telles que  $\vec{u}$  soit un vecteur normal au plan (ABC).

b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :  $x - 2y + z - 4 = 0$ .

c. Le point D appartient-il au plan (ABC) ?

3. On considère la droite  $\Delta$  de l'espace dont une représentation paramétrique est : 
$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -4t + 5 \\ z = -2t - 1 \end{cases}$$
 où  $t$  est un

nombre réel.

a. La droite  $\Delta$  est-elle orthogonale au plan (ABC) ?

b. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite  $\Delta$  et du plan (ABC).

4. Étudier la position de la droite (DE) par rapport au plan (ABC).

### 5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

---

#### Partie A : préliminaires

1. a. Soient  $n$  et  $N$  deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2, tels que :  $n^2 \equiv N - 1 \pmod{N}$ .

Montrer que :  $n \times n^3 \equiv 1 \pmod{N}$ .

b. Déduire de la question précédente un entier  $k_1$  tel que :  $5k_1 \equiv 1 \pmod{26}$ .

On admettra que l'unique entier  $k$  tel que :  $0 \leq k \leq 25$  et  $5k \equiv 1 \pmod{26}$  vaut 21.

2. On donne les matrices :  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ .

a. Calculer la matrice  $6A - A^2$ .

b. En déduire que  $A$  est inversible et que sa matrice inverse, notée  $A^{-1}$ , peut s'écrire sous la forme  $A^{-1} = \alpha I + \beta A$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux réels que l'on déterminera.

c. Vérifier que :  $B = 5A^{-1}$ .

d. Démontrer que si  $AX = Y$ , alors  $5X = BY$ .

### Partie B : procédure de codage

Coder le mot « ET », en utilisant la procédure de codage décrite ci-dessous.

- Le mot à coder est remplacé par la matrice  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ , où  $x_1$  est l'entier représentant la première lettre du mot et  $x_2$  l'entier représentant la deuxième, selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- La matrice  $X$  est transformée en la matrice  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$  telle que :  $Y = AX$ .
- La matrice  $Y$  est transformée en la matrice  $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ , où  $r_1$  est le reste de la division euclidienne de  $y_1$  par 26 et  $r_2$  le reste de la division euclidienne de  $y_2$  par 26.
- Les entiers  $r_1$  et  $r_2$  donnent les lettres du mot codé, selon le tableau de correspondance ci-dessus.

Exemple : « OU » (mot à coder) donne « YE » :

$$\text{OU} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 76 \\ 82 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 24 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \text{YE}.$$

### Partie C : procédure de décodage (on conserve les mêmes notations que pour le codage)

Lors du codage, la matrice  $X$  a été transformée en la matrice  $Y$  telle que :  $Y = AX$ .

- Démontrer que :  $\begin{cases} 5x_1 = 2y_1 - y_2 \\ 5x_2 = -3y_1 + 4y_2 \end{cases}$ .
- En utilisant la question 1. b. de la partie A, établir que :  $\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + 5y_2 \pmod{26} \\ x_2 \equiv 15y_1 + 6y_2 \pmod{26} \end{cases}$ .
- Décoder le mot « QP ».