Antilles

1. Exercice 1 (5 points)

Les parties A et B sont indépendantes. Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

Un ostréiculteur élève deux espèces d'huîtres : « la plate » et « la japonaise ». Chaque année, les huîtres plates représentent 15 % de sa production.

Les huîtres sont dites de calibre n° 3 lorsque leur masse est comprise entre 66 g et 85 g.

Seulement 10 % des huîtres plates sont de calibre n° 3, alors que 80 % des huîtres japonaises le sont.

1. Le service sanitaire prélève une huître au hasard dans la production de l'ostréiculteur.

On suppose que toutes les huitres ont la même chance d'être choisies.

On considère les évènements suivants :

* J : « l'huître prélevée est une huître japonaise »,
* C : « l'huître prélevée est de calibre n° 3 ».

a. Construire un arbre pondéré complet traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'huître prélevée soit une huître plate de calibre n° 3.

c. Justifier que la probabilité d'obtenir une huître de calibre n° 3 est 0,695.

d. Le service sanitaire a prélevé une huître de calibre n° 3. Quelle est la probabilité que ce soit une huître plate ?

2. La masse d'une huître peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale de moyenne $\mu = 90$ et d'écart-type $\sigma = 2$.

a. Donner la probabilité que l'huître prélevée dans la production de l'ostréiculteur ait une masse comprise entre 87 g et 89 g.

b. Donner $\mathbb{P}(X > 91)$.

Partie B

Cet ostréiculteur affirme que 60 % de ses huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

Un restaurateur souhaiterait lui acheter une grande quantité d'huîtres mais il voudrait, auparavant, vérifier l'affirmation de l'ostréiculteur.

Le restaurateur achète auprès de cet ostréiculteur 10 douzaines d'huîtres qu'on considèrera comme un échantillon de 120 huîtres tirées au hasard. Sa production est suffisamment importante pour qu'on l'assimile à un tirage avec remise.

Il constate que 65 de ces huîtres ont une masse supérieure à 91 g.

1. Soit F la variable aléatoire qui à tout échantillon de 120 huîtres associe la fréquence de celles qui ont une masse supérieure à 91 g.

Après en avoir vérifié les conditions d'application, donner un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable aléatoire F.

2. Que peut penser le restaurateur de l'affirmation de l'ostréiculteur ?

2. Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction *f* définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A

1. Soit g la fonction définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$.

Dresser, en le justifiant, le tableau donnant les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$ (les limites de g aux bornes de son ensemble de définition ne sont pas attendues). En déduire le signe de $g(x)$.

2. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.

3. On appelle f' la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que, pour tout réel x, $f'(x) = e^{-x} g(x)$.

4. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle α sur $\mathbb{R}$.

Démontrer que $-1 < \alpha < 0$.

6. a. Démontrer que la droite T d'équation $y = 2x + 1$ est tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

b. Étudier la position relative de la courbe C et de la droite T.

Partie B

1. Soit H la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $H(x) = (-x-1)e^{-x}$.

Démontrer que H est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction h définie par $h(x) = xe^{-x}$.

2. On note D le domaine délimité par la courbe C, la droite T et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
Calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine D.

3. Exercice 3 (4 points)

Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points A(1 ; 2 ; 5), B(–1 ; 6 ; 4), C(7 ; –10 ; 8) et D(–1 ; 3 ; 4).

1. Proposition 1 : Les points A, B et C définissent un plan.

2. On admet que les points A, B et D définissent un plan.

Proposition 2 : Une équation cartésienne du plan (ABD) est $x - 2z + 9 = 0$.

3. Proposition 3 : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est $\begin{cases} x = \dfrac{3}{2}t - 15 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\dfrac{3}{2}t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

4. Soit P le plan d'équation cartésienne $2x - y + 5z + 7 = 0$ et
P' le plan d'équation cartésienne $-3x - y + z + 5 = 0$.
Proposition 4 : Les plans P et P' sont parallèles.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n$.

1. a. Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a $u_n > \frac{15}{4} \times 0,5^n$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b. En déduire, que pour tout entier naturel n, $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leq 0,01$.

Entrée	n et u sont des nombres
Initialisation	n prend la valeur 0 u prend la valeur 2
Traitement	Tant que ... (1) n prend la valeur ... (2) u prend la valeur ... (3) Fin Tant que
Sortie	Afficher n

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

En montagne, un randonneur a effectué des réservations dans deux types d'hébergement : l'hébergement A et l'hébergement B.

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.

Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B.

1. a. Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

b. Recopier et complèter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\,;\,y)$ possibles.

Entrée	x et y sont des nombres
Initialisation	
Traitement	Pour x variant de 0 . . . (1) Pour y variant de 0 . . . (2) Si . . . (3) Afficher x et y

	Fin Si Fin Pour Fin Pour

2. Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3. a. Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

b. Déterminer une telle solution.

c. Résoudre l'équation (E) : $8x + 15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4. Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.

Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.

Calculer ces nombres.