

Amérique du Nord

1. Exercice 1 (5 points)

Dans cet exercice, tous les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

Une grande enseigne de cosmétiques lance une nouvelle crème hydratante.

Partie A : Conditionnement des pots

Cette enseigne souhaite vendre la nouvelle crème sous un conditionnement de 50 mL et dispose pour ceci de pots de contenance maximale 55 mL.

On dit qu'un pot de crème est non conforme s'il contient moins de 49 mL de crème.

1. Plusieurs séries de tests conduisent à modéliser la quantité de crème, exprimée en mL, contenue dans chaque pot par une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 50$ et d'écart-type $\sigma = 1,2$.

Calculer la probabilité qu'un pot de crème soit non conforme.

2. La proportion de pots de crème non conformes est jugée trop importante. En modifiant la viscosité de la crème, on peut changer la valeur de l'écart-type de la variable aléatoire X , sans modifier son espérance $\mu = 50$. On veut réduire à 0,06 la probabilité qu'un pot choisi au hasard soit non conforme.

On note σ' le nouvel écart-type, et Z la variable aléatoire égale à $\frac{X-50}{\sigma'}$.

- Préciser la loi que suit la variable aléatoire Z .
- Déterminer une valeur approchée du réel u tel que $\mathbb{P}(Z \leq u) = 0,06$.
- En déduire la valeur attendue de σ' .

3. Une boutique commande à son fournisseur 50 pots de cette nouvelle crème.

On considère que le travail sur la viscosité de la crème a permis d'atteindre l'objectif fixé et donc que la proportion de pots non conformes dans l'échantillon est 0,06.

Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de pots non conformes parmi les 50 pots reçus.

- On admet que Y suit une loi binomiale. En donner les paramètres.
- Calculer la probabilité que la boutique reçoive deux pots non conformes ou moins de deux pots non conformes.

Partie B : Campagne publicitaire

Une association de consommateurs décide d'estimer la proportion de personnes satisfaites par l'utilisation de cette crème.

Elle réalise un sondage parmi les personnes utilisant ce produit. Sur 140 personnes interrogées, 99 se déclarent satisfaites.

Estimer, par intervalle de confiance au seuil de 95 %, la proportion de personnes satisfaites parmi les utilisateurs de la crème.

2. Exercice 2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = 5e^{-x} - 3e^{-2x} + x - 3$.

On note C_f la représentation graphique de la fonction f et D la droite d'équation $y = x - 3$ dans un repère orthogonal du plan.

Partie A : Positions relatives de C_f et D

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - (x - 3)$.

1. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$, $g(x) > 0$.

2. La courbe C_f et la droite D ont-elles un point commun ? Justifier.

Partie B : Étude de la fonction g

On note M le point d'abscisse x de la courbe C_f , N le point d'abscisse x de la droite D et on s'intéresse à l'évolution de la distance MN .

1. Justifier que, pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, la distance MN est égale à $g(x)$.

2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$, calculer $g'(x)$.

3. Montrer que la fonction g possède un maximum sur l'intervalle $[0; +\infty[$ que l'on déterminera.

En donner une interprétation graphique.

Partie C : Étude d'une aire

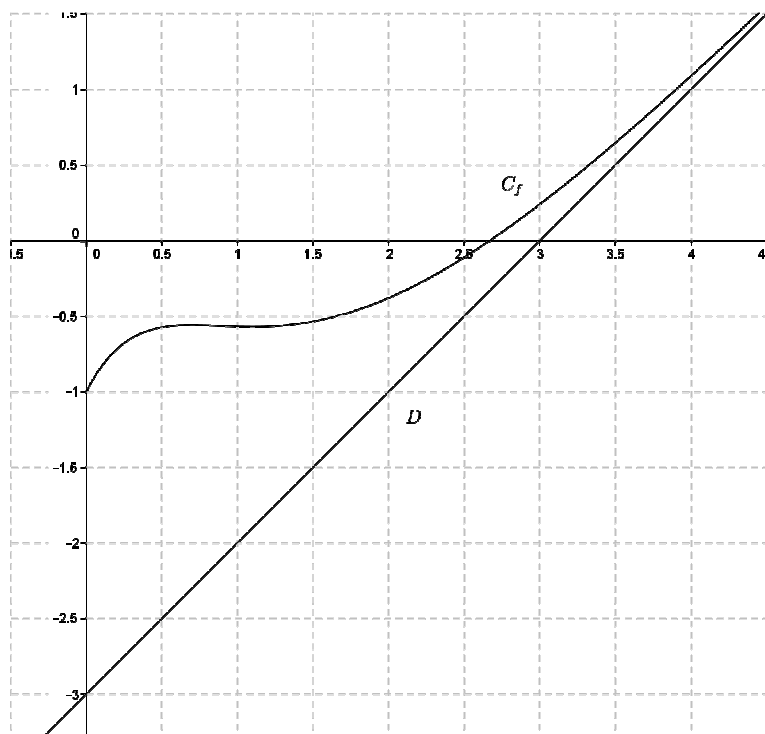
On considère la fonction A définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $A(x) = \int_0^x f(t) - (t-3) dt$.

1. Hachurer sur le graphique ci-dessous le domaine dont l'aire est donnée par $A(2)$.

2. Justifier que la fonction A est croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Pour tout réel x strictement positif, calculer $A(x)$.

4. Existe-t-il une valeur de x telle que $A(x) = 2$?

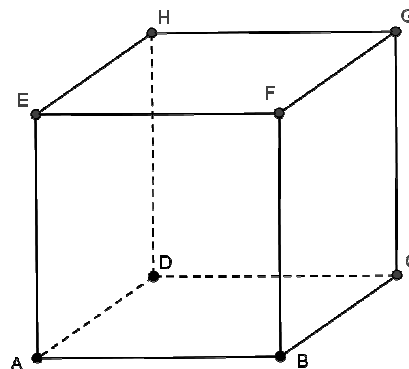


3. Exercice 3 (4 points)

On considère un cube ABCDEFCH donné ci-contre.

On note M le milieu du segment [EH], N celui de [FC] et

P le point tel que $\overline{HP} = \frac{1}{4}\overline{HG}$.



Partie A : Section du cube par le plan (MNP)

1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes en un point L. Construire le point L.

2. On admet que les droites (LN) et (CG) sont sécantes et on note T leur point d'intersection.

On admet que les droites (LN) et (BF) sont sécantes et on note Q leur point d'intersection.

a. Construire les points T et Q en laissant apparents les traits de construction.

b. Construire l'intersection des plans (MNP) et (ABF).

3. En déduire une construction de la section du cube par le plan (MNP).

Amérique du Nord 2 30mai 2014

Partie B

L'espace est rapporté au repère $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$.

1. Donner les coordonnées des points M, N et P dans ce repère.

2. Déterminer les coordonnées du point L.

3. On admet que le point T a pour coordonnées $(1; 1; \frac{5}{8})$. Le triangle TPN est-il rectangle en T ?

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Un volume constant de 2 200 m³ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 800 m³ d'eau et le bassin B contient 1 400 m³ d'eau ;
- tous les jours, 15 % du volume d'eau présent dans le bassin B au début de la journée est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10 % du volume d'eau présent dans le bassin A au début de la journée est transféré vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 800$ et $b_0 = 1400$.

1. Par quelle relation entre a_n et b_n traduit-on la conservation du volume total d'eau du circuit ?

2. Justifier que, pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + 330$.

3. L'algorithme ci-dessous permet de déterminer la plus petite valeur de n à partir de laquelle a_n est supérieur ou égal à 1 100.

Recopier cet algorithme en complétant les parties manquantes (...).

Variables	n est un entier naturel
-----------	---------------------------

	a est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à a la valeur 800
Traitement	Tant que $a < 1100$, faire : Affecter à a la valeur . . . Affecter à n la valeur $n + 1$ Fin Tant que
Sortie	Afficher n

4. Pour tout entier naturel n , on note $u_n = a_n - 1320$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b. Exprimer u_n en fonction de n .

En déduire que, pour tout entier naturel n , $a_n = 1320 - 520 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

5. On cherche à savoir si, un jour donné, les deux bassins peuvent avoir, au mètre cube près, le même volume d'eau. Proposer une méthode pour répondre à ce questionnement.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Un volume constant de 2 200 m³ d'eau est réparti entre deux bassins A et B.

Le bassin A refroidit une machine. Pour des raisons d'équilibre thermique on crée un courant d'eau entre les deux bassins à l'aide de deux pompes.

On modélise les échanges entre les deux bassins de la façon suivante :

- au départ, le bassin A contient 1 100 m³ d'eau et le bassin B contient 1 100 m³ d'eau ;
- tous les jours, 15% du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin B est transféré vers le bassin A ;
- tous les jours, 10% du volume d'eau présent en début de journée dans le bassin A est transféré vers le bassin B et, pour des raisons de maintenance, on transfère également 5 m³ du bassin A vers le bassin B.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin A à la fin du n -ième jour de fonctionnement ;
- b_n le volume d'eau, exprimé en m³, contenu dans le bassin B à la fin du n -ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_0 = 1100$ et $b_0 = 1100$.

Les parties A et B peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Traduire la conservation du volume total d'eau du circuit par une relation liant a_n et b_n .

2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution du volume d'eau dans les bassins.

Donner les formules à écrire et à recopier vers le bas dans les cellules B3 et C3 permettant d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	Jour n	Volume bassin A	Volume bassin B
2	0	1100,00	1100,00
3	1		
4	2	1187,50	1012,50
5	3	1215,63	984,38
6	4	1236,72	963,28
7	5	1252,54	947,46

8	6	1264,40	935,60
9	7	1273,30	926,10
10	8	1279,98	920,02
11	9	1234,98	915,02
12	10	1288,74	911,26
13	11	1291,55	908,45
14	12	1293,66	906,34
15	13	1295,25	904,75
16	14	1296,44	903,56
17	15	1297,33	902,67
18	16	1298,00	902,00
19	17	1298,50	901,50
20	18	1298,87	901,13

3. Quelles conjectures peut-on faire sur l'évolution du volume d'eau dans chacun des bassins ?

Partie B

On considère la matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 \\ 0,1 & 0,85 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $R = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

On admet que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} = MX_n + R$.

1. On note $S = \begin{pmatrix} 1300 \\ 900 \end{pmatrix}$. Vérifier que $S = MS + R$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $X_{n+1} - S = M(X_n - S)$.

Dans la suite, on admettra que, pour tout entier naturel n , $X_n - S = M^n(X_0 - S)$ et que

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,75^n & 0,6 - 0,6 \times 0,75^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,75^n & 0,4 + 0,6 \times 0,75^n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , $X_n = \begin{pmatrix} 1300 - 200 \times 0,75^n \\ 900 + 200 \times 0,75^n \end{pmatrix}$.

3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question 3. de la partie A.

4. On considère que le processus est stabilisé lorsque l'entier naturel n vérifie $1300 - a_n < 1,5$ et $b_n - 900 < 1,5$.

Déterminer le premier jour pour lequel le processus est stabilisé.