ANNALES BACCALAURÉAT 2013

MATHÉMATIQUES TERMINALE S

1. Suites

1-1 : Amérique du Nord 2013, 5 points, non spécialistes

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n est un entier naturel u est un réel positif
Initialisation	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement	Pour i variant de 1 à n : Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n :

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \le 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n) - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1{,}999$.

Variables	n est un entier naturel

	u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement	
Sortie	

1-2 : Liban 2013, 5 points, non spécialistes

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{9}{6-v_n} \end{cases}$.

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.

Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

<table>
<tr><td>Algorithme No 1</td><td>Algorithme No 2</td><td>Algorithme No 3</td></tr>
<tr><td colspan="3">Variables : v est un réel, i et n sont des entiers naturels</td></tr>
<tr><td>Début de l'algorithme
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme</td><td>Début de l'algorithme
Lire n
Pour i variant de 1 à n faire
v prend la valeur 1
Afficher v
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Fin algorithme</td><td>Début de l'algorithme
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
Afficher v
v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
Fin algorithme</td></tr>
</table>

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3-v_n)^2}{6-v_n}$. La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

1-3 : Antilles-Guyane 2013, 5 points, non spécialistes

On considère la suite (z_n) à termes complexes définie par : $z_0 = 1+i$ et, pour tout entier naturel n, par

$$z_{n+1}=\frac{z_n+|z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel n, on pose : $z_n=a_n+ib_n$, où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie A

1. Donner a_0 et b_0.

2. Calculer z_1, puis en déduire que $a_1=\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ et $b_1=\frac{1}{3}$.

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	A et B sont des nombres réels K et N sont des nombres entiers
Initialisation	Affecter à A la valeur 1 Affecter à B la valeur 1
Traitement	Entrer la valeur de N Pour K variant de 1 à N Affecter à A la valeur $\frac{A+\sqrt{A^2+B^2}}{3}$ Affecter à B la valeur $\frac{B}{3}$ Fin Pour Afficher A

a. On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à 10^{-4} près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

Partie B

1. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

En déduire l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n et b_n, et l'expression de b_{n+1} en fonction de b_n.

2. Quelle est la nature de la suite (b_n) ? En déduire l'expression de b_n en fonction de n, et déterminer la limite de la suite (b_n).

3. a. On rappelle que pour tous nombres complexes z et z' : $|z+z'|\leq|z|+|z'|$ (inégalité triangulaire).

Montrer que pour tout entier naturel n, $|z_{n+1}|\leq\frac{2|z_n|}{3}$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n=|z_n|$.

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\sqrt{2}$.

En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|a_n|\leq u_n$.

En déduire que la suite (a_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

1-4 : Asie juin 2013, 5 points, non spécialistes

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $u_{n+1} = \dfrac{1+3u_n}{3+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 1$.

2. a. Établir que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{3+u_n}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n). En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier nature n : $u_{n+1} = \dfrac{1+0{,}5u_n}{0{,}5+u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $\dfrac{1+0{,}5u}{0{,}5+u}$ Afficher u FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

1. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,000 9	0,999 7	1,000 1	0,999 97	1,000 01	0,999 996	1,000 001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n.

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $v_n \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{1+v_n}{1-v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

1-5 : Centres étrangers juin 2013, 5 points, non spécialistes

L'objet de cet exercice est l'étude de la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = \frac{3}{2}$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{2(n+1)}$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

Pour calculer et afficher le terme u_9 de la suite, un élève propose l'algorithme ci-dessous.

Il a oublié de compléter deux lignes.

Variables	n est un entier naturel ; u est un réel.
Initialisation	Affecter à n la valeur 1. Affecter à u la valeur 1,5.

Traitement	Tant que $n < 9$
	    Affecter à u la valeur . . .
	    Affecter à n la valeur . . .
	Fin Tant que

Sortie	Afficher la variable u.

1. Recopier et compléter les deux lignes de l'algorithme où figurent des points de suspension.

2. Comment faudrait-il modifier cet algorithme pour qu'il calcule et affiche tous les termes de la suite de u_2 jusqu'à u_9 ?

3. Avec cet algorithme modifié, on a obtenu les résultats suivants, arrondis au dix-millième :

n	1	2	3	4	5	6	...	99	100
u_n	1,5	0,625	0,375	0,2656	0,2063	0,1693	...	0,0102	0,0101

Au vu de ces résultats, conjecturer le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).

Partie B – Étude mathématique

On définit une suite auxiliaire (v_n) par : pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = nu_n - 1$.

1. Montrer que la suite (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.

2. En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n = \frac{1 + (0,5)^n}{n}$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Justifier que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $u_{n+1} - u_n = -\frac{1 + (1 + 0,5n)(0,5)^n}{n(n+1)}$.

En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

Partie C - Retour à l'algorithmique

En s'inspirant de la partie A, écrire un algorithme permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier n tel que $u_n < 0,001$.

1-6 : France métro, juin 2013, 5 points, non spécialistes

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. a. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq n + 3$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur ℕ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

a. Exprimer S_n en fonction de n.

b. Déterminer la limite de la suite (T_n).

1-7 : Polynésie juin 2013, 5 points, non spécialistes

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

1-8 : Antilles-Guyane, sept 2013, 5 points non spécialistes

Les deux parties sont indépendantes

Le robot Tom doit emprunter un pont sans garde-corps de 10 pas de long et de 2 pas de large. Sa démarche est très particulière :

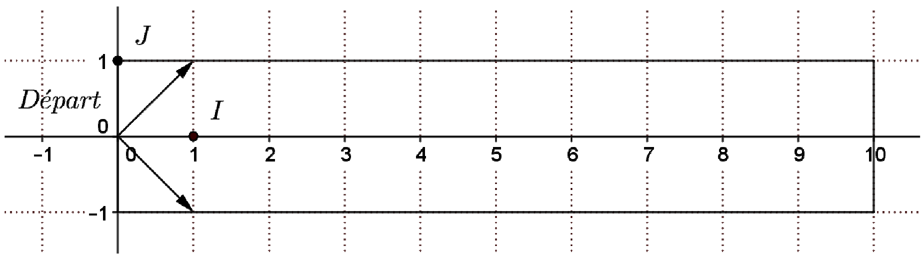
- Soit il avance d'un pas tout droit ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la gauche (déplacement équivalent à un pas vers la gauche et un pas tout droit) ;
- Soit il se déplace en diagonale vers la droite (déplacement équivalent à un pas vers la droite et un pas tout droit).

On suppose que ces trois types de déplacement sont aléatoires et équiprobables.

L'objectif de cet exercice est d'estimer la probabilité p de l'évènement S « Tom traverse le pont » c'est-à-dire « Tom n'est pas tombé dans l'eau et se trouve encore sur le pont au bout de 10 déplacements ».

Partie A : modélisation et simulation

On schématise le pont par un rectangle dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) comme l'indique la figure ci-dessous. On suppose que Tom se trouve au point de coordonnées (0 ; 0) au début de la traversée. On note $(x ; y)$ les coordonnées de la position de Tom après x déplacements.



On a écrit l'algorithme suivant qui simule la position de Tom au bout de x déplacements :

> x, y, n sont des entiers
> Affecter à x la valeur 0. Affecter à y la valeur 0.
> Tant que $y \geq -1$ et $y \leq 1$ et $x \leq 9$:
>   Affecter à n une valeur choisie au hasard entre –1, 0 et 1
>   Affecter à y la valeur $y + n$
>   Affecter à x la valeur $x + 1$
> Fin tant que
> Afficher « la position de Tom est » $(x\ ;\ y)$

1. On donne les couples suivants : (–1 ; 1) ; (10 ; 0) ; (2 ; 4) ; (10 ; 2).
Lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme ? Justifier la réponse.

2. Modifier cet algorithme pour qu'à la place de « la position de Tom est $(x\ ;\ y)$ », il affiche finalement « Tom a réussi la traversée » ou « Tom est tombé ».

Partie B

Pour tout n entier naturel compris entre 0 et 10, on note :

A_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée –1 » ;

B_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 0 » ;

C_n l'évènement « après n déplacements, Tom se trouve sur un point d'ordonnée 1 ».

On note a_n, b_n, c_n les probabilités respectives des évènements A_n, B_n, C_n.

1. Justifier que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, $c_0 = 0$.

2. Montrer que pour tout entier naturel n compris entre 0 et 9, on a $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{3} \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n + c_n}{3} \end{cases}$.

On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

3. Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

4. Calculer la probabilité que Tom se trouve sur le pont au bout de deux déplacements.

5. À l'aide d'un tableur, on a obtenu la feuille de calcul ci-dessous qui donne des valeurs approchées de a_n, b_n, c_n pour n compris entre 0 et 10.

n	a_n	b_n	c_n
0	0	1	0
1	0,333 333	0,333 333	0,333 333
2	0,222 222	0,333 333	0,222 222
3	0,185 185	0,259 259	0,185 185
4	0,148 148	0,209 877	0,148 148
5	0,119 342	0,168 724	0,119 342
6	0,096 022	0,135 802	0,096 022
7	0,077 275	0,109 282	0,077 275
8	0,062 186	0,087 944	0,062 186
9	0,050 043	0,070 772	0,050 043
10	0,040 272	0,056 953	0,040 272

Donner une valeur approchée à 0,001 près de la probabilité que Tom traverse le pont (on pourra s'aider du tableau).

1-9 : France métropolitaine sept. 2013 5 points, non spécialistes

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$. Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

1-10 : Nouvelle-Calédonie 11/2013, 5 points, tous

Soient deux suites (u_n) et (v_n), définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables	N est un entier ; U, V, W sont des réels ; K est un entier.

Algorithme	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que K < N
	    Affecter K+1 à K
	    Affecter U à W
	    Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
	    Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que

Sortie	Afficher U Afficher V

On exécute cet algorithme en saisissant N = 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	U	V	W
0			

1			
2			

Partie B

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{5}{12}(v_n-u_n)$.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $w_n=v_n-u_n$. Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n=8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b. Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.

c. En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n=3u_n+4v_n$ est constante.

En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

2. Fonctions

2-1 : Pondichéry, avril 2013, 5 points

Partie 1

On s'intéresse à l'évolution de la hauteur d'un plant de maïs en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente cette évolution. La hauteur est en mètres et le temps en jours.

On décide de modéliser cette croissance par une fonction « logistique » du type : $h(t)=\frac{a}{1+be^{-0,04t}}$ où a et b sont des constantes réelles positives, t est la variable temps exprimée en jours et $h(t)$ désigne la hauteur du plant, exprimée en mètres.

On sait qu'initialement, pour $t=0$, le plant mesure 0,1 m et que sa hauteur tend vers une hauteur limite de 2 m.

Déterminer les constantes a et b afin que la fonction h corresponde à la croissance du plant de maïs étudié.

Partie 2

On considère désormais que la croissance du plant de maïs est donnée par la fonction f définie sur [0 ; 250] par

$$f(t)=\frac{2}{1+19e^{-0,04t}}.$$

1. Déterminer $f'(t)$ en fonction de t. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 250].

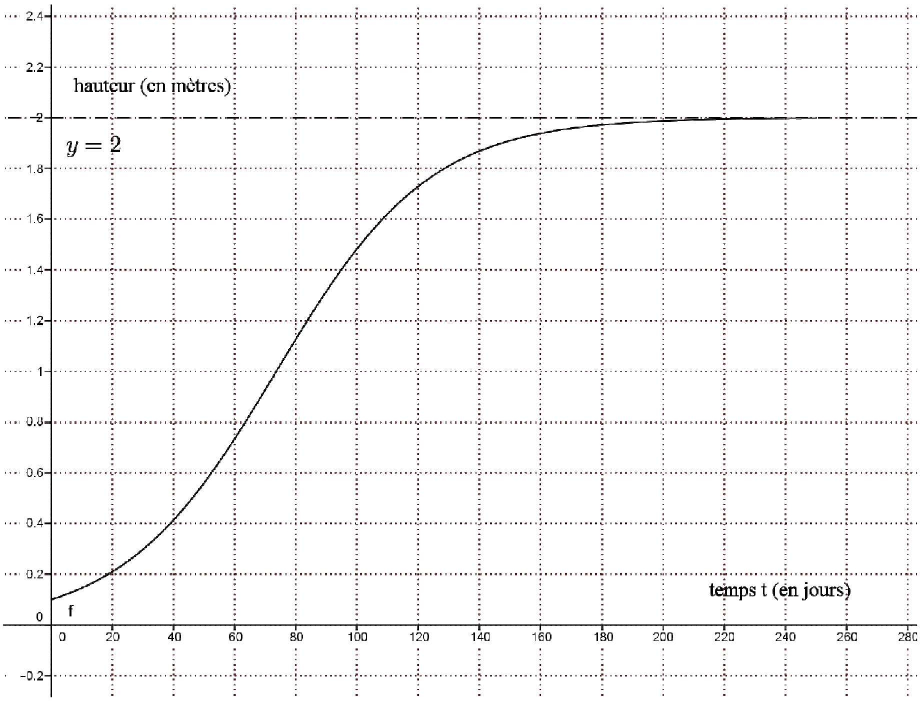
2. Calculer le temps nécessaire pour que le plant de maïs atteigne une hauteur supérieure à 1,5 m.

3. a. Vérifier que pour tout réel t appartenant à l'intervalle [0 ; 250] on a $f(t)=\frac{2e^{0,04t}}{e^{0,04t}+19}$. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle [0 ; 250] par $F(t)=50\ln\left(e^{0,04t}+19\right)$ est une primitive de la fonction f.

b. Déterminer la valeur moyenne de f sur l'intervalle [50 ; 100]. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près et interpréter ce résultat.

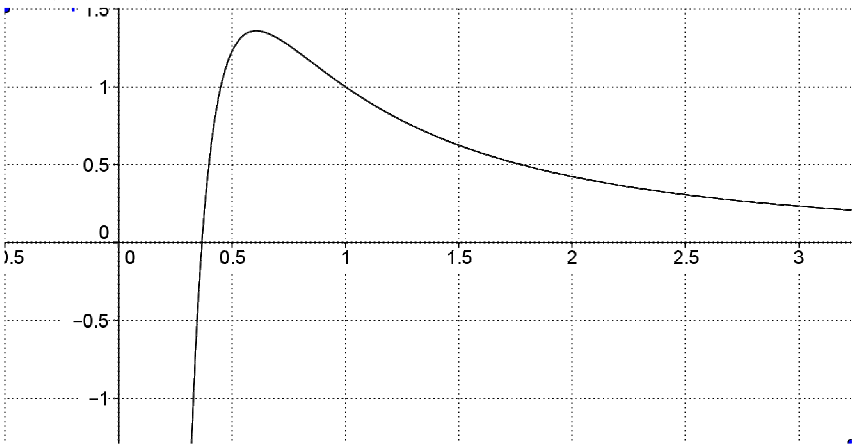
4. On s'intéresse à la vitesse de croissance du plant de maïs; elle est donnée par la fonction dérivée de la fonction f.

La vitesse de croissance est maximale pour une valeur de t. En utilisant le graphique donné ci-dessous, déterminer une va leur approchée de celle-ci. Estimer alors la hauteur du plant.



2-2 : Amérique du Nord 2013, 5 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$ et soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe C est donnée ci-dessous.



1. a. Étudier la limite de f en 0.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln x>0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction f.

3. a. Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. Pour tout entier $n > 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x=\frac{1}{e}$ et $x=n$.

a. Démontrer que $0 \le I_2 \le e-\frac{1}{2}$.

On admet que la fonction F, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\frac{-2-\ln x}{x}$, est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Calculer I_n en fonction de n.

c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2-3 : Liban 2013, 6 points

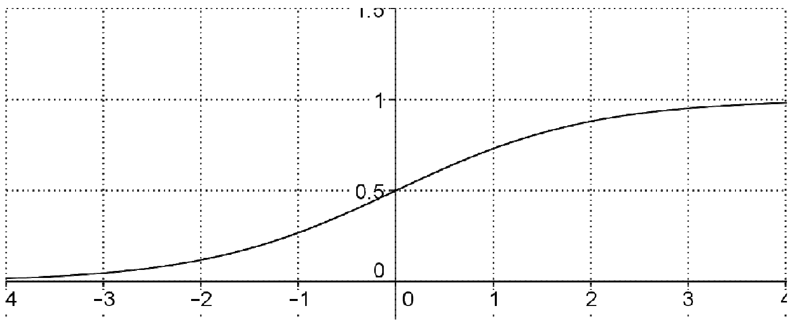
Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x)=\frac{1}{1+e^{-kx}}$.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$. On a donc, pour tout réel x, $f_1(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}$.

La représentation graphique C_1 de la fonction f_1 dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ est donnée ci-contre.



1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$.

3. On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f'_1(x)$.

En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. On définit le nombre $I=\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

Montrer que $I=\ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$. Donner une interprétation graphique de I.

Partie B

Dans cette partie, on choisit $k = -1$ et on souhaite tracer la courbe C_{-1} représentant la fonction f_{-1}.

Pour tout réel x, on appelle P le point de C_1 d'abscisse x et M le point de C_{-1} d'abscisse x.

On note K le milieu du segment $[MP]$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $f_1(x)+f_{-1}(x)=1$.

2. En déduire que le point K appartient à la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$.

3. Tracer la courbe C_{-1} sur la figure précédente.

4. En déduire l'aire, en unités d'aire, du domaine délimité par les courbes C_1, C_{-1}, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.

Partie C

Dans cette partie, on ne privilégie pas de valeur particulière du paramètre k.

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Quelle que soit la valeur du nombre réel k, la représentation graphique de la fonction f_k est strictement comprise entre les droites d'équations $y = 0$ et $y = 1$.

2. Quelle que soit la valeur du réel k, la fonction f_k est strictement croissante.

3. Pour tout réel $k \geq 10$, $f_k\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0{,}99$.

2-4 : Antilles-Guyane 2013, 5 points

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

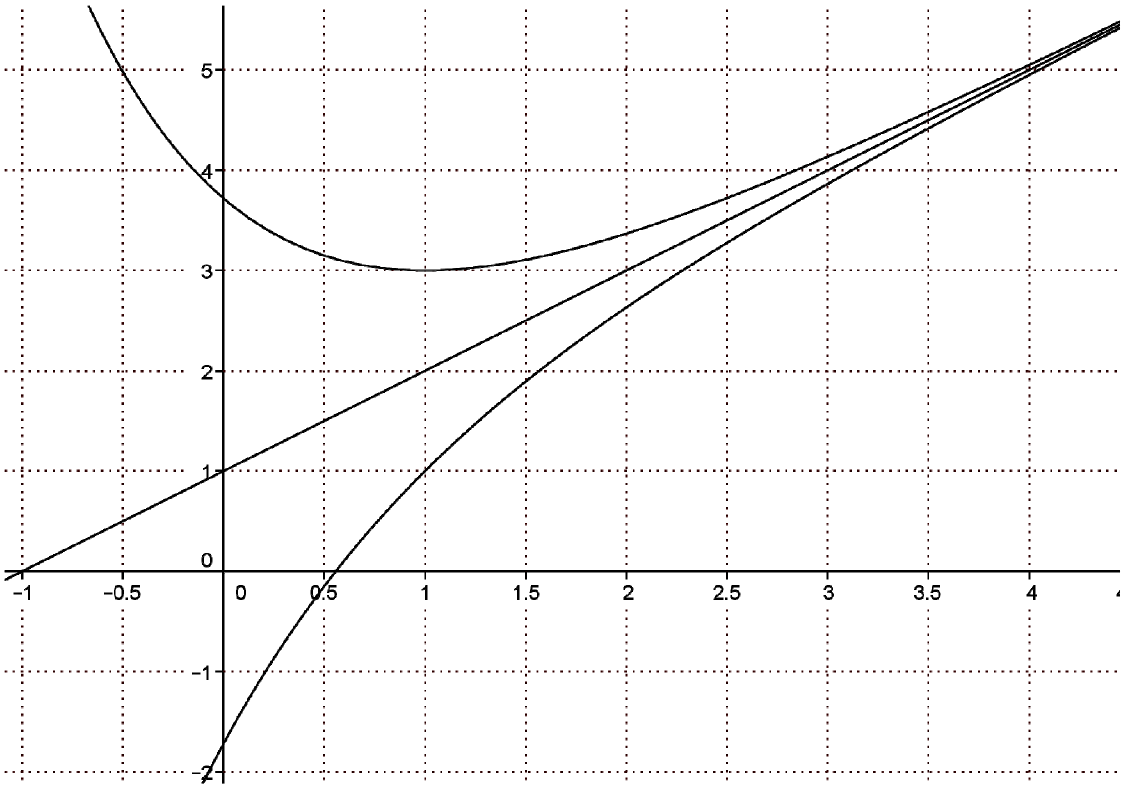
Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = (x+1)e^x$.

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)e^x$.

3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.



Partie B

On définit la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par $g_m(x) = x + 1 - me^{-x}$ et on note C_m la courbe de la fonction g_m dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1. a. Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

b. Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe C_m avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté ci-dessus les courbes C_0, C_e et C_{-e} (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-e$). Identifier chacune de ces courbes sur la figure en justifiant.

3. Étudier la position de la courbe C_m par rapport à la droite D d'équation $y = x + 1$ suivant les valeurs du réel m.

4. a. On appelle D_2 la partie du plan comprise entre les courbes C_e, C_{-e}, l'axe (Oy) et la droite $x = 2$.

Hachurer D_2 sur la figure.

b. Dans cette question, a désigne un réel positif, D_a la partie du plan comprise entre C_e, C_{-e}, l'axe (Oy) et la droite D_a d'équation $x = a$. On désigne par $A(a)$ l'aire de cette partie du plan exprimée en unités d'aire.

Démontrer que pour tout réel a positif : $A(a)=2e-2e^{1-a}$.

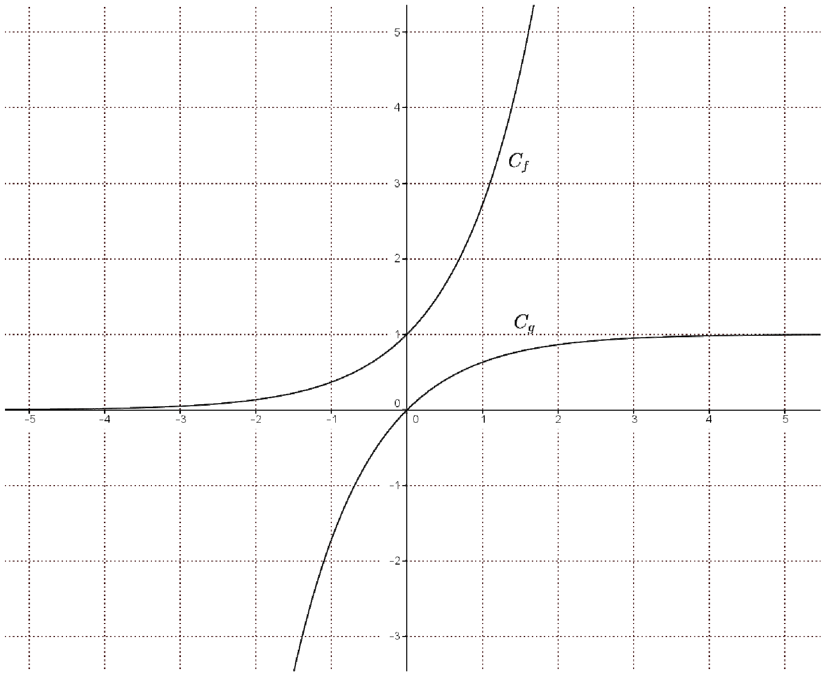
En déduire la limite de $A(a)$ quand a tend vers $+\infty$.

2-5 : Asie juin 2013, 6 points

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par :

$f(x)=e^{x}$ et $g(x)=1-e^{-x}$.

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement C_f et C_g, sont fournies ci-contre.



Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer au mieux ces tangentes sur la figure.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note D l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b.

1. a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A.

b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B.

c. En déduire que $b=-a$.

2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation $2(x-1)e^{x}+1=0$.

Partie C

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x)=2(x-1)e^{x}+1$.

1. a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

b. Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2. a. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x)=0$ et β la solution positive de cette équation.

À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe C_f d'abscisse a et F le point de la courbe C_g d'abscisse $-a$ (a est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe C_f au point E.

2. Démontrer que (EF) est tangente à C_g au point F.

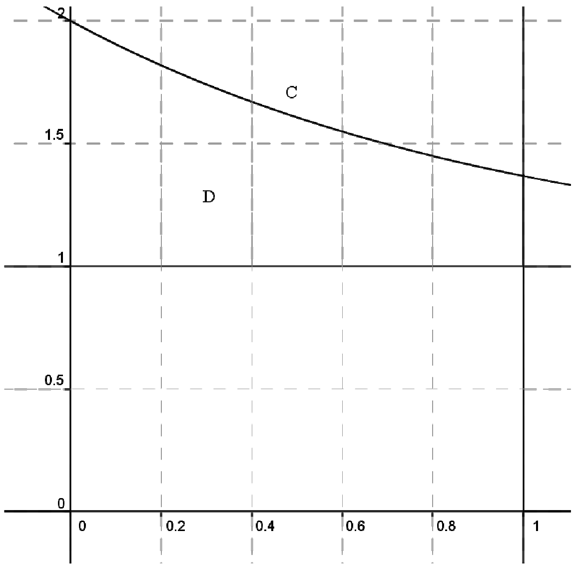
2-6 : Centres étrangers juin 2013, 5 points

On considère la fonction g définie pour tout réel x de l'intervalle [0 ; 1] par : $g(x)=1+e^{-x}$.

On admet que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $g(x) > 0$.

On note C la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthogonal et D le domaine plan compris d'une part entre l'axe des abscisses et la courbe C, d'autre part entre les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$.

La courbe C et le domaine D sont représentés ci-contre.



Le but de cet exercice est de partager le domaine D en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit a un réel tel que $0 \le a \le 1$.

On note A_1 l'aire du domaine compris entre la courbe C, l'axe (Ox), les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$, puis A_2 celle du domaine compris entre la courbe C, (Ox) et les droites d'équation $x = a$ et $x = 1$.

A_1 et A_2 sont exprimées en unités d'aire.

1. a. Démontrer que $A_1 = a - e^{-a} + 1$.

b. Exprimer A_2 en fonction de a.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 1]$ par : $f(x) = 2x - e^{-x} + \frac{1}{e}$.

a. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

On précisera les valeurs exactes de $f(0)$ et $f(1)$.

b. Démontrer que la fonction f s'annule une fois et une seule sur l'intervalle $[0 ; 1]$ en un réel α.

Donner la valeur de α arrondie au centième.

3. En utilisant les questions précédentes, déterminer une valeur approchée du réel a pour lequel les aires A_1 et A_2 sont égales.

Partie B

Dans cette partie, on se propose de partager le domaine D en deux domaines de même aire par la droite d'équation $y = b$. On admet qu'Il existe un unique réel b positif solution.

1. Justifier l'inégalité $b < 1 + \frac{1}{e}$. On pourra utiliser un argument graphique.

2. Déterminer la valeur exacte du réel b.

2-7 : France métro, juin 2013, 7 points

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative C d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On dispose des informations suivantes :

– les points A, B, C ont pour coordonnées respectives (1 ; 0), (1 ; 2), (0 ; 2) ;

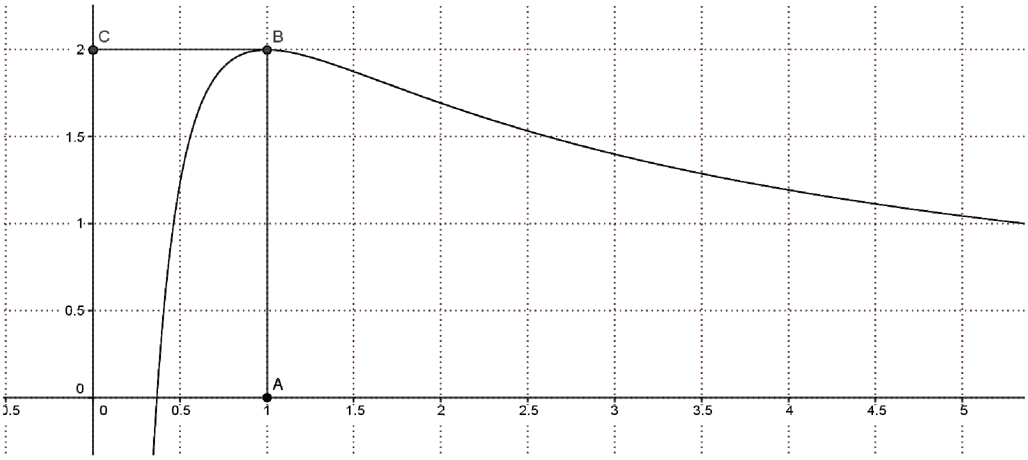
– la courbe C passe par le point B et la droite (BC) est tangente à C en B ;

– il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x, $f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}$.

1. a. En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.

b. Vérifier que pour tout réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{(b-a) - \ln x}{x^2}$.

c. En déduire les réels a et b.



2. a. Justifier que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

b. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$. On pourra remarquer que pour tout réel x strictement positif, $f(x)=\frac{2}{x}+2\frac{\ln x}{x}$.

c. En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. a. Démontrer que l'équation $f(x)=1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]0\,;\,1]$.

b. Par un raisonnement analogue, on démontre qu'il existe un unique réel β de l'intervalle $]1\,;+\infty[$ tel que $f(\beta)=1$. Déterminer l'entier n tel que $n<\beta<n+1$.

On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables	a, b et m sont des nombres réels
Initialisation	Affecter à a la valeur 0 Affecter à b la valeur 1
Traitement	Tant que $b-a>0,1$ Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$ Si $f(m)<1$ alors affecter à a la valeur m Sinon affecter à b la valeur m Fin de Si Fin de Tant que
Sortie	Afficher a Afficher b

a. Faire tourner cet algorithme en complétant le tableau ci-dessous.

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0				
b	1				
$b-a$					
m					

b. Que représentent les valeurs affichées par cet algorithme ?

c. Modifier l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche les deux bornes d'un encadrement de β d'amplitude 10^{-1}.

5. Le but de cette question est de démontrer que la courbe C partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

a. Justifier que cela revient à démontrer que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = 1$.

b. En remarquant que l'expression de $f(x)$ peut s'écrire $\frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$, terminer la démonstration.

2-8 : Polynésie juin 2013, 6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+2)e^{-x}$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1. Étude de la fonction f.

a. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C avec les axes du repère.

b. Étudier les limites de la fonction f en 1 et en –1. En déduire les éventuelles asymptotes de la courbe C.

c. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2. Calcul d'une valeur approchée de l'aire sous une courbe.

On note D le domaine compris entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$. On approche l'aire du domaine D en calculant une somme d'aires de rectangles.

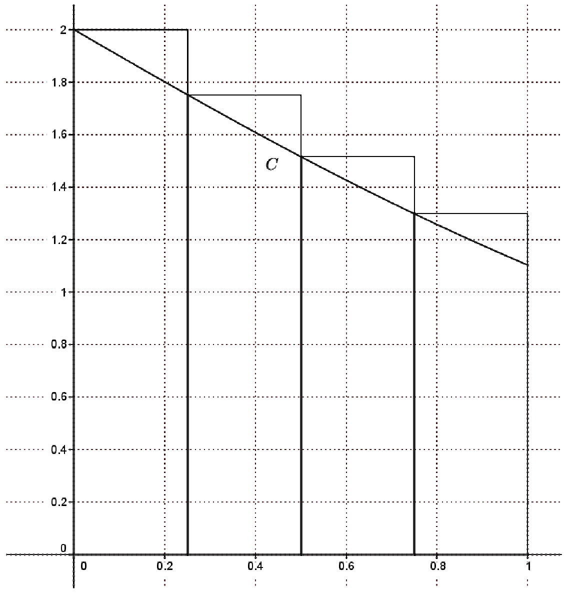
a. Dans cette question, on découpe l'intervalle [0 ; 1] en quatre intervalles de même longueur :

Sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f(0)$;

sur l'intervalle $\left[\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{4}\right)$;

sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{1}{2}\right)$;

sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4};1\right]$, on construit un rectangle de hauteur $f\left(\frac{3}{4}\right)$;



Cette construction est illustrée ci-contre.

L'algorithme ci-dessous permet d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine D en ajoutant les aires des quatre rectangles précédents :

Variables	k est un nombre entier ; S est un nombre réel.
Initialisation	Affecter à S la valeur 0.
Traitement	Pour k variant de 0 à 3 Affecter à S la valeur $S + \frac{1}{4} f\left(\frac{k}{4}\right)$ Fin Pour
Sortie	Afficher S.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du résultat affiché par cet algorithme.

b. Dans cette question, N est un nombre entier strictement supérieur à 1. On découpe l'intervalle [0; 1] en N intervalles de même longueur.

Sur chacun de ces intervalles, on construit un rectangle en procédant de la même manière qu'à la question 2. a. Modifier l'algorithme précédent afin qu'il affiche en sortie la somme des aires des N rectangles ainsi construits.

3. Calcul de la valeur exacte de l'aire sous une courbe.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(-x-3)e^{-x}$. On admet que g est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Calculer l'aire A du domaine D, exprimée en unités d'aire.

b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de l'erreur commise en remplaçant A par la valeur approchée trouvée au moyen de l'algorithme de la question 2.a., c'est à dire l'écart entre ces deux valeurs.

2-9 : Antilles-Guyane, sept 2013, 6 points

Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que : $f_k(x)=kxe^{-kx}$.

On note C_k sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A : Étude du cas $k=1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x)=xe^{-x}$.

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe C_1 admet une asymptote que l'on précisera.

2. Étudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

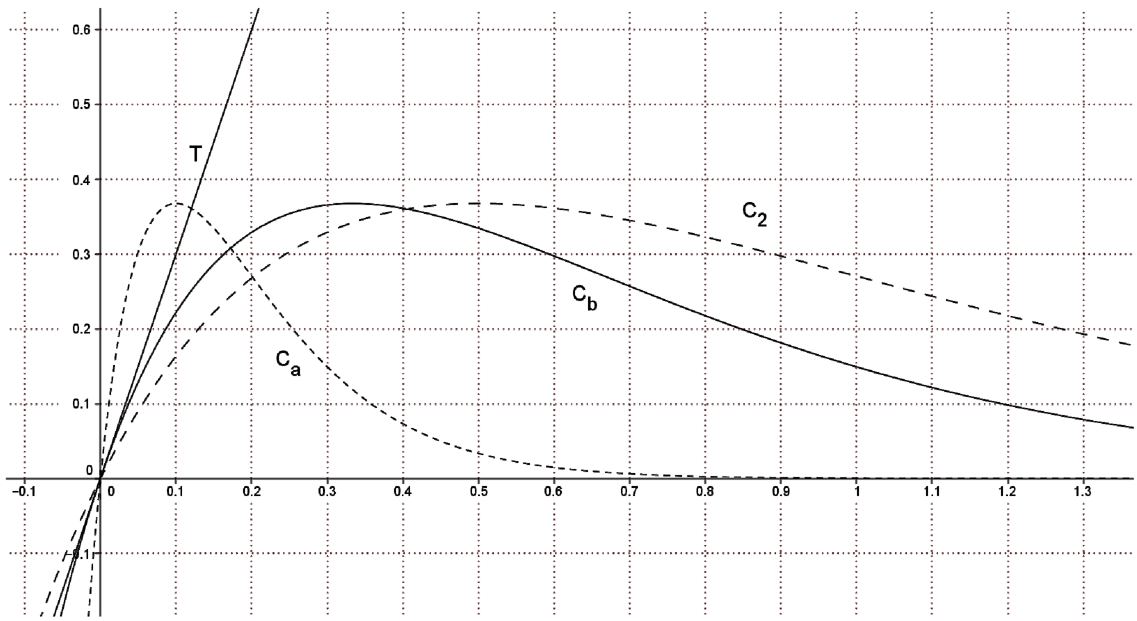
3. Démontrer que la fonction g_1 définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que : $g_1(x)=-(x+1)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. Étudier le signe de $f_1(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

5. Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_1, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=\ln 10$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes C_2, C_a et C_b où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à C_b au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes C_k passent par un même point.

2. a. Montrer que pour tout réel k strictement positif et tout réel x on a : $f'_k(x)=k(1-kx)e^{-kx}$.

b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

c. En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

d. Écrire une équation de la tangente à C_k au point O origine du repère.

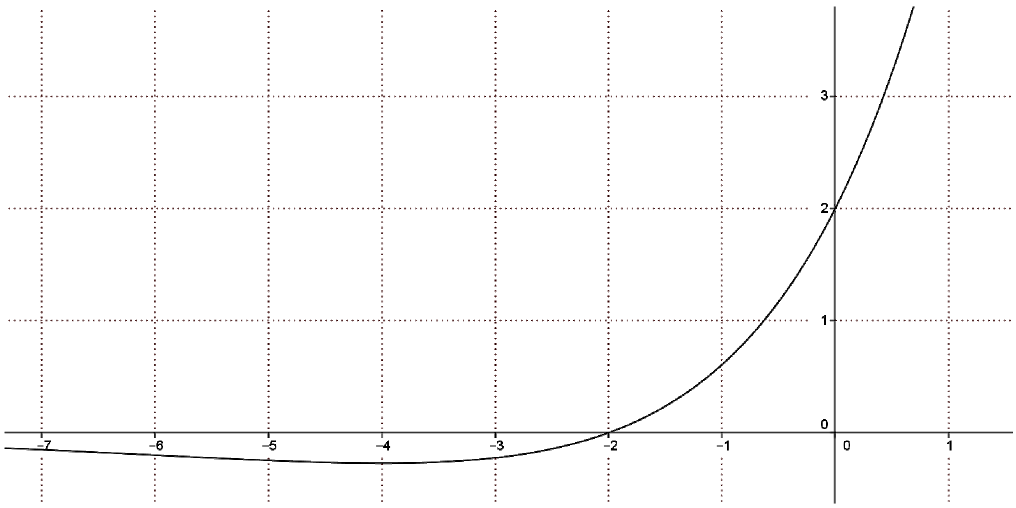
e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée de b.

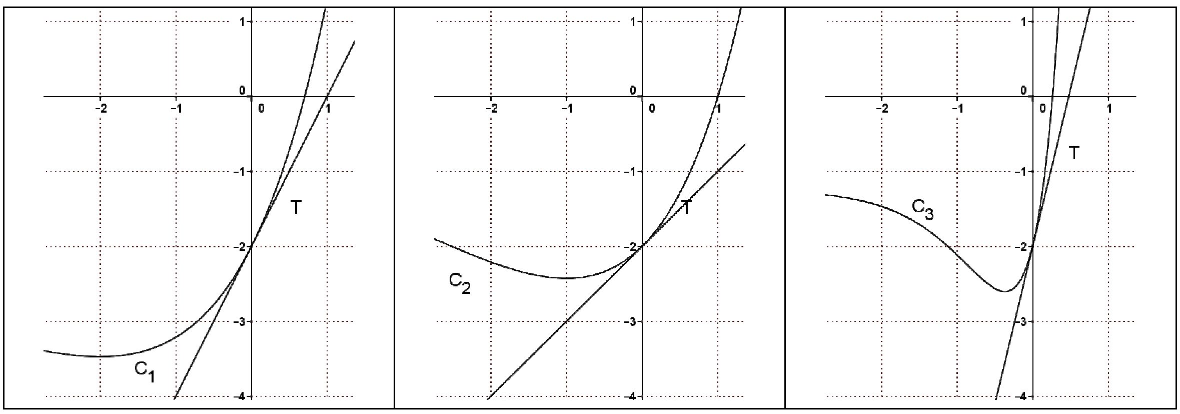
2-10 : France métropolitaine sept. 2013 6 points

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe C et trois autres courbes C_1, C_2, C_3 avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. À l'aide de la courbe C, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.

b. L'une des courbes C_1, C_2, C_3 est la courbe représentative de la fonction F.
Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe C permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)=2(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.

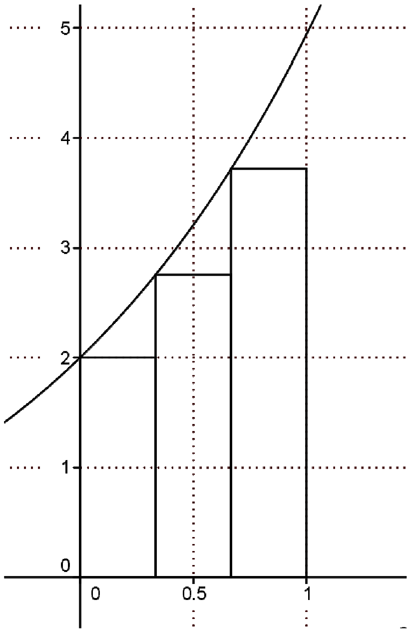
b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $I=\int_0^1 f(x)dx$.

a. Interpréter géométriquement le réel I.

b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x$ et $v(x)=e^{\frac{1}{2}x}$. Vérifier que $f=2(u'v+uv')$.

c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.



3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables : k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.

Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de n.

Initialisation : Affecter à s la valeur 0.

Traitement : Pour k allant de 0 à $n-1$

Affecter à s la valeur $s+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Fin de boucle.

Sortie : Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel strictement positif comme valeur de n.

a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.

b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

2-11 : Nouvelle-Calédonie 11/2013, 5 points, tous

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=e^x+\frac{1}{x}$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

a. Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=x^2e^x-1$.

Étudier le sens de variation de la fonction g.

b. Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\,;+\infty[$ tel que $g(a)=0$.

Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\,;0{,}704[$.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\,;+\infty[$.

2. Étude de la fonction f

a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Démontrer que pour tout réel strictement positif x, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

d. Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}$.

e. Justifier que $3{,}43<m<3{,}45$.

3. Probabilités

3-1 : Pondichéry, avril 2013, 6 points, non spécialistes

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent.

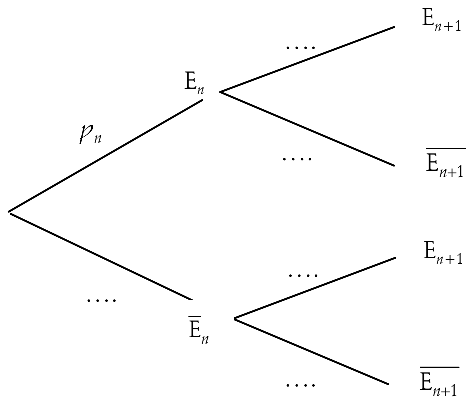
• La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.

• Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.

• Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'événement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'événement E_n.

On a ainsi $p_1 = 0$.



1. a. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. a. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-contre.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}04$.

c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0{,}05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison q.

En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et q.

d. En déduire la limite de la suite (p_n).

e. On admet dans cette question que la suite (p_n) est croissante. On considère l'algorithme suivant :

Variables	K et J sont des entiers naturels, P est un nombre réel
Initialisation	P prend la valeur 0 J prend la valeur 1
Entrée	Saisir la valeur de K
Traitement	Tant que P<0,05 − 10^{-K} P prend la valeur 0,2×P+0,04 J prend la valeur J+1 Fin tant que
Sortie	Afficher J

À quoi correspond l'affichage final J ? Pourquoi est-on sûr que cet algorithme s'arrête ?

3. Cette entreprise emploie 220 salariés. Pour la suite on admet que la probabilité pour qu'un salarié soit malade une semaine donnée durant cette période d'épidémie est égale à $p = 0{,}05$.

On suppose que l'état de santé d'un salarié ne dépend pas de l'état de santé de ses collègues.

On désigne par X la variable aléatoire qui donne le nombre de salariés malades une semaine donnée.

a. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

Calculer l'espérance mathématique μ et l'écart type σ de la variable aléatoire X.

b. On admet que l'on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X-\mu}{\sigma}$ par la loi normale centrée réduite c'est-à-dire la loi normale de paramètres 0 et 1.

On note Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.

Le tableau suivant donne les probabilités de l'événement $Z < x$ pour quelques valeurs du nombre réel x.

x	−1,55	−1,24	−0,92	−0,62	−0,31	0,00	0,31	0,62	0,93	1,24	1,55
$p(Z<x)$	0,061	0,100	0,177	0,268	0,379	0,500	0,621	0,732	0,823	0,892	0,939

Calculer, au moyen de l'approximation proposée en question b.,une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité de l'événement : « le nombre de salariés absents dans l'entreprise au cours d'une semaine donnée est supérieur ou égal à 7 et inférieur ou égal à 15 ».

3-2 : Amérique du Nord 2013, 5 points

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres. Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche.

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes.

Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non commercialisable,

un pain dont lamasse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Partie A *On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.*

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$P(X \le x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $P(390 \le X \le 410)$.

2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $P(Z \le -1{,}751) \approx 0{,}040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

3-3 : Liban 2013, 5 points

L'entreprise Fructidoux fabrique des compotes qu'elle conditionne en petits pots de 50 grammes. Elle souhaite leur attribuer la dénomination « compote allégée ».

La législation impose alors que la teneur en sucre, c'est-à-dire la proportion de sucre dans la compote, soit comprise entre 0,16 et 0,18. On dit dans ce cas que le petit pot de compote est conforme.

L'entreprise possède deux chaînes de fabrication F_1 et F_2.

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

La chaîne de production F_2 semble plus fiable que la chaîne de production F_1. Elle est cependant moins rapide. Ainsi, dans la production totale, 70 % des petits pots proviennent de la chaîne F_1 et 30 % de la chaîne F_2.

La chaîne F_1 produit 5 % de compotes non conformes et la chaîne F_2 en produit 1 %.

On prélève au hasard un petit pot dans la production totale. On considère les évènements :

E : « Le petit pot provient de la chaîne F_2 »

C : « Le petit pot est conforme. »

1. Construire un arbre pondéré sur lequel on indiquera les données qui précèdent.

2. Calculer la probabilité de l'événement : « Le petit pot est conforme et provient de la chaîne de production F_1. »

3. Déterminer la probabilité de l'événement C.

4. Déterminer, à 10^{-3} près, la probabilité de l'évènement E sachant que l'évènement C est réalisé.

Partie B

On note X la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_1, associe sa teneur en sucre.

On suppose que X suit la loi normale d'espérance $m_1 = 0,17$ et d'écart-type $\sigma_1 = 0,006$.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_1 soit conforme.

On note Y la variable aléatoire qui, à un petit pot pris au hasard dans la production de la chaîne F_2, associe sa teneur en sucre.

2. On suppose que Y suit la loi normale d'espérance $m_2 = 0,17$ et d'écart-type σ_2.

On suppose de plus que la probabilité qu'un petit pot prélevé au hasard dans la production de la chaîne F_2 soit conforme est égale à 0,99.

Soit Z la variable aléatoire définie par $Z = \dfrac{Y - m_2}{\sigma_2}$.

a. Quelle loi la variable aléatoire Z suit-elle ?

b. Déterminer, en fonction de σ_2 l'intervalle auquel appartient Z lorsque Y appartient à l'intervalle $[0,16 ; 0,18]$.

c. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de σ_2.

3-4 : Antilles-Guyane 2013, 5 points

Partie A

Soient n un entier naturel, p un nombre réel compris entre 0 et 1 et X_n une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. On note $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ et f une valeur prise par F_n.

On rappelle que, pour n assez grand, l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient la fréquence f avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; f + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à 0,95.

Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF.

Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.

On note r la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :

A l'évènement « l'étudiant répond A »,

B l'évènement « l'étudiant répond B »,

C l'évènement « l'étudiant répond C »,

R l'évènement « l'étudiant connait la réponse », $\overline{R}$ l'évènement contraire de R.

a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement A est $\mathcal{P}(A)=\frac{1}{3}(1+2r)$.

c. Exprimer en fonction de r la probabilité qu'une personne ayant choisi A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer r, on interroge 400 personnes et on note X la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. Donner la loi de X et ses paramètres n et p en fonction de r.

b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.

Donner un intervalle de confiance au seuil 0,95 de l'estimation de p.

En déduire un intervalle de confiance au seuil 0,95 de r.

c. Dans la suite, on suppose que $r = 0{,}4$. Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que X suit une loi normale.

i. Donner les paramètres de cette loi normale.

ii. Donner une valeur approchée de $\mathcal{P}(X \le 250)$ à 10^{-2} près.

3-5 : Asie juin 2013, 5 points

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les évènements suivants :

- évènement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- évènement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- évènement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.

2. a. Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap S$?

b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.

3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.

Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans traces de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.

3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides. On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.

On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95%.

2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

3-6 : France métro, juin 2013, 5 points

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des arbres à feuilles.

La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.

On envisage les événements suivants :

– H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 »,

– H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 »,

– H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 »,

– C : « l'arbre choisi est un conifère »,

– F : « l'arbre choisi est un arbre feuillu ».

a. Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b. Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c. Justifier que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,525.

d. L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? On arrondira à 10^{-3}.

2. On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

a. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètrès.

b. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères ? On arrondira à 10^{-3}.

c. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus ?

On arrondira à 10^{-3}.

3-7 : Centres étrangers juin 2013, 6 points

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques.

Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

Partie A

La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0002$.

1. Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?

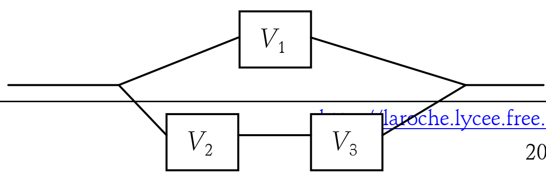
2. Calculer la probabilité, à 0,001 près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à 6000 heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre.

Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.

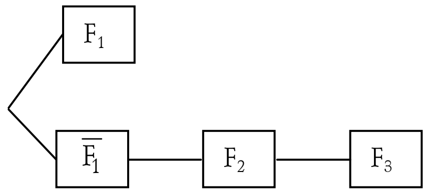
On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après 6 000 heures.



On note :

- F_1 l'événement : « la vanne V_1 est en état de marche après 6 000 heures.
- F_2 l'événement : « la vanne V_2 est en état de marche après 6 000 heures
- F_3 l'événement : « la vanne V_3 est en état de marche après 6 000 heures.
- E : l'événement : « le circuit est en état de marche après 6 000 heures.

On admet que les événements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à 0,3.



1. L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation.

Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.

2. Démontrer que $p(E) = 0{,}363$.

3. Sachant que le circuit est en état de marche après 6 000 heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.

Partie C

L 'industriel affirme que seulement 2 % des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1. Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la variable F.

2. On choisit 400 vannes au hasard dans la production. On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production. Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.

Au vu de ce résultat peut-on remettre en cause, au seuil de 95 %, l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.

L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients, la demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1. Déterminer $p(760 \leq D \leq 840)$.

2. Déterminer $p(D \leq 880)$.

3. L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1 % de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

3-8 : Polynésie juin 2013, 5 points

Les 3 parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Thomas possède un lecteur MP3 sur lequel il a stocké plusieurs milliers de morceaux musicaux.

L'ensemble des morceaux musicaux qu'il possède se divise en trois genres distincts selon la répartition suivante : 30 % de musique classique, 45 % de variété, le reste étant du jazz.

Thomas a utilisé deux qualités d'encodage pour stocker ses morceaux musicaux : un encodage de haute qualité et un encodage standard. On sait que :

- les $\dfrac{5}{6}$ des morceaux de musique classique sont encodés en haute qualité.
- les $\dfrac{5}{9}$ des morceaux de variété sont encodés en qualité standard.

On considérera les événements suivants :

C : « Le morceau écouté est un morceau de musique classique » ;

V : « Le morceau écouté est un morceau de variété » ;

J : « Le morceau écouté est un morceau de jazz » ;

H : « Le morceau écouté est encodé en haute qualité » ;

S : « Le morceau écouté est encodé en qualité standard ».

Partie 1

Thomas décide d'écouter un morceau au hasard parmi tous les morceaux stockés sur son MP3 en utilisant la fonction « lecture aléatoire ». On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

1. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un morceau de musique classique encodé en haute qualité ?

2. On sait que $\mathcal{P}(\mathrm{H})=\frac{13}{20}$.

a. Les événements C et H sont-ils indépendants ?

b. Calculer $\mathcal{P}(\mathrm{J}\cap\mathrm{H})$ et $\mathcal{P}_{\mathrm{J}}(\mathrm{H})$.

Partie 2

Pendant un long trajet en train, Thomas écoute, en utilisant la fonction « lecture aléatoire » de son MP3, 60 morceaux de musique.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95 % de la proportion de morceaux de musique classique dans un échantillon de taille 60.

2. Thomas a comptabilisé qu'il avait écouté 12 morceaux de musique classique pendant son voyage. Peut-on penser que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas est défectueuse ?

Partie 3

On considère la variable aléatoire X qui, à chaque chanson stocké sur le lecteur MP3, associe sa durée exprimée en secondes et on établit que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart-type 20.

On pourra utiliser le tableau fourni ci-dessous dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

On écoute un morceau musical au hasard.

1. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de $\mathcal{P}(180\leq X\leq 220)$.

2. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité que le morceau écouté dure plus de 4 minutes.

b	$\mathcal{P}(X\leq b)$	b	$\mathcal{P}(X\leq b)$
140	0,001	210	0,691
150	0,006	220	0,841
160	0,023	230	0,933
170	0,067	240	0,977
180	0,159	250	0,994
190	0,309	260	0,999
200	0,500		

3-9 : Antilles-Guyane, sept 2013, 4 points

Une entreprise industrielle fabrique des pièces cylindriques en grande quantité. Pour toute pièce prélevée au hasard, on appelle X la variable aléatoire qui lui associe sa longueur en millimètre et Y la variable aléatoire qui lui associe son diamètre en millimètre.

On suppose que X suit la loi normale de moyenne $\mu_1=36$ et d'écart-type $\sigma_1=0{,}2$ et que Y suit la loi normale de moyenne $\mu_2=6$ et d'écart-type $\sigma_2=0{,}05$.

1. Une pièce est dite conforme pour la longueur si sa longueur est comprise entre $\mu_1-3\sigma_1$ et $\mu_1+3\sigma_1$. Quelle est une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité p_1 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour la longueur ?

2. Une pièce est dite conforme pour le diamètre si son diamètre est compris entre 5,88 mm et 6,12 mm. Le tableau donné ci-contre a été obtenu à l'aide d'un tableur. Il indique pour chacune des valeurs de k, la probabilité que Y soit inférieure ou égal à cette valeur.

Déterminer à 10^{-3} près la probabilité p_2 pour qu'une pièce prélevée au hasard soit conforme pour le diamètre (on pourra s'aider du tableau ci-dessous).

k	$p(Y \le k)$
5,8	3,167 12E − 05
5,82	0,000 159 109
5,84	0,000 687 138
5,86	0,002 555 13
5,88	0,008 197 536
5,9	0,022 750 132
5,92	0,054 799 292
5,94	0,115 069 67
5,96	0,211 855 399
5,98	0,344 578 258
6	0,5
6, 02	0,655 421 742
6, 04	0,788 144 601
6, 06	0,884 930 33
6, 08	0,945 200 708
6, 1	0,977 249 868
6, 12	0,991 802 464
6, 14.	0,997 444 87
6, 16	0,999 312 862
6, 18	0,999 840 891
6, 2	0,999 968 329

3. On prélève une pièce au hasard.On appelle L l'événement « la pièce est conforme pour la longueur » et D l'événement « la pièce est conforme pour le diamètre ».

On suppose que les évènements L et D sont indépendants.

a. Une pièce est acceptée si elle est conforme pour la longueur et pour le diamètre.

Déterminer la probabilité pour qu'une pièce prélevée au hasard ne soit pas acceptée (le résultat sera arrondi à 10^{-2}).

b. Justifier que la probabilité qu'elle soit conforme pour le diamètre sachant qu'elle n'est pas conforme pour la longueur, est égale à p_2.

3-10 : France métropolitaine sept. 2013, 5 points

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.

On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :

A : « La pièce est produite par la machine A »

B : « La pièce est produite par la machine B»

D : « La pièce a un défaut». $\overline{\text{D}}$, l'évènement contraire de l'événement D.

a. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

c. Démontrer que la probabilité $P(\text{D})$ de l'événement D est égale à 0,094.

d. On constate que la pièce choisie a un défaut. Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2. On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes. On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b. Dans cette question, on prend $n = 150$.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150}.

c. Un test de qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites. Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

3-11 : Nouvelle-Calédonie 11/2013, 5 points, tous

Tous les résultats numériques devront être donnés sous forme décimale et arrondis au dix-millième.

Une usine fabrique des billes sphériques dont le diamètre est exprimé en millimètres.

Une bille est dite « hors norme » lorsque son diamètre est inférieur à 9 mm ou supérieur à 11 mm.

Partie A

1. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque bille choisie au hasard dans la production associe son diamètre exprimé en mm.

On admet que la variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance 10 et d'écart-type 0,4.

Montrer qu'une valeur approchée à 0,0001 près de la probabilité qu'une bille soit hors norme est 0,0124.

2. On met en place un contrôle de production tel que 98 % des billes hors norme sont écartées et 99% des billes correctes sont conservées.

On choisit une bille au hasard dans la production. On note N l'évènement : « la bille choisie est aux normes », A l'évènement : « la bille choisie est acceptée à l'issue du contrôle ».

a. Construire un arbre pondéré qui réunit les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité de l'événement A.

c. Quelle est la probabilité pour qu'une bille acceptée soit hors norme ?

Partie B

Ce contrôle de production se révélant trop coûteux pour l'entreprise, il est abandonné : dorénavant, toutes les billes produites sont donc conservées, et elles sont conditionnées par sacs de 100 billes.

On considère que la probabilité qu'une bille soit hors norme est de 0,0124.

On admettra que prendre au hasard un sac de 100 billes revient à effectuer un tirage avec remise de 100 billes dans l'ensemble des billes fabriquées.

On appelle Y la variable aléatoire qui à tout sac de 100 billes associe le nombre de billes hors norme de ce sac.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ?

2. Quels sont l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire Y ?

3. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne exactement deux billes hors norme ?

4. Quelle est la probabilité pour qu'un sac de 100 billes contienne au plus une bille hors norme ?

4. Géométrie

4-1 : Pondichéry, avril 2013, 5 points, non spécialistes

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On note i le nombre complexe tel que $i^2=-1$.

On considère le point A d'affixe $z_A=1$ et le point B d'affixe $z_B=i$.

À tout point M d'affixe $z_M=x+iy$ avec x et y deux réels tels que $y\neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z_{M'}=-iz_M$.

On désigne par I le milieu du segment $[AM]$.

Le but de l'exercice est de montrer que pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM' (propriété 1) et que $BM'=2OI$ (propriété 2).

1. Dans cette question et uniquement dans cette question, on prend $z_M=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

a. Déterminer la forme algébrique de z_M.

b. Montrer que $z_{M'}=-\sqrt{3}-i$. Déterminer le module et un argument de $z_{M'}$.

c. Placer les points A, B, M, M' et I dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

2. On revient au cas général en prenant $z_M=x+iy$ avec $y\neq 0$.

a. Déterminer l'affixe du point I en fonction de x et y.

b. Déterminer l'affixe du point M' en fonction de x et y.

c. Écrire les coordonnées des points I, B et M'.

d. Montrer que la droite (OI) est une hauteur du triangle OBM'.

e. Montrer que $BM'=2OI$.

4-2 : Pondichéry, avril 2013, 4 points

Pour chacune des questions, quatre propositions de réponse sont données dont une seule est exacte. Pour chacune des questions indiquer, sans justification, la bonne réponse sur la copie. Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse

fausse ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Il en est de même dans le cas où plusieurs réponses sont données pour une même question.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. t et t' désignent des paramètres réels.

Le plan (P) a pour équation $x-2y+3z+5=0$.

Le plan (S) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t + 2t' \\ y = -t - 2t' \\ z = -1 - t + 3t' \end{cases}$.

La droite (D) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \\ z = -1 - t \end{cases}$.

On donne les points de l'espace $M(-1\,;2\,;3)$ et $N(1\,;-2\,;9)$.

1. Une représentation paramétrique du plan (P) est :

a. $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 2t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$	b. $\begin{cases} x = t + 2t' \\ y = 1 - t + t' \\ z = -1 - t \end{cases}$	c. $\begin{cases} x = t + t' \\ y = 1 - t - 2t' \\ z = -1 - t - 3t' \end{cases}$	d. $\begin{cases} x = 1 + 2t + t' \\ y = 1 - 2t + 2t' \\ z = -1 - t' \end{cases}$

2. a. La droite (D) et le plan (P) sont sécants au point $A(-8\,;3\,;2)$.
b. La droite (D) et le plan (P) sont perpendiculaires.
c. La droite (D) est une droite du plan (P).
d. La droite (D) et le plan (P) sont strictement parallèles.
3. a. La droite (MN) et la droite (D) sont orthogonales.
b. La droite (MN) et la droite (D) sont parallèles.
c. La droite (MN) et la droite (D) sont sécantes.
d. La droite (MN) et la droite (D) sont confondues.
4. a. Les plans (P) et (S) sont parallèles.
b. La droite (Δ) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = -3 - t \end{cases}$ est la droite d'intersection des plans (P) et (S).
c. Le point M appartient à l'intersection des plans (P) et (S).
d. Les plans (P) et (S) sont perpendiculaires.

4-3 : Amérique du Nord 2013, 5 points

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0; 4; 1), B (1; 3; 0), C(2 ; –1 ; –2) et D (7 ; –1 ; 4).
1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2:-1\,;3)$.
a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).
b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.
d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).
3. Soit P_1 le plan d'équation $x + y + z = 0$ et P_2 le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.
a. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.
b. Vérifier que la droite d, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.
c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

4-4 : Liban 2013, 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des propositions est correcte.

Chaque réponse correcte rapporte un point. Une réponse erronée ou une absence de réponse n'ôte pas de point. On notera sur la copie le numéro de la question, suivi de la réponse correspondant à la proposition choisie.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives A(1 ; –1 ; 2), B(3 ; 3 ; 8), C(–3 ; 5 ; 4) et D(1 ; 2 ; 3).

On note $\mathcal{D}$ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=t+1 \\ y=2t-1\,,\,t\in\mathbb{R} \\ z=3t+2 \end{cases}$ et $\mathcal{D}$' la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=k+1 \\ y=k+3 \quad ,\,k\in\mathbb{R} \\ z=-k+4 \end{cases}$.

On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x+y-z+2=0$.

Question 1 :

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' sont parallèles.	Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' sont coplanaires.
Le point C appartient à la droite $\mathcal{D}$.	Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' sont orthogonales.

Question 2 :

Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est parallèle à la droite $\mathcal{D}$'.	Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$' et est parallèle à la droite $\mathcal{D}$.
Le plan $\mathcal{P}$ contient la droite $\mathcal{D}$ et est orthogonal à la droite $\mathcal{D}$'.	Le plan $\mathcal{P}$ contient les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$'.

Question 3 :

Les points A, D et C sont alignés.	Le triangle ABC est rectangle en A.
Le triangle ABC est équilatéral.	Le point D est le milieu du segment [AB].

Question 4 : on note $\mathcal{P}$' le plan contenant la droite $\mathcal{D}$' et le point A. Un vecteur normal à ce plan est :

$\vec{n}(-1\,;5\,;4)$	$\vec{n}(3\,;-1\,;2)$
$\vec{n}(1\,;2\,;3)$	$\vec{n}(1\,;-1\,;1)$

4-5 : Asie juin 2013, 4 points

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives : $a=2+2i$, $b=-\sqrt{3}+i$, $c=1+i\sqrt{3}$, $d=-1+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $e=-1+\left(2+\sqrt{3}\right)i$.

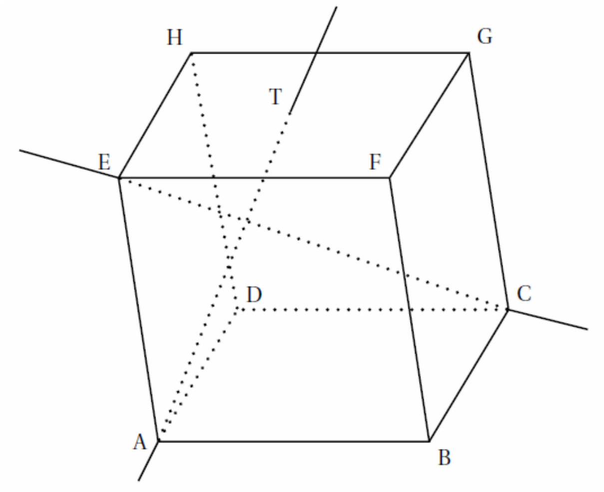
1. Affirmation 1 : les points A, B et C sont alignés.
2. Affirmation 2 : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.
3. Dans cette question, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points

I(1 ; 0 ; 0), J(0 ; 1 ; 0) et K(0 ; 0 ; 1).

Affirmation 3 : la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x=2-t \\ y=6-2t \\ z=-2+t \end{cases}$ où $t\in\mathbb{R}$, coupe le plan

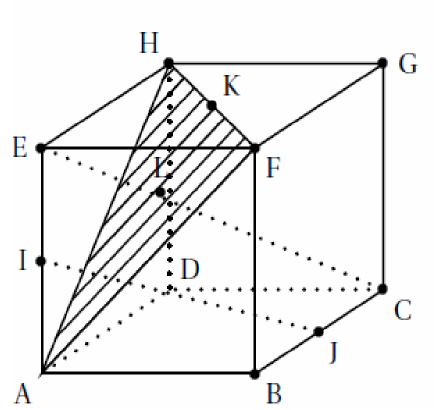
(IJK) au point $E\left(-\frac{1}{2};1;\frac{1}{2}\right)$.



4. Dans le cube $ABCDEFGH$, le point T est le milieu du segment $[HF]$.

Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.

4-6 : Antilles-Guyane 2013, 5 points



Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$: ABCDEFGHdésigne un cube de côté 1. On appelle P le plan (AFH).

Le point I est le milieu du segment [AE].

Le point J est le milieu du segment [BC].

Le point K est le milieu du segment [HF].

Le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan P.

Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. a. Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles. b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.
c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes. d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.

2. a. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BC}$ est égal à 0. b. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BG}$ est égal à (–1).
c. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BG}$ est égal à 1. d. Le produit scalaire $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{BG}$ est égal à 2.

3. Dans le repère orthonormé $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$,

a. le plan P a pour équation cartésienne : $x + y + z - 1 = 0$.
b. le plan P a pour équation cartésienne : $x - y + z = 0$.
c. le plan P a pour équation cartésienne : $-x + y + z = 0$.
d. le plan P a pour équation cartésienne : $x + y - z = 0$.

4. a. $\overrightarrow{EG}$ est un vecteur normal au plan P. b. $\overrightarrow{EL}$ est un vecteur normal au plan P.
c. $\overrightarrow{IJ}$ est un vecteur normal au plan P. d. $\overrightarrow{DI}$ est un vecteur normal au plan P.

5. a. $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ b. $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$. c. $\overrightarrow{ID}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IJ}$. d. $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$.

4-7 : Centres étrangers juin 2013, 4 points

Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si elle est vraie ou fausse. en justifiant la réponse.

Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère :

– les points A(12 ; 0 ; 0), B(0 ; –15 ; 0), C(0 ; 0 ; 20), D(2 ; 7 ; –6), E(7 ; 3 ; –3) ;
– le plan P d'équation cartésienne : $2x + y - 2z - 5 = 0$
Affirmation 1 :
Une équation cartésienne du plan parallèle à P et passant par le point A est : $2x + y + 2z - 24 = 0$.

Affirmation 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AC) est : $\begin{cases} x = 9 - 3t \\ y = 0 \\ z = 5 + 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Affirmation 3 : La droite (DE) et le plan P ont au moins un point commun.

Affirmation 4 : La droite (DE) est orthogonale au plan P.

4-8 : France métro, juin 2013, 4 points

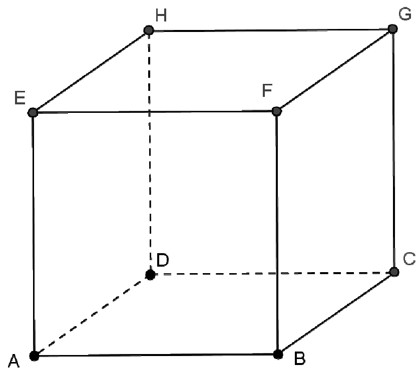
Pour chacune des quatre propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse choisie. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. Proposition 1 : Dans le plan muni d'un repère orthonormé, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |z + 1|$ est une droite.

2. Proposition 2 : Le nombre complexe $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^4$ est un nombre réel.

3. Soit ABCDEFGH un cube.

Proposition 3 : Les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.



4. L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit le plan P d'équation cartésienne $x + y + 3z + 4 = 0$. On note S le point de coordonnées (1 ; –2 ; –2).

Proposition 4 : La droite qui passe par S et qui est perpendiculaire au plan P a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

4-9 : Antilles-Guyane, sept 2013, 5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soit Δ une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ et soit P un plan.

On considère deux droites sécantes et contenues dans P : la droite D_1 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ et la droite D_2 de vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$.

Montrer que Δ est orthogonale à toute droite de P si et seulement si Δ est orthogonale à D_1 et à D_2.

Partie B

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les trois points

A(0 ; –1 ; 1), B(4 ; –3 ; 0) et C(–1 ; –2 ; –1).

On appelle P le plan passant par A, B et C.

On appelle Δ la droite ayant pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = t \\ y = 3t - 1 \\ z = -2t + 8 \end{cases}$ avec t appartenant à $\mathbb{R}$.

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Affirmation 1 : Δ est orthogonale à toute droite du plan P.
2. Affirmation 2 : les droites Δ et (AB) sont coplanaires.
3. Affirmation 3 : Le plan P a pour équation cartésienne $x + 3y - 2z + 5 = 0$.
4. On appelle D la droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{u}(11; -1; 4)$.

Affirmation 4 : La droite D est strictement parallèle au plan d'équation $x + 3y - 2z + 5 = 0$.

4-10 : Polynésie juin 2013, 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte. Chaque réponse correcte rapporte 1 point. Une réponse erronée ou une abscence de réponse n'ôte pas de point.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est :

a. $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ b. $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ c. $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ d. $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \bar{z}$, d'inconnue complexe z, admet :

a. une solution	b. deux solutions	c. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.	d. une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

3. Dans un repère de l'espace, on considère les trois points A(1 ; 2 ; 3), B(–1 ; 5 ; 4) et C(–1 ; 0 ; 4). La droite parallèle à la droite (AB) passant par le point C a pour représentation paramétrique :

a. $\begin{cases} x = -2t - 1 \\ y = 3t \\ z = t + 4 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x = -1 \\ y = 7t \\ z = 7t + 4 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 5 + 3t \\ z = 4 + t \end{cases}$ d. $\begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = -t \end{cases}$

4. Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan P passant par le point D(–1 ; 2 ; 3) et de vecteur normal $\vec{n}(3\,;-5\,;1)$, et la droite Δ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = t - 7 \\ y = t + 3 \\ z = 2t + 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

a. La droite Δ est perpendiculaire au plan P.

b. La droite Δ est est parallèle au plan P et n'a pas de point commun avec le plan P.

c. La droite Δ et le plan P sont sécants.

d. La droite Δ est incluse dans le plan P.

4-11 : France métropolitaine sept. 2013, 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.

Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.

Il est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

La droite D est définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$.

1. On note P le plan d'équation cartésienne $3x + 2y + z - 6 = 0$.

a. La droite D est perpendiculaire au plan P.

b. La droite D est parallèle au plan P.

c. La droite D est incluse dans le plan P.

2. On note D′ la droite qui passe par le point A de coordonnées (3 ; 1 ; 1) et a pour vecteur directeur $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

a. Les droites D et D′ sont parallèles.

b. Les droites D et D′ sont sécantes.

c. Les droites D et D′ ne sont pas coplanaires.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3. Soit E l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+i|=|z-i|$.

a. E est l'axe des abscisses.

b. E est l'axe des ordonnées.

c. E est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\frac{c}{b}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a. Le triangle OBC est isocèle en O.

b. Les points O, B, C sont alignés.

c. Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

4-12 : Nouvelle-Calédonie 11/2013, 5 points, non spécialistes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

1. Proposition : Pour tout entier naturel n : $(1+i)^{4n}=(-4)^n$.

2. Soit (E) l'équation $(z-4)\left(z^2-4z-8\right)=0$ où z désigne un nombre complexe.

Proposition : Les points dont les affixes sont les solutions, dans $\mathbb{C}$, de (E) sont les sommets d'un triangle d'aire 8.

3. Proposition : Pour tout nombre réel α, $1+e^{2i\alpha}=e^{i\alpha}\cos(\alpha)$.

4. Soit A le point d'affixe $z_A=\frac{1}{2}(1+i)$ et M_n le point d'affixe $(z_A)^n$ où n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Proposition : si $n-1$ est divisible par 4, alors les points O, A et M_n sont alignés.

5. Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Proposition : $1+j+j^2=0$.

5. Spécialité

5-1 : Amérique du Nord 2013, 5 points, spécialistes

PartieA

On considère l'algorithme suivant :

Variables	a, b, c sont des entiers naturels
Initialisation	Affecter à c la valeur 0 Demander la valeur de a Demander la valeur de b
Traitement	Tant que a>b Affecter à c la valeur c+1 Affecter à a la valeur a – b Fin de tant que
Sortie	Afficher c Afficher a

1. Activer cet algorithme avec a = 13 et b = 4 en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

2. Que permet de calculer cet algorithme ?

PartieB

À chaque lettre de l'alphabet, on associe (tableau ci-dessous), un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.

2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1[26]$.

2. Démontrer alors l'équivalence : $9m+5 \equiv p[26] \Leftrightarrow m \equiv 3p-15[26]$.

3. Décoder alors la lettre B.

5-2 : Pondichéry, avril 2013, 5 points, spécialistes

On étudie l'évolution dans le temps du nombre de jeunes et d'adultes dans une population d'animaux.

Pour tout entier naturel n, on note j_n le nombre d'animaux jeunes après n années d'observation et a_n le nombre d'animaux adultes après n années d'observation.

Il y a au début de la première année de l'étude, 200 animaux jeunes et 500 animaux adultes.

Ainsi $j_0 = 200$ et $a_0 = 500$.

On admet que pour tout entier naturel n on a : $\begin{cases} j_{n+1} = 0{,}125 j_n + 0{,}525 a_n \\ a_{n+1} = 0{,}625 j_n + 0{,}625 a_n \end{cases}$.

On introduit les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}525 \\ 0{,}625 & 0{,}625 \end{pmatrix}$ et, pour tout entier naturel n, $U_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$.

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = A \times U_n$.

b. Calculer le nombre d'animaux jeunes et d'animaux adultes après un an d'observation puis après deux ans d'observation (résultats arrondis à l'unité près par défaut).

c. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer U_n en fonction de A_n et de U_0.

2. On introduit les matrices suivantes $Q = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -0{,}25 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. On admet que la matrice Q est inversible et que $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & -0{,}06 \\ 0{,}1 & 0{,}14 \end{pmatrix}$. Montrer que $Q \times D \times Q^{-1} = A$.

b. Montrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n non nul : $A^n = Q \times D^n \times Q^{-1}$.

c. Pour tout entier naturel n non nul, déterminer D^n en fonction de n.

3. On admet que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = \begin{pmatrix} 0{,}3+0{,}7\times(-0{,}25)^n & 0{,}42-0{,}42\times(-0{,}25)^n \\ 0{,}5-0{,}5\times(-0{,}25)^n & 0{,}7+0{,}3\times(-0{,}25)^n \end{pmatrix}$.

a. En déduire les expressions de j_n et a_n en fonction de n et déterminer les limites de ces deux suites.

b. Que peut-on en conclure pour la population d'animaux étudiée ?

5-3 : Liban 2013, 5 points, spécialistes

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n .$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Pour tout entier naturel $n > 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables	a,b et c sont des nombres réels, i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.
Initialisation	a prend la valeur 3 b prend la valeur 8
Traitement	Saisir n Pour i variant de 2 à n faire c prend la valeur a a prend la valeur b b prend la valeur . . . Fin Pour
Sortie	Afficher b

a. Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b. Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3. Pour tout entier naturel n, on note C_n lamatrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n, $C_{n+1} = AC_n$.

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n, $C_n = A^n C_0$.

4. Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer QP.

On admet que $A = PDQ$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n, $A^n = PD^nQ$.

5. À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet :

pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1}+3^{n+1} & 3\times 2^{n+1} - 2\times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3\times 2^n - 2\times 3^n \end{pmatrix}$.

En déduire une expression de u_n en fonction de n. La suite (u_n) a-t-elle une limite ?

5-4 : Antilles-Guyane 2013, 5 points, spécialistes

On définit les suites (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2},\ v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1. Calculer u_1 et v_1.

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables	u, v et w des nombres réels N et k des nombres entiers.
Initialisation	u prend la valeur 0 v prend la valeur 1
Traitement	Entrer la valeur de N Pour k variant de 1 à N w prend la valeur u

	u prend la valeur $\frac{w+v}{2}$ v prend la valeur $\frac{w+2v}{3}$ Fin du Pour Afficher u Afficher v

a. On exécute cet algorithme en saisissant N= 2. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel n, on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b. Démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$ pour tout entier naturel n.

4. On définit les matrices P, P' et B par $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a. Calculer le produit PP'. On admet que $P'BP = A$.

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$.

b. On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5. a. Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{6^n} \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$ pour tout entier naturel n.

En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.

b. Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

5-5 : Asie juin 2013, 5 points, spécialistes

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.

Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle OE'F'G', appelé image de OEFG.

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

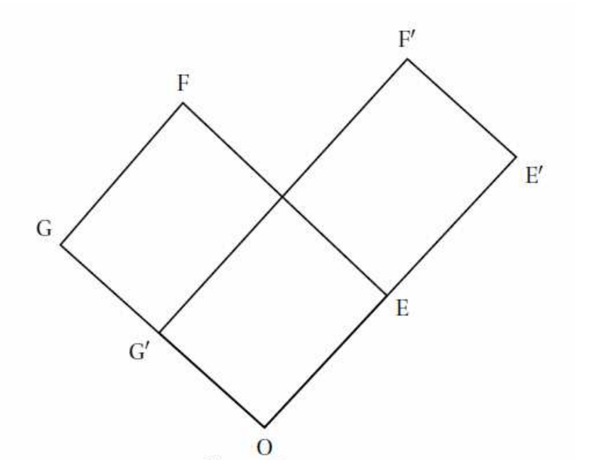


Figure 1

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives (2 ; 2), (–1 ; 5) et (–3 ; 3).

La transformation du logiciel associe à tout point $M(x\,;\,y)$ du plan le point $M'(x'\,;\,y')$, image du point M tel que : $\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{cases}$.

1. a. Calculer les coordonnées des points E', F' et G', images des points E, F et G par cette transformation.

b. Comparer les longueurs OE et OE' d'une part, OG et OG' d'autre part.

Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

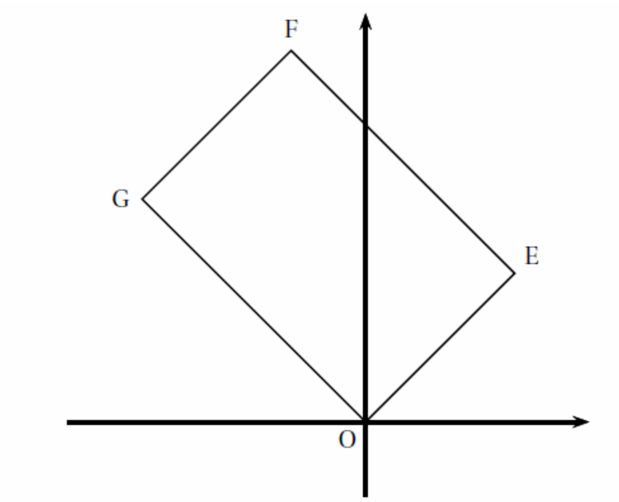


Figure 2

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle OEFG lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.

Une erreur a été commise.

Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur –1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x, afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2, 5	7, 25	15, 625	31,812 5	63,906 3	2 047,997 1	65 535,999 9
y	5, 5	8, 75	16, 375	32,187 5	64,093 8	2 048,002 9	65 536,000 1

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle OEFG. On définit la suite des points $E_n\ (x_n\,;y_n)$ du plan par $E_0 = E$ et la relation de récurrence : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où $(x_{n+1}\,;y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}. Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n > 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n > 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \dfrac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.

On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $(x_n\,;y_n)$ du point E_n vérifient :

$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

5-6 : Centres étrangers juin 2013, 5 points, spécialistes

Une espèce d'oiseaux ne vit que sur deux îles A et B d'un archipel.

Au début de l'année 2013, 20 millions d'oiseaux de cette espèce sont présents sur l'île A et 10 millions sur l'île B.

Des observations sur plusieurs années ont permis aux ornithologues d'estimer que, compte tenu des naissances, décès et migrations entre les deux îles, on retrouve au début de chaque année les proportions suivantes :

– sur l'île A : 80 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île A au début de l' année précédente et 30 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente ;

– sur l'île B : 20 % du nombre d' oiseaux présents sur l'île A au début de l'année précédente et 70 % du nombre d'oiseaux présents sur l'île B au début de l'année précédente.

Pour tout entier naturel n, on note a_n (respectivement b_n) le nombre d'oiseaux (en millions) présents sur l'île A (respectivement B) au début de l'année $(2013+n)$.

Partie A - Algorithmique et conjectures

On donne ci-dessous un algorithme qui doit afficher le nombre d'oiseaux vivant sur chacune des deux iles, pour chaque année comprise entre 2013 et une année choisie par l'utilisateur.

Début de l'algorithme	Demander n à l'utilisateur
	Affecter à a la valeur 20
	Affecter à b la valeur 10
	Affecter à i la valeur 2013
	Afficher i, afficher a, afficher b
	Tant que $i < n$ faire
	    Affecter à c la valeur $(0{,}8a + 0{,}3b)$
	    Affecter à b la valeur $(0{,}2a + 0{,}7b)$
	    Affecter à a la valeur c

Fin de l 'algorithme	Fin du Tant que

1. Cet algorithme comporte des erreurs et des oublis dans le traitement. Repérer ces défauts et les corriger.

2. On donne ci-dessous une copie d'écran des résultats obtenus après avoir modifié l'algorithme précédent. L'utilisateur a choisi l'année 2020 et a donc saisi $n = 7$.

⋆⋆⋆ Algorithme lancé ⋆⋆⋆
En l'année 2013, a prend la valeur 20 et b prend la valeur 10
En l'année 2014, a prend la valeur 19 et b prend la valeur 11
En l'année 2015, a prend la valeur 18.5 et b prend la valeur 11.5
En l'année 2016, a prend la valeur 18.25 et b prend la valeur 11.75
En l'année 2017, a prend la valeur 18.125 et b prend la valeur 11.875
En l'année 2018. a prend la valeur 18.0425 et b prend la valeur 11.9375
En l'année 2019, a prend la valeur 18.03125 et b prend la valeur 11.96875
En l'année 2020, a prend la valeur 18.15425 et b prend la valeur 11.984375
⋆⋆⋆ Algorithme terminé ⋆⋆⋆

Au vu de ces résultats, émettre des conjectures concernant le sens de variation et la convergence des suites (a_n) et (b_n).

Partie B – Étude mathématique

On note U_0 la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$, où M est une matrice carrée d'ordre 2 que l'on déterminera.

On admet alors que $U_n = M^n U_0$ pour tout entier naturel n.

2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, justifier que, pour tout entier naturel n :

$$M^n = \begin{pmatrix} 0,6+0,4\times 0,5^n & 0,8-0,6\times 0,5^n \\ 0,4-0,4\times 0,5^n & 0,4+0,6\times 0,5^n \end{pmatrix}.$$

On ne détaillera le calcul que pour le premier des coefficients de la matrice M^n.

3. Exprimer a_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

4. Avec ce modèle, peut-on dire qu'au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser ? Si oui, préciser vers quelle valeur.

5-7 : France métro, juin 2013, 5 points, spécialistes

On étudie la population d'une région imaginaire. Le 1er janvier 2013, cette région comptait 250 000 habitants dont 70 % résidaient à la campagne et 30 % en ville.

L'examen des données statistiques recueillies au cours de plusieurs années amène à choisir de modéliser l'évolution de la population pour les années à venir de la façon suivante :

- l'effectif de la population est globalement constant,
- chaque année, 5 % de ceux qui résident en ville décident d'aller s'installer à la campagne et 1 % de ceux qui résident à la campagne choisissent d'aller habiter en ville.

Pour tout entier naturel n, on note v_n le nombre d'habitants de cette région qui résident en ville au 1er janvier de l'année (2013+n) et c_n le nombre de ceux qui habitent à la campagne à la même date.

1. Pour tout entier naturel n, exprimer v_{n+1} et c_{n+1} en fonction de v_n et c_n.

2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix}$. On pose $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ où a, b sont deux réels fixés et $Y = AX$.

Déterminer, en fonction de a et b, les réels c et d tels que $Y = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

Les résultats précédents permettent d'écrire que pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} v_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

On peut donc en déduire que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n X_0$.

3. Soient les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer PQ et QP. En déduire lamatrice P^{-1} en fonction de Q.

b. Vérifier que lamatrice $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale D que l'on précisera.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4. Les résultats des questions précédentes permettent d'établir que

$$v_n = \frac{1}{6}\left(1+5\times 0{,}94^n\right)v_0 + \frac{1}{6}\left(1-0{,}94^n\right)c_0 .$$

Quelles informations peut-on en déduire pour la répartition de la population de cette région à long terme ?

5-8 : Polynésie juin 2013, 5 points, spécialistes

Un opérateur téléphonique A souhaite prévoir l'évolution de nombre de ses abonnés dans une grande ville par rapport à son principal concurrent B à partir de 2013.

En 2013, les opérateurs A et B ont chacun 300 000 d'abonnés.

Pour tout entier naturel n, on note a_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur A la n-ième année après 2013, et b_n le nombre d'abonnés, en milliers, de l'opérateur B la n-ième année après 2013.

Ainsi, $a_0 = b_0 = 300$.

Des observations réalisées les années précédentes conduisent à modéliser la situation par la relation suivante : pour tout entier naturel n, $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}7a_n + 0{,}2b_n + 60 \\ b_{n+1} = 0{,}1a_n + 0{,}6b_n + 70 \end{cases}$.

On considère les matrices $M = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \end{pmatrix}$.

Pour tout entier naturel n, on note U_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

1.a. Déterminer U_1.

b. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = M \times U_n + P$.

2. On note I la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Calculer $(I - M)\times\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

b. En déduire que la matrice $I - M$ est inversible et préciser son inverse.

c. Déterminer la matrice U telle que $U = M \times U + P$.

3. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = U_n - U$.

a. Justifier que, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = M \times V_n$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $V_n = M^n \times V_0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n, $V_n = \begin{pmatrix} \frac{-100}{3}\times 0{,}8^n - \frac{140}{3}\times 0{,}5^n \\ \frac{-50}{3}\times 0{,}8^n + \frac{140}{3}\times 0{,}5^n \end{pmatrix}$.

a. Pour tout entier naturel n, exprimer U_n en fonction de n et en déduire la limite de la suite (a_n).

b. Estimer le nombre d'abonnés de l'opérateur A à long terme.

5-9 : Antilles-Guyane, sept 2013, 5 points spécialistes

Partie A On considère l'algorithme suivant :

A et X sont des nombres entiers

Saisir un entier positif A

Affecter à X la valeur de A

Tant que X supérieur ou égal à 26

Affecter à X la valeur X – 26

Fin du tant que

Afficher X

1. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 3 ?
2. Qu'affiche cet algorithme quand on saisit le nombre 55 ?
3. Pour un nombre entier saisi quelconque, que représente le résultat fourni par cet algorithme ?

PartieB

On veut coder un bloc de deux lettres selon la procédure suivante, détaillée en quatre étapes :

Étape 1 : chaque lettre du bloc est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient une matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

Étape 2 : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ tel que $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. La matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ est appelée la matrice de codage.

Étape 3 : $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ est transformé en $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ tel que : $\begin{cases} z_1 \equiv y_1 [26] \text{ avec } 0 \le z_1 \le 25 \\ z_2 \equiv y_2 [26] \text{ avec } 0 \le z_2 \le 25 \end{cases}$.

Étape 4 : $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$ est transformé en un bloc de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple : $\text{RE} \to \begin{pmatrix} 17 \\ 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 55 & 93 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 15 \end{pmatrix} \to \text{DP}$. Le bloc RE est donc codé en DP.

Justifier les différentes étapes de ce calcul.

1. Soient x_1, x_2 , X_1, X_2, quatre nombres entiers compris entre 0 et 25 tels que $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$ sont transformés lors du procédé de codage en $\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \equiv 3X_1 + X_2 [26] \\ 5x_1 + 2x_2 \equiv 5X_1 + 2X_2 [26] \end{cases}$.

b. En déduire que $x_1 \equiv X_1 [26]$ et $x_2 \equiv X_2 [26]$ puis que $x_1 = X_1$ et $x_2 = X_2$.

2. On souhaite trouver une méthode de décodage pour le bloc DP :

a. Vérifier que la matrice $C' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice inverse de C.

b. Calculer $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 15 \end{pmatrix}$.

c. Calculer $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ tels que $\begin{cases} x_1 \equiv y_1 [26] \text{ avec } 0 \le x_1 \le 25 \\ x_2 \equiv y_2 [26] \text{ avec } 0 \le x_2 \le 25 \end{cases}$.

d. Quel procédé général de décodage peut-on conjecturer ?

3. Généraliser ce procédé de décodage.
4. Décoder QC.

5-10 : France métropolitaine sept. 2013 5 points, spécialistes

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition. Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

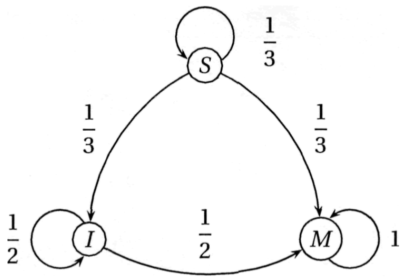
S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,
I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,
M : « l'individu est malade et infecté ».

Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\frac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{3}$,
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\frac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = \begin{pmatrix} s_n & i_n & m_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine.

On a alors $P_0 = \begin{pmatrix} 0,99 & 0 & 0,01 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $\begin{cases} s_{n+1} = \frac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} = \frac{1}{3}s_n + \frac{1}{2}i_n + m_n \end{cases}$.

1. Écrire la matrice A, appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times A$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2}.
Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{12} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix}$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination. Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = \begin{pmatrix} 0,01 & 0,10 & 0,89 \end{pmatrix}$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.

2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

3. a. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b. Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie. Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?

5-11 : Nouvelle-Calédonie 11/2013, 5 points, spécialistes

On note E l'ensemble des vingt-sept nombres entiers compris entre 0 et 26.

On note A l'ensemble dont les éléments sont les vingt-six lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots, noté « ⋆ », considéré comme un caractère.

Pour coder les éléments de A, on procède de la façon suivante :

• Premièrement : On associe à chacune des lettres de l'alphabet, rangées par ordre alphabétique, un nombre entier naturel compris entre 0 et 25, rangés par ordre croissant.

On a donc $\text{a} \to 0, \text{b} \to 1, \ldots, \text{z} \to 25$ et on associe au séparateur ⋆ le nombre 26.

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On dit que a **a** pour rang 0, **b** a pour rang 1, ..., **z** a pour rang 25 et le séparateur ⋆ a pour rang 26.

• Deuxièmement : à chaque élément x de E, l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x+3$ par 27.

On remarquera que pour tout x de E, $g(x)$ appartient à E.

• Troisièmement : Le caractère initial est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$.

Exemple : $\text{s} \leftrightarrow 18 \xrightarrow{g} 21 \leftrightarrow v$. Donc la lettre **s** est remplacée lors du codage par la lettre **v**.

1. Trouver tous les entiers x de E tels que $g(x) = x$, c'est-à-dire *invariants* par g. En déduire les caractères *invariants* dans ce codage.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel x appartenant à E et tout entier naturel y appartenant à E, si $y \equiv 4x+3 \bmod 27$ alors $x \equiv 7y+6 \bmod 27$.

En déduire que deux caractères distincts sont codés par deux caractères distincts.

3. Proposer une méthode de décodage.

4. Décoder le mot « **v f v** ».

6. Concours

6-1 : Concours Accès

Chaque question comporte quatre items, notées A. B. C. D.. Pour chaque item, vous devez signaler s'il est vrai ou faux.

Règle d'attribution des points : vous disposez d'un capital de points initial. Chaque erreur entraîne une pénalité (P) qui entame votre capital. Une absence de réponse entraîne une pénalité (p) qui entame aussi votre capital (p est inférieur à P). Enfin, un bonus est attribué si vous répondez correctement aux quatre items d'une même question.

Exercices n° 1 à 6 : Raisonnement logique

Exercice 1

On s'intéresse à trois membres du personnel d'une entreprise : Xavière, Yvette et Zoé.

On sait qu'elles occupent chacune l'un des postes de directeur des services suivants : service marketing, service des ressources humaines et service financier.

Par ailleurs on sait aussi que :

La financière est la moins ancienne dans l'entreprise et qu'elle n'a pas d'enfants à charge.

Xavière a des enfants à charge.

Yvette est plus ancienne dans l'entreprise que la directrice marketing.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A	B	C	D
Xavière est directrice financière.	Yvette est directrice des ressources humaines.	Zoé est la moins ancienne.	La directrice des ressources humaines est la plus ancienne des trois.

Exercice 2

Une société de location propose à une entreprise de travaux publics trois types de contrats pour la location d'un engin. Ces contrats sont valables à partir du 1er janvier 2012 :

- Contrat n°1 : le montant mensuel de la location est de 2000 € et ce montant mensuel augmentera de α = 10% chaque année au 1er janvier (la première augmentation ayant donc lieu le 1er janvier 2013).

- Contrat n°2 : le montant annuel de la location est de a =41000 € pour 2012 et il augmente de b = 4000 € chaque année, dès le 1er janvier 2013.

- Contrat n°3 : le montant mensuel de la location est de 3000 € pour janvier 2012 et il augmente de β =2% les 1er janvier et 1er juillet de chaque année et ce dès le 1er juillet 2012.

La société de location précise d'autre part à l'entreprise que la location de l'engin est valable pour des années complètes d'utilisation et que le montant total dû pour l'année est payable en début d'année. Soit n le nombre d'années de location.

On désigne par u_n, v_n et w_n respectivement le montant annuel de la location (en euros) pour les contrats n°1, n°2 et n°3.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A	B	C	D
$u_n = u_1(1+\alpha)^{n-1}$	$w_n = w_1(1+\beta)^{2n-2}$	$v_n = a+(n-1)b$	Le montant annuel de la location avec le contrat n°1 atteint le montant annuel de la location avec le contrat n°3 pour $n = \dfrac{\ln w_1 - \ln u_1}{\ln(1+\alpha)-2\ln(1+\beta)}$.

Exercice 3

Trois équipes de football d'écoles de commerce ont disputé un mini championnat entre elles. Chaque équipe a joué une seule fois contre chaque adversaire. Vous trouverez ci-joint des informations incomplètes :

Equipe	Nombre de parties jouées	Nombre de parties gagnées	Nombre de parties perdues	Nombre de parties nulles	Nombre de buts marqués	Nombre de buts encaissés
X	2	¿	1	¿	3	2
Y	¿	¿	1	1	0	¿
Z	¿	¿	¿	¿	¿	1

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. L'équipe X a gagné une seule fois.

B. Le match entre les équipes Y et Z s'est terminé par un match nul.

C. L'équipe X a marqué plus de buts que les 2 autres équipes.

D. L'équipe X a battu l'équipe Y, 2 buts à 1.

Exercice 4

Ce matin, je suis parti avec x € en poche et sur mon chemin j'ai rencontré trois personnes nécessiteuses. J'ai donné au premier 1 € de plus que la moitié de ce que j'avais en poche. Au second, j'ai remis 2 € de plus que la moitié de ce qui me restait alors. Le troisième a reçu 3 € de plus que la moitié de ce qui me restait à ce moment-là. Il me reste 1 €.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. J'ai donné au premier $\frac{x+1}{2}$ €.

B. Après avoir donné de l'argent au second, il me restait $\frac{x+10}{4}$ €.

C. J'ai donné au troisième $\frac{x+14}{8}$ €.

D. J'ai distribué 42 €.

Exercice 5

Dans un groupe composé de x étudiants, on a relevé la couleur des yeux (brun, noir et bleu) et la couleur des cheveux (blond et noir) ; les résultats sont les suivants :

- 20 étudiants ont les yeux bleus et les cheveux blonds ;
- 60 ont les yeux noirs et les cheveux noirs ;
- 42 ont les cheveux blonds ;
- 50 ont les yeux bruns ;
- 72 ont les yeux noirs.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Le pourcentage de ceux qui ont les yeux bruns et les cheveux noirs est de $\frac{40}{x}$ %.

B. $(x-120)$ étudiants ont les yeux bleus.

C. Le groupe est composé d'au moins 152 étudiants.

D. Il y a plus d'étudiants avec des cheveux noirs que des cheveux blonds.

Exercice 6

Dans une entreprise de 3000 personnes, le salaire moyen est de 2000 €.

Le salaire moyen des hommes est de 3000 €, celui des femmes est de 1500 €. Les 10 % de femmes les moins bien payées ont un salaire moyen de 1000 €.

À partir de ces informations, on peut conclure que :

A. Il y a un tiers d'hommes dans l'entreprise.

B. C'est un homme qui gagne le plus.

C. Si on retire le plus gros salaire gagné par un homme (10000 €), le salaire moyen des hommes devient inférieur à 2990 €.

D. Les 10 % de femmes les moins bien payées gagnent moins de 3 % de la masse salariale totale.

Exercices n° 7 à 12 : Raisonnement mathématique

Exercice 7

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=a+bxe^{-x}$ où a et b sont 2 nombres réels. La courbe représentative de f passe par le point de coordonnées (0 ; 1). En ce point, la tangente à la courbe a comme pente 1.

A. $f'(x)=b(1+x)e^{-x}$.

B. $a=b=1$.

C. f admet un maximum qui vaut $1+e$.

D. L'équation $f(x)=0$ admet une solution unique notée α, avec $-1 < \alpha < 1$.

Exercice 8

On considère la fonction : $f(x)=\dfrac{2\ln x+1}{x}$. Soit (C) la courbe représentative de *f*.

A. La droite $y = 0$ est une asymptote à (C).
B. La droite $x = 0$ est une asymptote à (C).
C. Sur $\left]0\,;e^{1/2}\right[$, la fonction *f* est décroissante.

D. Les coordonnées du point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses sont $\left(e^{1/2}\,;0\right)$.

Exercice 9

Soit la courbe D d'équation $y=mx+5$, $m\in\mathbb{R}$ et la courbe P d'équation $y=ax^2+bx+c$ avec $a, b, c \in\mathbb{R}$ et $a <$ 0. Un point d'intersection des deux courbes P et D est le point A d'abscisse $\frac{5}{2}$. La courbe P a pour maximum le point B de coordonnées (2 ; 7).

A. On a deux équations $4a+b=0$ et $4a+2b+c=\frac{5}{2}$.

B. On a une troisième équation $\frac{5}{2}m+5-\frac{25}{4}a-\frac{5}{2}b-c=0$.

C. De l'énoncé, on conclut que $\begin{cases} a=-8+10m \\ b=32-40m \\ c=-25+40m \end{cases}$.

D. Si $m = -2$, les courbes P et D se coupent au point A et à un autre point d'abscisse $\frac{11}{7}$.

Exercice 10

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on trace un carré A dont les sommets ont les coordonnées (2 ; 2), (2 ; –2), (–2 ; –2) et (–2 ; 2).
On trace également un cercle B de centre (0 ; 0) et de rayon 2.
On trace un second carré C dont les sommets sont les points d'intersection du cercle avec les 2 droites $x = 0$ et $y = 0$.
On considère un point P de coordonnées $(x\,;y)$.

A. Le point P est à l'intérieur du carré A si $|x|\le 2$ et $|y|\le 2$ (les bords du carré sont considérés comme faisant partie de l'intérieur du carré).

B. Le point P est à l'intérieur du cercle B si $\sqrt{x^2+y^2}\le 2$ (même remarque qu'au A).

C. Le point P est à l'intérieur du carré C si $|y|\le|x|+2$ (même remarque qu'au A).

D. Sachant que le point P est à l'intérieur du carré A, la probabilité que P soit à l'intérieur du cercle B sans être à l'intérieur du carré C est de $\frac{\pi-2}{4}$.

Exercice 11

Si $\left(1-\frac{1}{100}\right)^n\le\frac{1}{2}$ alors :

A	B	C	D

$n\le\ln\left(\dfrac{0,5}{1-\dfrac{1}{100}}\right)$	$n\ge-\dfrac{\ln 2}{\ln 99-\ln 100}$	$n\ge\dfrac{\ln 0,5}{\ln 0,99}$	$n\le\ln\left(0,5-\dfrac{99}{100}\right)$

Exercice 12

Soit la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x)=3x+\dfrac{1}{x+2}$. On note (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé.

A. La courbe (C) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3,5.

B. $\int_0^2 f(x)dx=6+\ln 2$.

C. La droite d'équation $y = 3$ est asymptote verticale à (C).

D. La fonction g définie par $g(x)=\ln(f(x))$ est croissante sur $]-2\,;+\infty[$.

6-2 : Concours Avenir 2012 maths

DUREE : 1h30mn, Coefficient 5

CONSIGNES SPÉCIFIQUES : Lire attentivement les consignes afin de vous placer dans les meilleures conditions de réussite de cette épreuve :

- Cette épreuve comporte volontairement plus d'exercices que vous ne pouvez en traiter dans le temps imparti.

- La raison en est que votre enseignant n'a pas forcément traité l'ensemble du programme de Terminale S.

- Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale. Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

- Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon.

- L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit. Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement. Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème : Afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points, tandis que chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point.

a. La logique et son contraire

1. Le contraire de « tous les élèves de TS1 sont des filles » est :

A. « tous les élèves de TS1 sont des garçons »	B. « tous les élèves de TS1 ne sont pas des garçons ».
C. « au moins un des élèves de TS1 n'est pas une fille ».	D. aucune des trois propositions proposées n'est correcte.

2. Le contraire de « $A^2=B^2$ »est :

A. « $A\neq B$ ».	B. « $A\neq B$ ou $A\neq -B$ ».	C. « $A\neq B$ et $A\neq -B$ ».	D. aucune des 3 réponses précédentes

3. Le contraire de « il existe une unique solution réelle à l'équation $f(x) = 0$ » est :

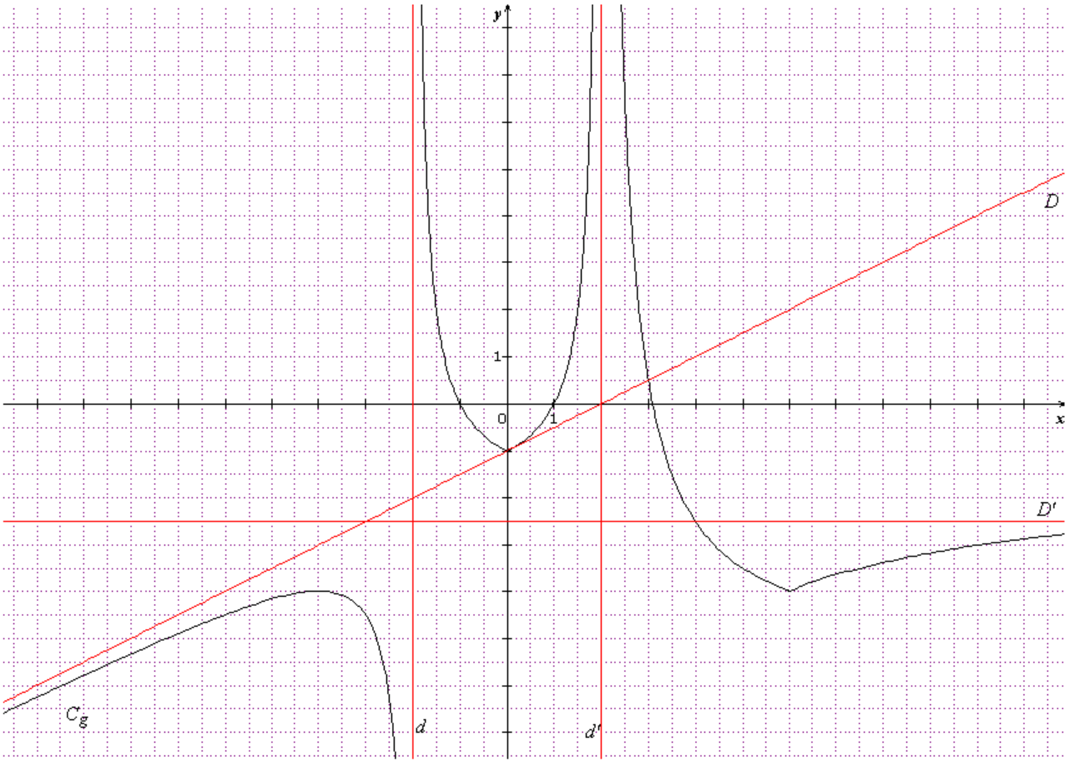
A. « l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution réelle ».	B. « l'équation $f(x) = 0$ admet un nombre fini de solutions réelles ».
C. « l'équation $f(x) = 0$ admet une infinité de solutions réelles ».	D. Aucune des trois propositions proposées n'est correcte.

4. Le contraire de « f est une fonction non dérivable en a »est :

A. « $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est réelle ».	B. « $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est infinie ».
C. « $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ n'existe pas ».	D. Aucune des trois propositions proposées n'est correcte

b. Lecture graphique

Ci-jointes la courbe C_g représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\,;2\}$ ainsi que ses asymptotes d, d', D et D' dans un repère orthonormé.



5. L'équation réduite de D est :

A. $y=\frac{1}{2}x-1$	B. $y=x-1$	C. $y=2x-1$	D. aucune des 3 réponses précédentes

6. $\lim_{x\to+\infty} g(x)-2{,}5=$

A. –5	B. 0	C. 5	D. aucune des 3 réponses précédentes

7. $g'(4)=$

A. $\frac{-2}{3}$	B. $\frac{2}{3}$	C. $-\frac{3}{2}$	D. $\frac{3}{2}$

8. Le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $g'(x)=0$ est :

A. 0	B. 1	C. 2	D. 3

9. L'équation $g(x)=k$ admet deux solutions réelles si et seulement si k appartient à :

A. $]-\infty\,;-4[$	B. $]-\infty\,;-2{,}5[$	C. $]-\infty\,;-4[\cup]-4\,;-2{,}5[$	D. aucune des 3 réponses précédentes

10. $\int_4^5 g'(x)\,dx=$

A. –1	B. 0	C. 1	D. aucune des 3 réponses précédentes

11. Exprimée en unités d'aire, l'aire du domaine délimité par la courbe C_g, les droites d'équation $x = 4$, $x = 5$ et $y = -2$ correspond à :

A. $\int_4^5 (g(x)-2)\,dx$	B. $\int_4^5 (g(x)+2)\,dx$	C. $\int_5^4 (g(x)+2)\,dx$	D. aucune des 3 réponses précédentes

c. Trigonométrie

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x\cos(x)$.

12. La dérivée f' est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) =$

A. $\sin(x)$	B. $\cos(x)$	C. $\cos(x)+x\sin(x)$	D. $\cos(x)-x\sin(x)$

13. La primitive F de f telle que $F(0)=1$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) =$

A. $\frac{x^2}{2}\sin(x)+1$	B. $-\frac{x^2}{2}\sin(x)+1$	C. $\cos(x)+x\sin(x)$	D. $\cos(x)-x\sin(x)$

14. Le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ sur $[-2\pi\,;2\pi]$ est :

A. 2	B. 3	C. 4	D. 5

15. $f\left(\frac{-5\pi}{6}\right) =$

A. $\frac{5\pi}{12}$	B. $\frac{5\sqrt{2}\pi}{12}$	C. $\frac{5\sqrt{3}\pi}{12}$	D. aucune des 3 réponses précédentes

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)^2\right) =$

A. 0	B. $+\infty$	C. n'existe pas.	D. aucune des 3 réponses précédentes

17. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$

A. 0	B. $+\infty$	C. n'existe pas.	D. aucune des 3 réponses précédentes

18. Dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f est symétrique par rapport à :

A. l'origine.	B. l'axe des abscisses.	C. l'axe des ordonnées.	D. la droite d'équation $y = x$.

d. Complexes

Dans le plan complexe on considère l'application ψ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = i\bar{z}+1$.

19. $\overline{z'} =$

A. $iz-1$	B. $-iz-1$	C. $iz+1$	D. $-iz+1$.

20. Sachant que la forme algébrique de z est $x+iy$, celle de z' est :

A. $x-iy$	B. $1+i(x-iy)$	C. $(y+1)+ix$	D. $(y+1)-ix$.

21. Lorsque $z=\frac{3i}{1-i}$, la forme algébrique de z' est :

A. $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$	B. $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$	C. $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$	D. $\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$.

22. L'antécédent par ψ du point d'affixe $\frac{3i}{1-i}$ a pour affixe :

A. $\frac{3}{2}-\frac{5}{2}i$	B. $\frac{3}{2}+\frac{5}{2}i$	C. $\frac{5}{2}-\frac{3}{2}i$	D. $\frac{5}{2}+\frac{3}{2}i$.

23. Le nombre de points invariants par ψ est :

A. 0	B. 1	C. infini.	D. aucune des 3 réponses précédentes

24. L'ensemble des points M, lorsque z' est un imaginaire pur, est décrit par :

A. l'axe des abscisses.	B. l'axe des ordonnées.	C. la droite $y = -1$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

e. Continuité dérivabilité et intégration

Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout réel x : $g'(x)=f(x)$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(x)=g'(-x)-\left[g(-x)\right]'$.

25. g est donc sur $\mathbb{R}$:

A. la dérivée de f.	B. une dérivée de f.	C. la primitive de f.	D. une primitive de f.

26. Pour tout réel x : $\varphi(x)=$

A. 0.	B. $2f(-x)$.	C. $-2f(-x)$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\begin{cases} x^3 \text{ sur }]-\infty\,;0] \\ x^2 \text{ sur }]0\,;1] \\ x \text{ sur }]1\,;4] \\ \sqrt{x} \text{ sur } [4\,;+\infty[\end{cases}$.

27. Le plus grand ensemble sur lequel h est continue est :

A. $\mathbb{R}$	B. $\mathbb{R}\backslash\{4\}$	C. $\mathbb{R}\backslash\{0\,;1\,;4\}$	D. aucune des 3 réponses précédentes

28. Le plus grand ensemble sur lequel h est dérivable est :

A. $\mathbb{R}$	B. $\mathbb{R}\backslash\{4\}$	C. $\mathbb{R}\backslash\{0\,;1\,;4\}$	D. aucune des 3 réponses précédentes

29. Le nombre de solutions sur de l'équation $h(x)=3$ est :

A. 1	B. 2	C. 3	D. aucune des 3 réponses précédentes

30. Le nombre de solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{2h(x)}{x}=1$ est :

A. 1	B. 2	C. 3	D. aucune des 3 réponses précédentes

31. $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(x)dx=$

A. $\dfrac{1}{12}$	B. 0	C. $\dfrac{2}{3}$	D. aucune des 3 réponses précédentes

32. la primitive H de h sur $[-1\,;1]$ s'annulant en 0

A. est définie par	B.	C. n'existe pas.	D. aucune des 3 réponses précédentes

33. le plus grand ensemble sur lequel la fonction : $x\mapsto \ln\left(h(x)-3\right)$ est définie :

A. est $]-3\,;3]$	B. $]3\,;+\infty[$	C. $]3\,;4[\cup]9\,;+\infty[$	D. aucune des 3 réponses précédentes

f. Les suites

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\begin{cases} U_2=11 \\ U_{n+1}=U_n-\dfrac{2}{n(n+1)}, n\geq 1 \end{cases}$.

34. $U_3=$

A. 10	B. $\dfrac{32}{3}$	C. $\dfrac{65}{6}$	D. aucune des 3 réponses précédentes

35. $U_1=$

A. 10	B. 11	C. 12	D. aucune des 3 réponses précédentes

36. (U_n) est

A. une suite arithmétique non géométrique.	B. une suite géométrique non arithmétique.	C. une suite arithmétique et géométrique.	D. aucune des 3 réponses précédentes

37. La suite (U_n) est

A. croissante.	B. décroissante.	C. non monotone.	D. aucune des 3 réponses précédentes

38. (U_n) est

A. une suite convergente.	B. une suite divergente vers $+\infty$.	C. une suite divergente vers $-\infty$	D. aucune des 3 réponses précédentes

39. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n =$

A. $12-\frac{2}{n}$.	B. $10{,}5+\frac{1}{n}$.	C. $10+\frac{2}{n}$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

40. $\sum_{k=1}^{4}(-1)^k U_k =$

A. $-\frac{7}{6}$.	B. 0.	C. $\frac{7}{6}$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

g. Les probabilités

Dans une boite se trouvent 12 jetons indiscernables au toucher tels que sur chacun d'entre eux est inscrit l'un des 12 caractères de : CONCOURS2012 (chacun des 12 caractères n'étant inscrit que sur l'un des 12 jetons).

On tire successivement et sans remise deux des jetons de cette boite et l'on considère les événements :

A : « Les deux jetons sont des consonnes » et B : « Les deux jetons représentent le même caractère »

45. $\overline{A}$, l'événement contraire de A, est :

A. « Les deux jetons sont des voyelles ».	B. « Les deux jetons sont des chiffres ».	C. « Les jetons sont tous les deux soit des voyelles soit des chiffres ».	D. aucune des 3 réponses précédentes

46. la probabilité de l'événement A est égale à :

A. $\frac{3}{5}$.	B. $\frac{5}{33}$.	C. .	D. aucune des 3 réponses précédentes

47. la probabilité de l'événement B est égale à :

A. $\frac{1}{4}$.	B. $\frac{3}{44}$.	C. $\frac{1}{22}$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

48. la probabilité conditionnelle $\mathcal{P}_B\left(\overline{A}\right)=$

A. $\frac{1}{6}$.	B. $\frac{1}{3}$.	C. $\frac{2}{3}$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

49. la probabilité $\mathcal{P}\left(\overline{A}\cap B\right)=$

A. $\frac{1}{33}$.	B. $\frac{1}{36}$.	C. $\frac{1}{6}$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

50. $\mathcal{P}\left(\overline{A}\cup B\right)=$

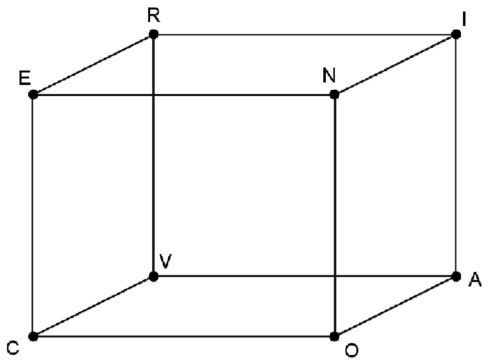
A. $\mathcal{P}\left(\overline{A}\right)+\mathcal{P}(B)$.	B. $\mathcal{P}\left(\overline{A}\right)\times\mathcal{P}(B)$.	C. $\mathcal{P}\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)+\mathcal{P}(B)$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

51. En ayant répondu au hasard aux trois items précédents, la probabilité d'avoir plus de bonnes réponses que de mauvaises est égale à :

A. $\frac{1}{16}$.	B. $\frac{1}{64}$.	C. $\frac{5}{32}$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

h. Géométrie analytique dans l'espace

Dans le repère orthonormé $\left(C\,;\frac{1}{5}\overrightarrow{CO},\frac{1}{3}\overrightarrow{CV},\frac{1}{4}\overrightarrow{CE}\right)$, on considère le pavé droit ci-dessous :



COAVENIR tel que (en centimètres): $CO = 5$, $CV = 3$ et $CE = 4$.

52. Les coordonnées du milieu de $[EA]$ sont :

A. $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.	B. $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};2\right)$.	C. $\left(\frac{5}{2};\frac{3}{2};-2\right)$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

53. En centimètres, la longueur EA est égale à :

A. 4.	B. $\sqrt{3}$.	C. $5\sqrt{2}$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

54. Le produit scalaire $\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{RO}$ est égal à :

A. –9.	B. 0.	C. 9.	D. aucune des 3 réponses précédentes

55. une équation cartésienne du plan (RVO) est :

A. $y-3=0$.	B. $4y-3z=0$.	C. $x+y-1=0$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

56. En centimètres, la distance du point I au plan (RVO) est égale à :

A. $\frac{15}{\sqrt{34}}$.	B. $\frac{1}{\sqrt{2}}$.	C. 3.	D. aucune des 3 réponses précédentes

57. En centimètres carrés, l'aire du triangle RVO est égale à :

A. $\sqrt{34}$.	B. $2\sqrt{34}$.	C. $3\sqrt{34}$.	D. aucune des 3 réponses précédentes

58. En centimètres cubes, le volume du tétraèdre $RVOI$ est égal à :

A. 10.	B. 20.	C. 30.	D. aucune des 3 réponses précédentes

59. L'ensemble des points M de l'espace tels que : $\left\|\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{ME}\right\|$ est :

A. une droite ou un cercle.	B. un plan.	C. une sphère.	D. aucune des 3 réponses précédentes

60. l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\left\|\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{ME}\right\|$ est :

A. une droite ou un cercle.	B. un plan.	C. une sphère.	D. aucune des 3 réponses précédentes

6-3 : Concours Fesic

Calculatrice interdite ; traiter 12 exercices sur les 16 en 2 h 30 ; répondre par Vrai ou Faux sans justification. +1 si bonne réponse, −1 si mauvaise réponse, 0 si pas de réponse, bonus d'1 point pour un exercice entièrement juste.

Exercice 1 : Bases en Analyse

Les quatre questions suivantes sont indépendantes.

a. La dérivée de $x \mapsto xe^x$ est $x \mapsto e^x$.

b. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x - 1}{x} = +\infty$.

c. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si $f' = f$, alors f est la fonction nulle.

Soient A et B deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $\mathcal{P}(\mathrm{A}) = 0{,}2$, $\mathcal{P}(\mathrm{B}) = 0{,}5$ et P(A ∪ B) = 0,7.

d. A et B sont incompatibles.

Exercice 2 : Bases en Géométrie

Pour le a. et b., on se place dans le plan complexe $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Les questions a. et b. sont indépendantes.

a. Si $z = -6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ alors $\arg(z) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

b. Si M est un point d'affixe z de partie imaginaire non nulle et M' un point d'affixe $z' = -\bar{z}$, alors M et M' sont symétriques par rapport à O.

Pour le c. et le d., on se place dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace.

On pose (P_1) et (P_2) les plans d'équations respectives $4x + 6y - 10z + 3 = 0$ et $-6x - 9y + 15z - 8 = 0$.

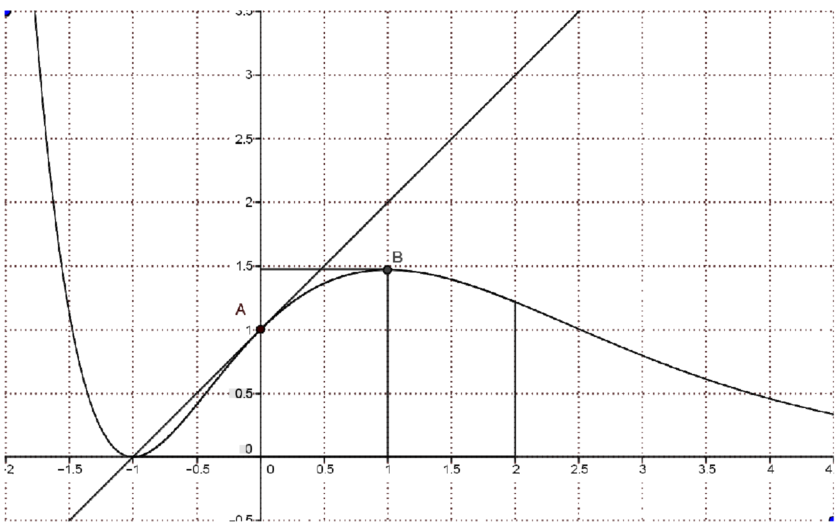
Soit (d) la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 3 \\ z = 5t - 1 \end{cases}$ où t désigne un nombre réel.

c. (P_1) et (P_2) sont sécants.

d. Le point A(2 ; 3 ; –5) appartient à la droite (d).

Exercice 3 : Lecture graphique

On considère la représentation graphique (C) d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que la tangente à cette courbe au point A de coordonnées (0 ; 1).



a. $f'(0) = 1$.

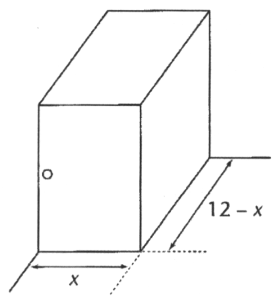
b. $f'(1) = 1{,}5$.

c. L'équation $f(x) = x$ possède une unique solution sur l'intervalle [–1,5 ; 4].

d. $2 \leq \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \leq 4$.

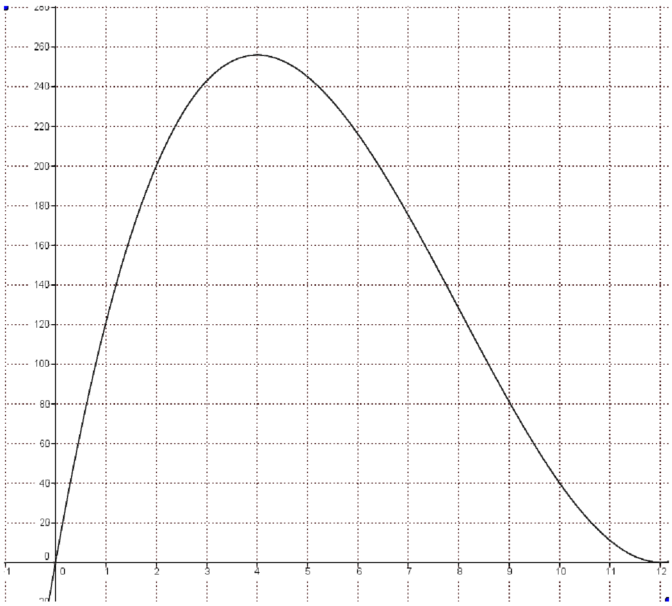
Exercice 4 : Volume d'un parallélépipède rectangle

On veut réaliser, dans l'angle d'un plan de travail, un placard ayant la forme d'un parallélépipède rectangle. Pour des raisons pratiques, si sa largeur est x, sa profondeur est $12 - x$ et la hauteur est égale à la profondeur.



On suppose $x \in [0\,;12]$ (les dimensions sont exprimées en dm).

a. Le volume $V(x)$ en dm^3 de ce placard est égal à $V(x) = \left(-12x + x^2\right)(x - 12)$.



On pose f la fonction définie sur [0 ; 12] par $f(x)=x^3-24x^2+144x$ de courbe représentative (C) ci-contre.

b. Pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 12], $f'(x)>0$.

c. $V(x)=2f(x)$.

d. Dans le cas particulier où le parallélépipède rectangle serait un cube, son volume serait compris entre 200 et 225 dm^3.

Exercice 5 : Utilisation d'une suite dans un algorithme

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=1$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n-n)-1$. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	n est un entier naturel.
Initialisation	u prend la valeur 1 ; i prend la valeur 0.

Traitement	Tant que $i<n$
	    u prend la valeur $\frac{1}{2}(u-i)-1$
	    i prend la valeur $i+1$
	Fin Tant que

Sortie	Afficher u.

a. Pour $n=3$, l'algorithme nous donne le tableau suivant :

n	u	i
3	1	0
3	–1/2	1
3	–7/4	2
3	–23/4	3

b. Pour $n=3$, l'algorithme calcule u_3.

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n+n$.

c. La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=1$.

d. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{1}{2^n}+n$.

Exercice 6 : Utilisation d'un algorithme avec les nombres complexes

On se place dans le plan complexe $(O;\vec{u},\vec{v})$. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	θ, a, b, a', b' sont des nombres réels.
Traitement	a' prend la valeur $a\times\cos(\theta)$. a' prend la valeur $a'-b\times\sin(\theta)$.

	b' prend la valeur $a \times \sin(\theta)$. b' prend la valeur $b' + b \times \cos(\theta)$.
Sortie	Afficher a'. Afficher b'.

Pour le a. et le b. on suppose $\theta = \frac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$.

a. $a' = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

b. $b' = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

Dans toute la suite on posera M le point d'affixe $z = a + ib$ et M' le point d'affixe $z' = a' + ib'$ avec a' et b' les deux nombres obtenus dans l'algorithme précédent.

c. Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, $a = 1$ et $b = 1$ alors $|z'| = \sqrt{2}$.

d. Dans le cas général où $\theta \in \mathbb{R}$, $z' = e^{i\theta} z$.

Exercice 7 : Bases de logique

Pour le a. et le b. on suppose que z est un nombre complexe et Γ est un sous ensemble de $\mathbb{C}$.

a. $z \neq 0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ et $\mathrm{Im}(z) \neq 0$.

b. La contraposée de la proposition « si $z \in \Gamma$ alors $\mathrm{Re}(z) = 0$ » est « si $\mathrm{Re}(z) = 0$ alors $z \in \Gamma$ ».

Pour le c. et le d. on suppose que f est une fonction définie sur l'intervalle $I = [-3 ; 5]$.

c. Si $f(-3) < 0$ et $f(5) > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution sur I.

d. Si f admet une primitive sur $I = [-3 ; 5]$ alors f est continue sur I.

Exercice 8 : Calculs de limites

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = -\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$.

c. Si, pour tout réel x non nul, $\frac{x-1}{x^2+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

d. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}} = 1$.

Exercice 9 : Calculs d'intégrales

a. $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 4 + 2\sqrt{2}$.

b. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln 2$.

c. La fonction $x \to (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$ est une primitive définie sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \to x^2 e^x$.

d. $\int_0^1 x^2 e^x dx = 3e - 2$.

Exercice 10 : Notions de bases sur les nombres complexes

On se place dans le plan complexe $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. On considère A le point d'affixe $z_A = -2i$, B le point d'affixe $z_B = -2$ et E le point d'affixe $z_E = 2 + 2i\sqrt{3}$.

a. L'écriture trigonométrique de $z_E = 2 + 2i\sqrt{3}$ est $4e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. E est situé sur le cercle de centre O et de rayon $R = 2$.

c. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z + 2i| = |2 + z|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

d. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $2z\bar{z} = 1$ est un cercle de rayon 2.

Exercice 11 : Utilisation des nombres complexes en géométrie

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Soit f la transformation du plan complexe qui, à tout point M d'affixe $z \neq 0$, associe le point M' d'afflxe $z' = 1 + \frac{i}{z}$.

a. L'image par f du point A d'affixe $z_A = 1 + i$ est le point A' d'affixe $z_{A'} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$.

Dans toute la suite, on pose $z = x + iy$ avec $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z' = x' + iy'$ avec x', y' réels.

b. $\mathrm{Re}(z') = x' = \dfrac{x^2 + y^2 + y}{x^2 + y^2}$.

c. $\mathrm{Im}(z') = y' = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

d. L'ensemble des points M d'affixe $z \neq 0$ tels que z' soit imaginaire pur est le cercle (C) de centre $A\left(0\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $R = \dfrac{1}{2}$, privé du point O.

Exercice 12 : Étude d'une fonction logarithme

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$. On note D l'ensemble de définition de f.

a. $1 - x^2 > 0$ si et seulement si $-1 < x < 1$.b. $\mathrm{D} = [-1\,;1]$.

c. La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur D par $f'(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.

d. L'équation $f(x) = 1$ a pour solutions $x = \sqrt{e - 1}$ et $x = -\sqrt{e - 1}$.

Exercice 13 : Étude d'une fonction exponentielle

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{x^2 + 1}$. On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal du plan.

a. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

c. La fonction f a pour fonction dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2 - x + 1\right)}{\left(e^{-x}\left(x^2 + 1\right)\right)^2}$.

d. f est croissante sur $]-\infty\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;+\infty[$.

Exercice 14 : Bases en probabilités

On considère, dans la question a., deux événements E et F d'une même expérience aléatoire.

a. $\mathcal{P}_{\bar{F}}(E) = 1 - \mathcal{P}_F(E)$.

Pour les questions b, c et d, nous utiliserons les hypothèses suivantes : une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires. Un joueur tire au hasard une boule dans l'urne.

Si la boule est blanche, il lance un dé tétraédrique dont les faces numérotées de 1 à 4 ont la même probabilité d'apparition.

Si la boule est noire, il lance un jeton dont les faces numérotées de 1 à 2 ont la même probabilité d'apparition.

On considère les événements suivants :

G : « Le joueur obtient le numéro 1 » ; B : « Le joueur tire une boule blanche ».

b. $\mathcal{P}(B \cap G) = \dfrac{5}{32}$.

c. $\mathcal{P}(G) = \dfrac{13}{32}$.

d. $\mathcal{P}_G(B) = \dfrac{5}{11}$.

Exercice 15 : Différentes lois de probabilités

a. Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle [0 ; 5]. $\mathcal{P}\left(1 \leq X \leq \dfrac{5}{2}\right) = 0{,}4$.

b. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $c \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{P}(Y > c) = e^{-\lambda c}$.

c. Soit T une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \dfrac{1}{10}$. $\mathcal{P}(T \leq 10) = 1 - \dfrac{1}{e}$.

d. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}\left(\mu\,;\sigma^2\right)$ et vérifiant $\mathcal{P}(0 \leq Z \leq 2) = 0{,}75$. La loi de Z n'estpas la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0\,;1)$.

Exercice 16 : Repérage dans l'espace

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le plan P d'équation cartésienne $x+2y+3z-2=0$ et la droite D dont une représentation paramétrique est, pour tout réel t, $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-t \\ z=-3-t \end{cases}$.

a. Le point $A(-1\,;3\,;-2)$ appartient à D.

b. Le plan P et la droite D sont sécants au point B de coordonnées (–3 ; 4 ; –1).

c. La droite D', de représentation paramétrique $\begin{cases} x=k \\ y=-2k+1 \\ z=k \end{cases}$ pour tout réel k, est sécante au plan P.

d. Les droites D et D' sont coplanaires.

6-4 : Concours Geipi – ENI - Polytech

Correction sur http://www.geipi.org/resultats-corriges/index.htm

ENI : http://www.enit.fr/sr/379/index.php

Exercice 1

Un distributeur de café est installé dans le hall d'un lycée.

Partie A

Durant la période de réglage de l'appareil, la tasse déborde une fois sur quatre. Le technicien fait dix essais indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire qui représente le nombre de fois où la tasse déborde parmi ces dix essais.

1. X suit une loi binomiale de paramètres n et p. Donner les valeurs de n et p.

2. Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_1 que la tasse ne déborde jamais sur les dix essais. Puis donner une valeur approchée de P_1 à 10^{-4} près.

3. Exprimer, en fonction de p, la probabilité P_2 que la tasse ne déborde qu'une fois sur les dix essais. Puis donner une valeur approchée de P_2 à 10^{-4} près.

4. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité P_3 que la tasse déborde au moins deux fois sur les dix essais.

Partie B

Le distributeur de café est maintenant réglé. On appelle « durée de fonctionnement sans panne » du distributeur le temps qui s'écoule avant qu'une première tasse ne déborde. La variable aléatoire T, représentant cette durée, exprimée en jours, suit une loi exponentielle de paramètre λ.

Soit a un réel positif non nul. La probabilité $P(T\le a)$ que la durée de fonctionnement sans panne soit inférieure ou égale à a jours est alors donnée par : $P(T\le a)=\int_0^a \lambda e^{-\lambda t}dt$.

1. Justifier que : $P(T\le a)=1-e^{-\lambda a}$.

2. Dans cette question, on suppose que $\lambda=0{,}02$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité $P(T>90)$ que le distributeur fonctionne sans panne plus de 90 jours.

3. Quelle devrait être la valeur de λ pour que la probabilité que le distributeur fonctionne sans panne plus de 120 jours soit de 0,4 ? Déterminer la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près de λ. Justifier les calculs.

Partie C

Le distributeur de café étant réglé, le volume de café dans une tasse en centilitres peut être modélisé par une variable aléatoire V suivant une loi normale d'espérance 6 et d'écart type 0,8.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire $Z=\dfrac{V-6}{0{,}8}$? On précisera les paramètres de cette loi.

2. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la probabilité P_4 que le volume de café dans une tasse soit compris entre 5,2 et 6,8 centilitres.

Exercice 2

On considère la fonction f définie par : pour tout réel x de [0 ; 1], $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+1}$.

Partie A

1. Donner les réels a et b tels que, pour tout x de [0 ; 1], $f(x)=a+\dfrac{b}{x+1}$.

2. Soit L l'intégrale définie par : $L=\int_0^1 f(x)dx$. Calculer la valeur exacte de L en justifiant les calculs.

Partie B

On considère maintenant la suite   définie par :

pour tout $n\geq 1$, $u_n=\int_0^1 f(x)e^{\frac{x}{n}}dx$.

1. Soit $n\geq 1$ fixé. Justifier que, pour tout réel $x\in[0;1]$, $1\leq e^{\frac{x}{n}}\leq e^{\frac{1}{n}}$.

2. a. Justifier alors que, pour tout entier $n\geq 1$, $L\leq u_n\leq Le^{\frac{1}{n}}$.

b. En déduire que la suite   est convergente et donner sa limite. Justifier la réponse.

c. Justifier que, pour tout $n\geq 1$, $0\leq u_n-L\leq L\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)$.

Partie C

On considère l'algorithme suivant :

Variables	p est un entier. n est un entier. L est un réel.
Début de l'Algorithme Fin de l'algorithme.	L prend la valeur 2 + 3ln2. n prend la valeur 1. Entrer la valeur de p. Tant que $L\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)>10^{-p}$ faire : n prend la valeur n + 1. Fin de « Tant que ». Afficher n.

Lors de l'exécution de cet algorithme, la valeur entrée pour la variable p est 5.
À la fin de l'exécution, la valeur affichée de la variable n est notée N.
1. Que représente N ?
2. Donner un réel β tel que $|u_N-2-3\ln 2|\leq\beta$

Exercice 3

On se place dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère la fonction polynomiale P définie par : pour tout complexe $z\in\mathbb{C}$, $P(z)=z^4-6z^3+14z^2-6z+13$.

1. a. Calculer $P(i)$ et $P(-i)$.

b. Pour tout complexe z, on a $P(z)=(z^2+1)Q(z)$ où $Q(z)$ s'écrit sous la forme $Q(z)=z^2+cz+d$.

Donner les valeurs des réels c et d.

c. Déterminer l'ensemble S_1 des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $Q(z)=0$. Justifier le résultat.

d. En déduire l'ensemble S_2 des solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $P(z)=0$.

2. Placer sur une figure les points A, C et Ω d'affixes respectives : $z_A=i$, $z_C=3+2i$, $z_\Omega=2$.

3. a. On note Z_1, Z_2 et Z_3 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{\Omega A}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$.

Donner les valeurs de Z_1, Z_2 et Z_3.

b. Donner alors les modules $|Z_1|$, $|Z_2|$, $|Z_3|$ de Z_1, Z_2 et Z_3.

c. Déterminer alors les valeurs exactes des distances AC, ΩA et ΩC. Justifier les réponses.

d. Déterminer une mesure, en radians, de l'angle géométrique $\widehat{A\Omega C}$. Justifier le résultat.

e. Quelle est la nature précise du triangle $A\Omega C$?

4. On considère les points B et D d'affixes respectives : $z_B = \overline{z_A}$ et $z_D = \overline{z_C}$ où $\overline{z_A}$ et $\overline{z_C}$ désignent respectivement les complexes conjugués de z_A et z_C.

a. Placer les points B et D sur la figure.

b. Justifier que les points A, B, C et D sont sur un même cercle. Préciser son centre I et son rayon r.

c. Tracer ce cercle sur la figure.

5. Donner l'aire α, en unités d'aires, du trapèze *ABDC*.

Exercice 4

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points E et F de coordonnées : $E(2 ; 2 ; 0)$ et $F(0 ; 2 ; 4)$

et la droite Δ définie par le système d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = t+3 \\ y = -t-1, t \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$.

1. a. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite Δ.

b. Justifier que le point E n'appartient pas à Δ.

c. Justifier que le point F appartient à Δ.

d. En déduire la position relative des droites *(EF)* et Δ.

2. On considère le plan P contenant les deux droites (*EF*) et Δ.

Soit le vecteur $\vec{n} = (2;2;1)$.

a. Donner les produits scalaires $\vec{n}.\overrightarrow{EF}$ et $\vec{n}.\vec{u}$.

b. Que peut-on en déduire pour le vecteur $\vec{n}$ par rapport au plan P ?

c. Déterminer une équation cartésienne du plan P. Justifier la réponse.

3. On note H le projeté orthogonal du point E sur la droite Δ.

a. Donner la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{EH}.\vec{u}$.

b. Justifier alors que les coordonnées $(x_H ; y_H ; z_H)$ de H vérifient $x_H - y_H = 0$.

c. Donner alors les coordonnées de *H*.

4. On note G le point de l'espace vérifiant : $\overrightarrow{FG} = 2\vec{n}$.

a. Donner les coordonnées de *G*.

b. Écrire un système d'équations paramétriques de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par *G*.

c. Que dire précisément sur la position relative des deux droites Δ' et *(EH)* ?

6-5 : Concours Sciences-Po Paris

Calculatrice autorisée ; durée 3 heures.

Exercice Vrai-Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = -1$ et de raison $\frac{4}{5}$, et on pose $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ pour tout entier naturel non nul n. La suite (S_n) converge vers 5.

2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$ et $v_n = u_n + 3$ pour tout entier naturel n. La suite (v_n) est géométrique.

3. On considère les suites (w_n) et (v_n) définies par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = u_n + 1$ et $t_n = e^{-u_n}$ pour tout entier naturel *n*. La suite (v_n) est convergente.

4. Une entreprise de sondage réalise une enquête par téléphone. On admet que la probabilité que la personne contactée accepte de répondre est égale à 0,2.

Si un enquêteur contacte 50 personnes, la probabilité qu'au moins six personnes acceptent de lui répondre est supérieure à 0,95.

5. Toute suite non majorée diverge vers $+\infty$.

6. L'équation $\ln(x)+\ln(x+1)=\ln(2)$ admet le réel 1 pour unique solution.

7. On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+1)^2 e^{-x}$. La tangente à la courbe représentative de *f* au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$.

8. L'équation $x^3+4x^2+4x=-2$ a exactement trois solutions réelles.

9. Voici un algorithme :

Entrée	Saisir un entier naturel *a*

Traitement	Affecter *à n la* valeur 1 et à *c* la valeur 1
	Tant que $c < a$
	    Affecter *à n la* valeur $n + 1$.
	    Affecter *à c la* valeur $c + n^2$
	Fin du Tant que

Sortie	Afficher la valeur de *n*

Si on saisit pour *a* la valeur 20, alors la sortie vaut 4.

10. On lance deux dés cubiques et non truqués. On appelle *X* la variable aléatoire donnant le plus grand des deux chiffres obtenus. L'espérance de la variable aléatoire *X* est : $\mathbb{E}(X)=\frac{161}{36}$.

Problème

Partie A

On considère la fonction *f* définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\ln\left(\frac{e}{2}\left(x+1\frac{1}{x}\right)\right)$ et on appelle C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique 2 cm).

1. Étudier les variations de la fonction *f* sur $]0\,;+\infty[$ ainsi que les limites en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que l'axe des ordonnées du repère et la courbe Γ d'équation $y=\ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ sont asymptotes à la courbe C.

On rappelle que les courbes (C) et (C') respectivement représentatives de deux fonctions *f* et *g* sont asymptotes en $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-g(x)\right)=0$.

3. a. Montrer que, pour tout réel *x* strictement positif, $f'(x)<1$.

b. Étudier le signe de $f(x)-x$ sur $]0\,;+\infty[$ et en déduire la position de la courbe C par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

4. Tracer la droite D ainsi que les courbes Γ et C sur le même graphique.

Partie B

On se donne un réel u_0 supérieur ou égal à 1. La suite (u_n) est définie par la donnée de u_0 et de la relation $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel *n*.

1. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

Partie C

On admet que la limite de la suite (u_n) est égale à 1.

On se propose dans cette partie d'étudier la rapidité de convergence de la suite (u_n) vers sa limite.

1. Que peut-on dire de la suite (u_n) quand u_0 vaut 1 ?

2. Dans cette question on choisit la valeur $\frac{3}{2}$ pour u_0.

À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs arrondies à 10^{-6} près de u_1, u_2, u_3.

On suppose dans cette partie que le réel u_0 strictement supérieur à 1.

3. a. Montrer que pour tout réel $t > -1$, on a $\ln(1+t) \le t$.

3. b. Montrer que pour tout réel $h \ge 0$, on a $f(1+h) - 1 = \ln\left(1 + \frac{h^2}{2(h+1)}\right)$.

4. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 1$ pour tout entier naturel n.

Montrer que pour tout entier naturel n on a $v_{n+1} \le \frac{1}{2}v_n^2$.

5. Montrer que pour tout entier naturel n non nul on a $0 \le v_n \le 2\left(\frac{v_1}{2}\right)^{2^{n-1}}$.

6. Dans cette question, on choisit à nouveau la valeur $\frac{3}{2}$ pour u_0.

À partir de quel p peut-on affirmer que $u_p - 1 \le 10^{-20}$?

6-6 : Concours Avenir 2013 maths

Vous devez répondre à 45 questions au choix parmi les 60 proposées pour obtenir la note maximale.

Si vous traitez plus de 45 questions, seules les 45 premières seront prises en compte.

Aucun brouillon n'est distribué. Les pages blanches de ce sujet peuvent être utilisées à l'usage de brouillon. L'usage de la calculatrice ou de tout autre appareil électronique est interdit.

Aucun document autre que ce sujet et sa grille réponse n'est autorisé.

Attention, il ne s'agit pas d'un examen mais bien d'un concours qui aboutit à un classement.

Si vous trouvez ce sujet « difficile », ne vous arrêtez pas en cours de composition, n'abandonnez pas, restez concentré(e). Les autres candidats rencontrent probablement les mêmes difficultés que vous !

Barème : afin d'éliminer les stratégies de réponses au hasard, chaque réponse exacte est gratifiée de 3 points, tandis que chaque réponse fausse est pénalisée par le retrait d'1 point.

SIMPLIFICATIONS D'ÉCRITURES

1. $\frac{1}{2}\ln(27) - 2\ln(3) + \ln(\sqrt{3})$ est :

a. nul	b. strictement négati	c. strictement positif	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

2. $\frac{-2e^2 \times 3e^4}{(2e^2)^2 - 3e^4}$ est égal à :

a. $\frac{1}{2e^2}$	b. $-6e^2$	c. $-5e^2$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

3. $(\ln(3))^2 - 2\ln(3)$ est :

a. nul	b. strictement négatif	c. strictement positif	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

4. $\frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)}$ est égal à :

a. $\frac{1}{2}$	b. 1	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

CONTINUITÉ ET DÉRIVABILITÉ

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$

5. f est continue en -1 signifie que :

a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ est un réel	b. $\lim\limits_{x\to 0} f(x-1)$ est un réel	c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(-1+x)-f(-1)}{x}$ est un réel	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

6. f est dérivable en -1 signifie que :

a. $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ est un réel	b. $\lim\limits_{x\to 0} f(x-1)$ est un réel	c. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(-1+x)-f(-1)}{x}$ est un réel	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

Soit g une fonction définie sur [–1 ; 2] telle que $g(-1)=2$; $g(0)=1$; $g(1)=0$ et $g(2)=-1$

7. On est certain que sur [–1 ; 2] :

a. g est strictement décroissante	b. est strictement croissante	c. g n'est pas strictement décroissante	d. g n'est pas strictement croissante

8. On est certain que sur [–1 ; 2], l'équation $g(x)=0,5$:

a. n'admet pas de solution	b. admet une unique solution	c. admet au moins une solution	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

9. $\frac{1}{x}\leq 0,2$ a pour solution :

a. $]0;5[$	b. $[5;+\infty[$	c. $]-\infty;5]$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

10. Le nombre de solutions de l'équation $(\ln x)^2=\ln(x^2)$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

11. Le nombre de solutions de l'équation $(\ln x)^2=-(\ln x)^2$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

12. Le nombre de solutions de l'inéquation : $e^{-x^2}\geq 1$ est :

a. infini	b. 0	c. 1	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

13. Le nombre de complexes solutions de l'équation : $2z^2-5z+3=0$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

IMPLICATIONS ET ÉQUIVALENCES

Dans les quatre items suivants, P_1 et P_2 sont deux propositions ; a et b sont deux réels.

De manière générale :

14. Si $P_1 : "a^3 = b^3"$ est vraie et $P_2 : "a = b"$ est vraie, alors :

a. P_1 implique P_2	b. P_2 implique P_1	c. P_1 et P_2 sont équivalentes	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

15. Si $P_1 : "\ln(a) = \ln(b)"$ est vraie et $P_2 : "e^a = e^b"$ est vraie alors :

a. P_1 implique P_2	b. P_2 implique P_1	c. P_1 et P_2 sont équivalentes	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

16. Si $P_1 : "a^2 = b"$ est vraie et $P_2 : "a = \sqrt{b}"$ est vraie alors :

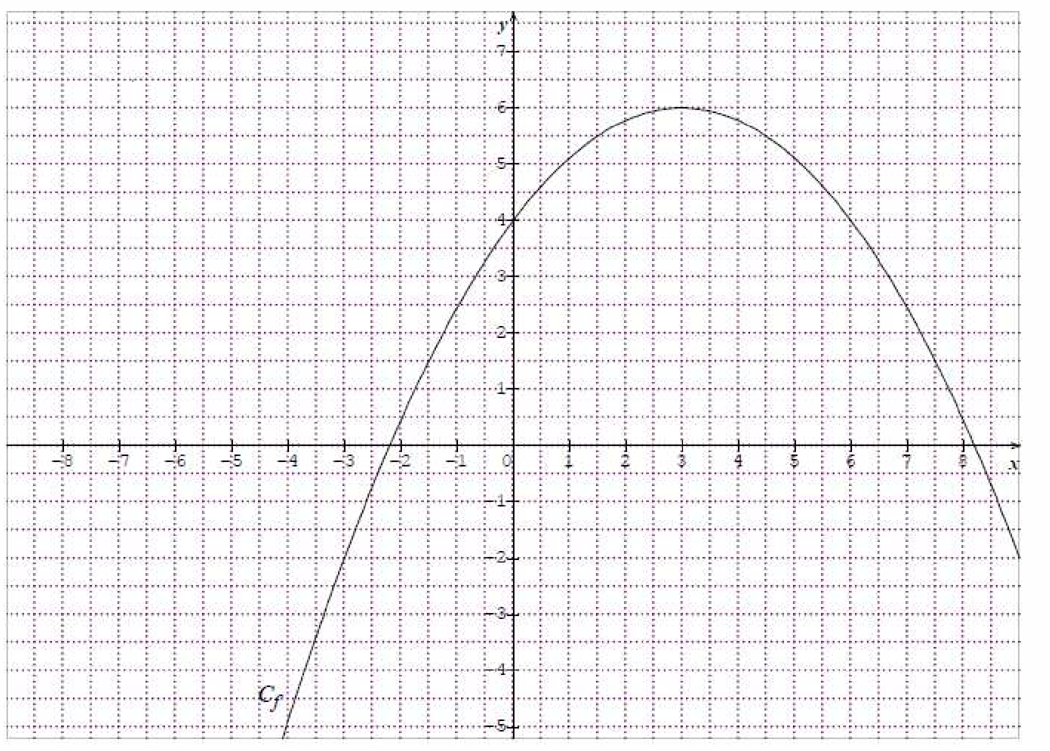
a. P_1 implique P_2	b. P_2 implique P_1	c. P_1 et P_2 sont équivalentes	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

17. Si $P_1 : "AB^2 = AC^2 + BC^2"$ est vraie et P2 : "ABC est un triangle rectangle" est vraie alors :

a. P_1 implique P_2	b. P_2 implique P_1	c. P_1 et P_2 sont équivalentes	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Ci-dessous la parabole représentant la fonction *f* définie sur ℝ



Soient les suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier naturel n, respectivement par :

$$u_n = f(n) \text{ et } \begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \text{ où } a \text{ est un réel.}$$

18. La tangente à la parabole au point d'abscisse 3 a pour équation

a. $x = 6$	b. $y = 6$	c. $y = 6x - 18$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

19. Sur ℝ, la dérivée de *f* est définie par $f'(x) =$

a. $-\frac{4}{9}x - \frac{4}{3}$	b. $-\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}$	c. $\frac{4}{9}x - \frac{4}{3}$	d. $\frac{4}{9}x + \frac{4}{3}$

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=$

a. $-\infty$	b. $+\infty$	c. 0	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

21. $\int_{-1}^{-4} f(x)\,dx$

a. est nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

22. La suite (u_n) est :

a. minorée non majorée	b. majorée non minorée	c. bornée	d. aucune des trois propositions proposées ci-dessus n'est correcte

23. Pour $a=1$, v_2 appartient à :

a. [0 ; 2]	b. [2 ; 4]	c. [4 ; 6]	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

24. Pour $a=-1$, la suite (v_n) est :

a. constante	b. strictement décroissante	c. strictement croissante	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

25. Pour $a=-4$, la suite (v_n) :

a. est convergente	b. diverge vers $-\infty$	c. diverge vers $+\infty$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

<u>LA TRIGONOMETRIE</u>

Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x\cos\left(\frac{x}{3}\right)$

26. *f* est :

a. paire	b. impaire	c. paire et impaire	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

27. *f* est :

a. périodique de période 2π	b. périodique de période 6π	c. périodique de période $\frac{2\pi}{3}$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

28. Le nombre de solutions sur $[-2\pi\,;2\pi]$ de l'équation $f(x)=0$ est :

a. 0	b. 1	c. 2	d. 3

29. Sur ℝ, la fonction dérivée *f'* est définie par $f'(x)=$

a. $-x\sin\left(\frac{x}{3}\right)$	b. $\cos\left(\frac{x}{3}\right)+x\sin\left(\frac{x}{3}\right)$	c. $\cos\left(\frac{x}{3}\right)-x\sin\left(\frac{x}{3}\right)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

30. 29. Sur ℝ, la primitive *F* de *f* telle que $F(0)=0$ est définie par $F(x)=$

a. $\frac{x^2}{2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$	b. $\frac{3x^2}{2}\sin\left(\frac{x}{3}\right)$	c. $9\cos\left(\frac{x}{3}\right)+3x\sin\left(\frac{x}{3}\right)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

31. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$

a. 0	b. $-\infty$	c. $+\infty$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

32. $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(\frac{1}{x}\right)=$

a. 0	b. $-\infty$	c. $+\infty$	d. aucune des trois propositions

			proposées n'est correcte

33. $\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx$ est :

a. nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

ALGORITHMIQUE

On considère l'algorithme suivant :

Saisir un entier $N \geq 1$
Affecter à S la valeur 0
Affecter à I la valeur 0
Tant que S<N
    Affecter à S la valeur S+I²
    Affecter à I la valeur I+1
Fin de tant que
Afficher S
Afficher I

34. La valeur de S affichée pour N=30 est :

a. 14	b. 30	c. 55	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

35. La valeur de I affichée pour N=30 est :

a. 4	b. 5	c. 6	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

36. La plus petite valeur de N telle que I=3 est :

a. 1	b. 2	c. 3	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

37. La plus grande valeur de N telle que I=3 est :

a.	b.	c.	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

LES COMPLEXES

38. L'écriture exponentielle de $\sqrt{3}-i$ est :

a. $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}$	b. $\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$	c. $2e^{-i\frac{\pi}{6}}$	d. $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

39. $\left(\sqrt{3}-i\right)^9$ est :

a. un réel strictement négatif	b. un réel strictement positif	c. un imaginaire pur	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

Dans un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ du plan complexe, on considère l'application f qui à tout point M d'affixe z où $z \neq -2$ associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{z+2}$.

40. Si $z=-i$ alors $z'=$

a. $-\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$	b. $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$	c. $-\frac{1}{2}+i$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

41. Si $z'=-i$ alors $z=$

a. $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i$	b. $-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$	c. $-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

42. L'ensemble des points M tels que OM'=1 est :

a. une droite privée d'un point	b. un cercle privé d'un point	c. une droite	d. un cercle

43. L'ensemble des points M tels que $z'=-\overline{z'}$ est :

a. une droite privée d'un point	b. un cercle privé d'un point	c. une droite	d. un cercle

LA GEOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère les points A(0 ; –5 ; 0) , B(1 ; 0 ; 1) , C(–1 ; –7 ; 0) et D(a ; 0 ; –1) où a est un réel.

44. Une équation du plan ABC est :

a. $3x+y+2z+5=0$	b. $x+y-6z+5=0$	c. $-2x+y-3z+5=0$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

45. Le triangle ABD est rectangle en B lorsque $a=$

a. 1	b. 3	c. 4	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

46. Les droites (AD) et (BC) sont parallèles lorsque $a=$

a. $-\frac{10}{7}$	b. $\frac{10}{7}$	c. 4	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

47. Le nombre de valeurs de a telles que AD=BC est :

a. 0	b. 1	c. 3	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

48. $x^2-4x+y^2+3y=4$ est une équation :

a. de cercle	b. de sphère	c. de plan	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

49. Une équation de la sphère de centre C et de rayon OA est :

a. $x^2+2x+y^2+14y+z^2=-25$	b. $x^2+2x+y^2+14y+z^2=25$
c. $x^2-2x+y^2-14y+z^2=-25$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

LES PROBABILITÉS

Soient A et B deux événements non impossibles, non certains et indépendants l'un de l'autre. De manière générale :

50. $\mathbb{P}(A\cup B)=$

a. $\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)$	b. $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B)$	c. $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(\overline{B})+\mathbb{P}(B)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

51. $\mathbb{P}_B(\overline{A})=$

a. $\mathbb{P}_B(A)$	b. $1-\mathbb{P}(A)$	c. $\mathbb{P}(\overline{A}\cap B)$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres (8 ; 0,3) ; Y une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur [–2 ; 1] et Z une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

52. $\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(X=7)$ est :

a. nul	b. strictement négatif	c. strictement positif	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

53. $\mathbb{E}(X)=$

a. 7,7	b. 8,3	c. 2,4	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

54. $\mathbb{P}(-1\le Y\le 2)=$

a. 1	b. 2/3	c. –1	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

55. $\mathbb{E}(Y)=$

a. $-\frac{1}{3}$	b. 1	c. $\frac{1}{3}$	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

56. $\mathbb{P}(Z<-2)-\mathbb{P}(Z\ge 2)$ est :

a. nul	b. strictement négatif	c. strictement positif	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

57. $\mathbb{E}(Z)$ est :

a. nulle	b. strictement négative	c. strictement positive	d. aucune des trois propositions proposées n'est correcte

LES STATISTIQUES

Mesdames Ave et Nir se présentent à une élection nationale.

Un sondage effectué sur un échantillon de n personnes (où $n\ge 50$) donne 52% des suffrages à Ave et 48% à Nir .

Soit p la proportion des votants pour madame Ave.

58. Pour n = 400, un intervalle de confiance de p, au niveau 95% est :

a. [0,51 ; 0,53]	b. [0,49 ; 0,55]	c. [0,47 ; 0,57]	d. [0,45 ; 0,59]

59. Le nombre minimal de personnes interrogées permettant d'affirmer, au niveau 95% que madame Ave va être

élue est :

a. 1500	b. 2000	c. 2500	d. 3000

60. Pour obtenir une amplitude 2 fois plus petite de l'intervalle de confiance de p, il suffirait de multiplier le nombre initial de votants par :

a. $\frac{1}{4}$	b. $\frac{1}{2}$	c. 2	d. 4