Amérique du Sud

1. Exercice 1 (6 points)

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

1. Vérifier que pour tout réel x, $f(x) = e\dfrac{x}{e^x}$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f.
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variation.

Partie B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k \text{ et } h_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}.$$

1. Vérifier que, pour tout réel x : $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$ puis que, pour tout réel $x \neq 1$: $g_n(x) = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. Comparer les fonctions h_n et g'_n, g'_n étant la dérivée de la fonction g_n.

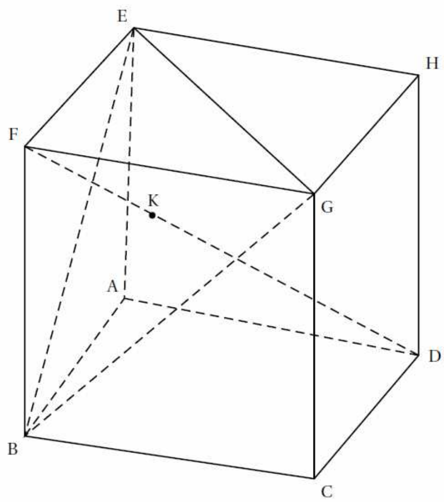
En déduire que, pour tout réel $x \neq 1$: $h_n(x) = \dfrac{nx^n - (n+1)x^{n+1} + 1}{(1-x)^2}$.

3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \ldots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.

En utilisant les résultats de la partie B, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

2. Exercice 2 (4 points)

On considère le cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1, représenté ci-dessous et on munit l'espace du repère orthonormé $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FD).
2. Démontrer que le vecteur $\vec{n} = (1 ; -1 ; 1)$ est un vecteur normal au plan (BGE) et déterminer une équation du plan (BGE).
3. Montrer que la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE) en un point K de coordonnées $K\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$.
4. Quelle est la nature du triangle BEG ¿ Déterminer son aire.
5. En déduire le volume du tétraèdre BEGD.

3. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

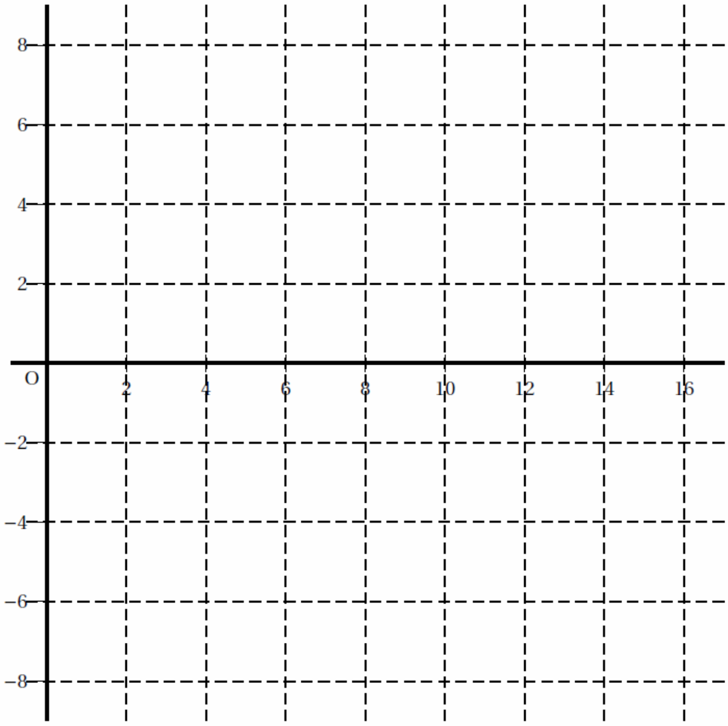
1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

2. On considère la suite (M_n) des points d'affixes $z_n = 2^n e^{i(-1)^n \frac{\pi}{6}}$, définie pour $n > 1$.

a. Vérifier que z_1 est une solution de (E).

b. Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

c. Placer les points M_1, M_2, M_3 et M_4 sur la figure donnée ci-dessous et tracer les segments $[M_1M_2]$, $[M_2M_3]$ et $[M_3M_4]$.



3. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $z_n = 2^n \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n i}{2} \right)$.

4. Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

Pour la suite de l'exercice, on admet que, pour tout entier $n \geq 1$, $M_nM_{n+1} = 2^n\sqrt{3}$.

5. On note $L_n = M_1M_2 + M_2M_3 + \ldots + M_nM_{n+1}$.

a. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $L_n = 2\sqrt{3}\left(2^n - 1\right)$.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $L_n \geq 1000$.

4. Exercice 3 (5 points, spécialistes)

Le gestionnaire d'un site web, composé de trois pages web numérotées de 1 à 3 et reliées entre elles par des liens hypertextes, désire prévoir la fréquence de connexion sur chacune de ses pages web.

Des études statistiques lui ont permis de s'apercevoir que :

– Si un internaute est sur la page n° 1, alors il ira, soit sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{3}{4}$.

– Si un internaute est sur la page n° 2, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il restera sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il ira sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

– Si un internaute est sur la page n° 3, alors, soit il ira sur la page n° 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, soit il ira sur la page n° 2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, soit il restera sur la page n° 3 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n, on définit les évènements et les probabilités suivants :

A_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 1 » et on note $a_n = P(A_n)$.

B_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 2 » et on note $b_n = P(B_n)$.

C_n : « Après la n-ième navigation, l'internaute est sur la page n° 3 » et on note $c_n = P(C_n)$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{cases}$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$; U_0 représente la situation initiale, avec $a_0 + b_0 + c_0 = 1$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$ où M est une matrice 3×3 que l'on précisera.

En déduire que, pour tout entier naturel n, $U_n = M^n U_0$.

3. Montrer qu'il existe une seule matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x + y + z = 1$ et $MU = U$.

4. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir l'expression de M^n, n étant un entier naturel non nul :

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{12}-\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n & \frac{5}{12}+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n. En déduire que les suites (a_n), (b_n) et (c_n) convergent vers des limites que l'on précisera.

5. Interpréter les résultats obtenus et donner une estimation des pourcentages de fréquentation du site à long terme.

5. Exercice 4 (5 points)

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

En utilisant sa base de données, la Sécurité Sociale (SS) estime que la proportion de Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme est de 10 %.

L'étude a également permis de prouver que 30 % des Français présentant, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme, seront victimes d'un accident cardiaque au cours de leur vie alors que cette proportion n'atteint plus que 8 % pour ceux qui ne souffrent pas de cette malformation congénitale.

On choisit au hasard une personne dans la population française et on considère les évènements :

M : « La personne présente, à la naissance, une malformation cardiaque de type anévrisme »

C : « La personne est victime d'un accident cardiaque au cours de sa vie ».

1. a. Montrer que $\mathbb{P}(M \cap C) = 0{,}03$.

b. Calculer $\mathbb{P}(C)$.

2. On choisit au hasard une victime d'un accident cardiaque. Quelle est la probabilité qu'elle présente une malformation cardiaque de type anévrisme ?

Partie B

La Sécurité Sociale décide de lancer une enquête de santé publique sur ce problème de malformation cardiaque de type anévrisme. Un échantillon de 400 personnes, prises au hasard dans la population française, est réalisé.

On note X la variable aléatoire comptabilisant le nombre de personnes de l'échantillon présentant une malformation cardiaque de type anévrisme.

1. Définir la loi de la variable aléatoire X.

2. Déterminer $\mathbb{P}(X = 35)$.

3. Déterminer la probabilité que 30 personnes de ce groupe, au moins, présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Partie C

1. On considère la variable aléatoire F, définie par $F = \dfrac{400}{X}$, X étant la variable aléatoire de la partie B.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95 %.

2. Dans l'échantillon considéré, 60 personnes présentent une malformation cardiaque de type anévrisme.

Qu'en pensez-vous ?