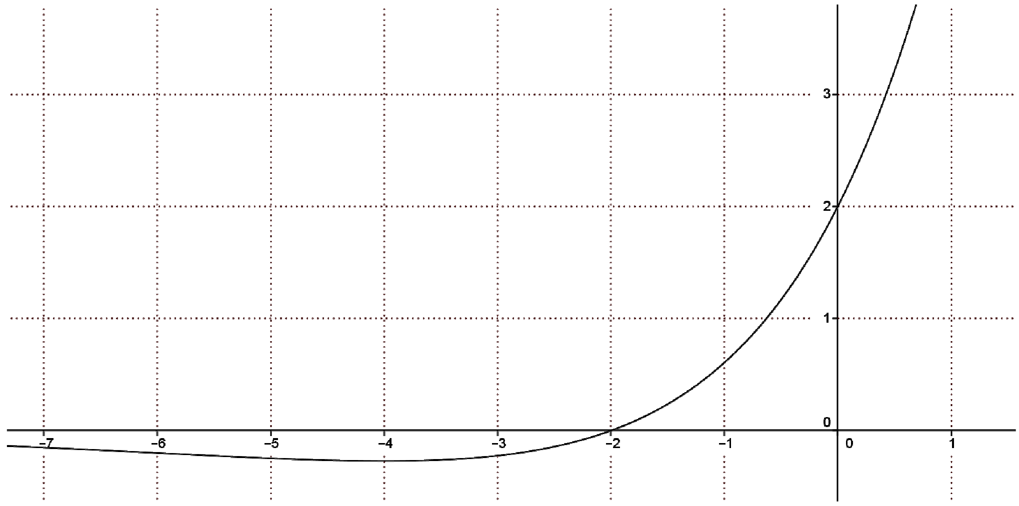
France métropolitaine

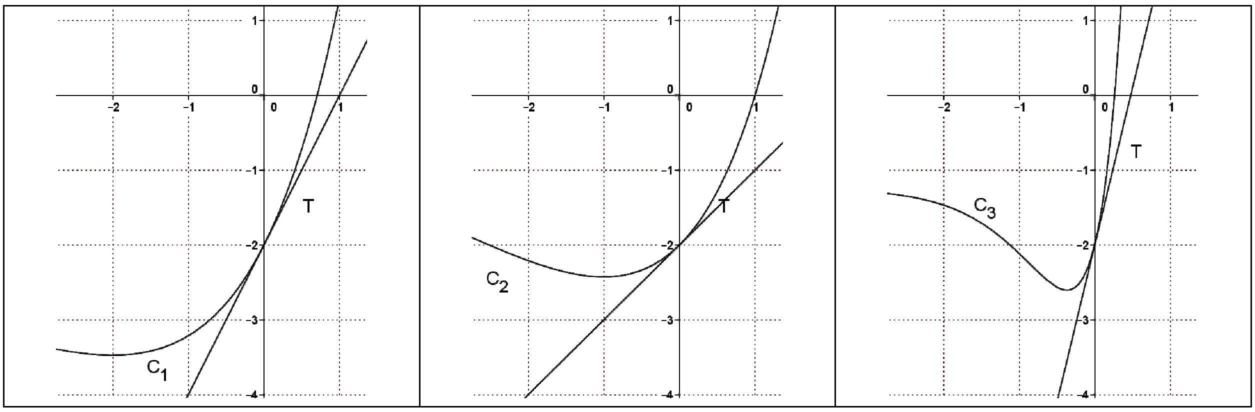
1. Exercice 1 (6 points)

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,)$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe C et trois autres courbes C_1, C_2, C_3 avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. À l'aide de la courbe C, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.

b. L'une des courbes C_1, C_2, C_3 est la courbe représentative de la fonction F.
Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f évoquée dans la partie A est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{2}x}.$$

1. L'observation de la courbe C permet de conjecturer que la fonction f admet un minimum.

a. Démontrer que pour tout réel x, $f'(x)=2(x+4)e^{\frac{1}{2}x}$.

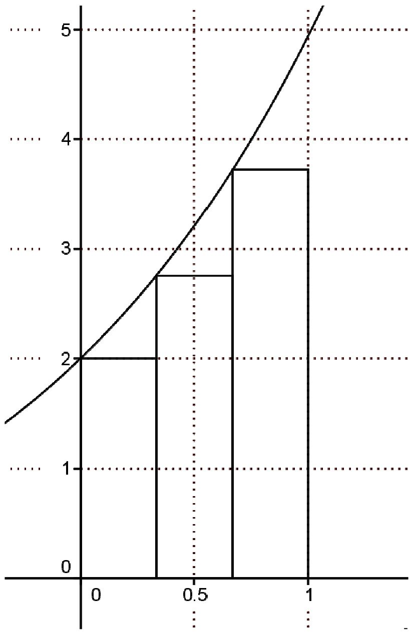
b. En déduire une validation de la conjecture précédente.

2. On pose $I=\int_0^1 f(x)\,dx$.

a. Interpréter géométriquement le réel I.

b. Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x)=x$ et $v(x)=e^{\frac{1}{2}x}$. Vérifier que $f=2(u'v+uv')$.

c. En déduire la valeur exacte de l'intégrale I.



3. On donne l'algorithme ci-dessous.

Variables : k et n sont des nombres entiers naturels. s est un nombre réel.

Entrée : Demander à l'utilisateur la valeur de n.

Initialisation : Affecter à s la valeur 0.

Traitement : Pour k allant de 0 à $n-1$

Affecter à s la valeur $s+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Fin de boucle.

Sortie : Afficher s.

On note s_n le nombre affiché par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre un entier naturel stritement positif comme valeur de n.

a. Justifier que s_3 représente l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine hachuré sur le graphique ci-dessous où les trois rectangles ont la même largeur.

b. Que dire de la valeur de s_n fournie par l'algorithme proposé lorsque n devient grand ?

2. Exercice 2 (4 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule d'entre elles est exacte.

Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la réponse choisie et justifiera son choix.

Il est attribué un point par réponse correcte et convenablement justifiée. Une réponse non justifiée ne sera pas prise en compte. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.

Pour les questions 1 et 2, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

La droite D est définie par la représentation paramétrique $\begin{cases} x=5-2t \\ y=1+3t \\ z=4 \end{cases}$.

1. On note P le plan d'équation cartésienne $3x+2y+z-6=0$.

a. La droite D est perpendiculaire au plan P.

b. La droite D est parallèle au plan P.

c. La droite D est incluse dans le plan P.

2. On note D′ la droite qui passe par le point A de coordonnées (3 ; 1 ; 1) et a pour vecteur directeur $\vec{u}=2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$.

a. Les droites D et D′ sont parallèles.

b. Les droites D et D′ sont sécantes.

c. Les droites D et D′ ne sont pas coplanaires.

Pour les questions 3 et 4, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

3. Soit E l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+i|=|z-i|$.

a. E est l'axe des abscisses.

b. E est l'axe des ordonnées.

c. E est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

4. On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité $\frac{c}{b}=\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

a. Le triangle OBC est isocèle en O.

b. Les points O, B, C sont alignés.

c. Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

3. Exercice 3 (5 points)

Dans une usine, on utilise deux machines A et B pour fabriquer des pièces.

1. La machine A assure 40 % de la production et la machine B en assure 60 %.

On estime que 10 % des pièces issues de la machine A ont un défaut et que 9 % des pièces issues de la machine B ont un défaut.

On choisit une pièce au hasard et on considère les évènements suivants :

A : « La pièce est produite par la machine A »

B : « La pièce est produite par la machine B»

D : « La pièce a un défaut». $\overline{\text{D}}$, l'évènement contraire de l'événement D.

a. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

b. Calculer la probabilité que la pièce choisie présente un défaut et ait été fabriquée par la machine A.

c. Démontrer que la probabilité $\mathbb{P}(\text{D})$ de l'événement D est égale à 0,094.

d. On constate que la pièce choisie a un défaut. Quelle est la probabilité que cette pièce provienne de la machine A ?

2. On estime que la machine A est convenablement réglée si 90 % des pièces qu'elle fabrique sont conformes. On décide de contrôler cette machine en examinant n pièces choisies au hasard (n entier naturel) dans la production de la machine A. On assimile ces n tirages à des tirages successifs indépendants et avec remise.

On note X_n le nombre de pièces qui sont conformes dans l'échantillon de n pièces, et $F_n=\frac{X_n}{n}$ la proportion correspondante.

a. Justifier que la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

b. Dans cette question, on prend $n = 150$.

Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique I au seuil de 95 % de la variable aléatoire F_{150}.

c. Un test de qualité permet de dénombrer 21 pièces non conformes sur un échantillon de 150 pièces produites. Cela remet-il en cause le réglage de la machine ? Justifier la réponse.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\frac{u_n+2}{2u_n+1}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.

1. a. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. Établir que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Établir que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$. Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre

Dans un village imaginaire isolé, une nouvelle maladie contagieuse mais non mortelle a fait son apparition. Rapidement les scientifiques ont découvert qu'un individu pouvait être dans l'un des trois états suivants :

S : « l'individu est sain, c'est-à-dire non malade et non infecté »,

I : « l'individu est porteur sain, c'est-à-dire non malade mais infecté »,

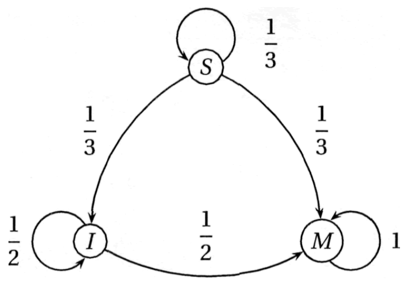
M : « l'individu est malade et infecté ».

Partie A

Les scientifiques estiment qu'un seul individu est à l'origine de la maladie sur les 100 personnes que compte la population et que, d'une semaine à la suivante, un individu change d'état suivant le processus suivant :

- parmi les individus sains, la proportion de ceux qui deviennent porteurs sains est égale à $\dfrac{1}{3}$ et la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\dfrac{1}{3}$,
- parmi les individus porteurs sains, la proportion de ceux qui deviennent malades est égale à $\dfrac{1}{2}$.

La situation peut être représentée par un graphe probabiliste comme ci-dessous.



On note $P_n = (s_n \quad i_n \quad m_n)$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines où s_n, i_n et m_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain ou malade la n-ième semaine.

On a alors $P_0 = \begin{pmatrix} 0{,}99 & 0 & 0{,}01 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, $\begin{cases} s_{n+1} = \dfrac{1}{3}s_n \\ i_{n+1} = \dfrac{1}{3}s_n + \dfrac{1}{2}i_n \\ m_{n+1} = \dfrac{1}{3}s_n + \dfrac{1}{2}i_n + m_n \end{cases}$.

1. Écrire la matrice A, appelée *matrice de transition*, telle que pour tout entier naturel n, $P_{n+1} = P_n \times A$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $P_n = P_0 \times A^n$.

3. Déterminer l'état probabiliste P_4 au bout de quatre semaines. On pourra arrondir les valeurs à 10^{-2}.

Quelle est la probabilité qu'un individu soit sain au bout de quatre semaines ?

Partie B

La maladie n'évolue en réalité pas selon le modèle précédent puisqu'au bout de 4 semaines de recherche, les scientifiques découvrent un vaccin qui permet d'enrayer l'endémie et traitent immédiatement l'ensemble de la population.

L'évolution hebdomadaire de la maladie après vaccination est donnée par la matrice de transition :

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

On note Q_n la matrice ligne donnant l'état probabiliste au bout de n semaines après la mise en place de ces nouvelles mesures de vaccination. Ainsi, $Q_n = \begin{pmatrix} S_n & I_n & M_n \end{pmatrix}$ où S_n, I_n et M_n désignent respectivement la probabilité que l'individu soit sain, porteur sain et malade la n-ième semaine après la vaccination. Pour tout entier naturel n, on a alors $Q_{n+1} = Q_n \times B$.

D'après la partie A, $Q_0 = P_4$. Pour la suite, on prend $Q_0 = \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}10 & 0{,}89 \end{pmatrix}$ où les coefficients ont été arrondis à 10^{-2}.

1. Exprimer S_{n+1}, I_{n+1} et M_{n+1} en fonction de S_n, I_n et M_n.

2. Déterminer la constante réelle k telle que $B^2 = kJ$ où J est la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1.

On en déduit que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $B^n = B^2$.

3. a. Démontrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 2, $Q_n = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

b. Interpréter ce résultat en terme d'évolution de la maladie. Peut-on espérer éradiquer la maladie grâce au vaccin ?