

Asie

Dans l'ensemble du sujet, et pour chaque question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Exercice 1 (5 points)

Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies au centième.

Partie A

Un grossiste achète des boîtes de thé vert chez deux fournisseurs. Il achète 80 % de ses boîtes chez le fournisseur A et 20 % chez le fournisseur B.

10 % des boîtes provenant du fournisseur A présentent des traces de pesticides et 20 % de celles provenant du fournisseur B présentent aussi des traces de pesticides.

On prélève au hasard une boîte du stock du grossiste et on considère les événements suivants :

- événement A : « la boîte provient du fournisseur A » ;
- événement B : « la boîte provient du fournisseur B » ;
- événement S : « la boîte présente des traces de pesticides ».

1. Traduire l'énoncé sous forme d'un arbre pondéré.
2. a. Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap S$?
b. Justifier que la probabilité que la boîte prélevée ne présente aucune trace de pesticides est égale à 0,88.
3. On constate que la boîte prélevée présente des traces de pesticides.
Quelle est la probabilité que cette boîte provienne du fournisseur B ?

Partie B

Le gérant d'un salon de thé achète 10 boîtes chez le grossiste précédent. On suppose que le stock de ce dernier est suffisamment important pour modéliser cette situation par un tirage aléatoire de 10 boîtes avec remise.

On considère la variable aléatoire X qui associe à ce prélèvement de 10 boîtes, le nombre de boîtes sans traces de pesticides.

1. Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que les 10 boîtes soient sans trace de pesticides.
3. Calculer la probabilité qu'au moins 8 boîtes ne présentent aucune trace de pesticides.

Partie C

À des fins publicitaires, le grossiste affiche sur ses plaquettes : « 88 % de notre thé est garanti sans trace de pesticides ».

Un inspecteur de la brigade de répression des fraudes souhaite étudier la validité de l'affirmation. À cette fin, il prélève 50 boîtes au hasard dans le stock du grossiste et en trouve 12 avec des traces de pesticides. On suppose que, dans le stock du grossiste, la proportion de boîtes sans trace de pesticides est bien égale à 0,88.

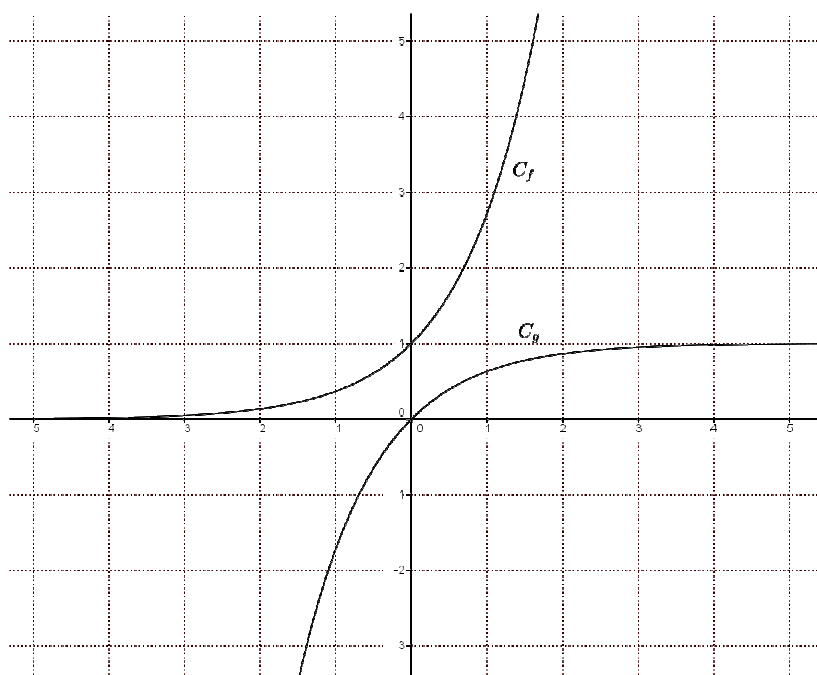
On note F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 50 boîtes, associe la fréquence des boîtes ne contenant aucune trace de pesticides.

1. Donner l'intervalle de fluctuation asymptotique de la variable aléatoire F au seuil de 95%.
2. L'inspecteur de la brigade de répression peut-il décider, au seuil de 95 %, que la publicité est mensongère ?

2. Exercice 2 (6 points)

On considère les fonctions f et g définies pour tout réel x par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$.

Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repère orthogonal du plan, notées respectivement C_f et C_g , sont fournies ci-dessous.



Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer au mieux ces tangentes sur la figure.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.

On note D l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a et tangente à la courbe C_g au point B d'abscisse b .

1. a. Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point A .
- b. Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_g au point B .
- c. En déduire que $b = -a$.
2. Démontrer que le réel a est solution de l'équation $2(x-1)e^x + 1 = 0$.

Partie C

On considère la fonction φ définie sur \mathbb{R} par $\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1$.

1. a. Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.
- b. Calculer la dérivée de la fonction φ , puis étudier son signe.
- c. Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur \mathbb{R} . Préciser la valeur de $\varphi(0)$.
2. a. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans \mathbb{R} .
- b. On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation. À l'aide d'une calculatrice, donner les valeurs de α et β arrondies au centième.

Partie D

Dans cette partie, on démontre l'existence de ces tangentes communes, que l'on a admise dans la partie B.

On note E le point de la courbe C_f d'abscisse a et F le point de la courbe C_g d'abscisse $-a$ (a est le nombre réel défini dans la partie C).

1. Démontrer que la droite (EF) est tangente à la courbe C_f au point E .

2. Démontrer que (EF) est tangente à C_g au point F .

3. Exercice 3 (4 points)

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Dans les questions 1. et 2., le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$$a = 2 + 2i, \quad b = -\sqrt{3} + i, \quad c = 1 + i\sqrt{3}, \quad d = -1 + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e = -1 + (2 + \sqrt{3})i.$$

- Affirmation 1 : les points A, B et C sont alignés.
- Affirmation 2 : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E .
- Dans cette question, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points

$$I(1; 0; 0), J(0; 1; 0) \text{ et } K(0; 0; 1).$$

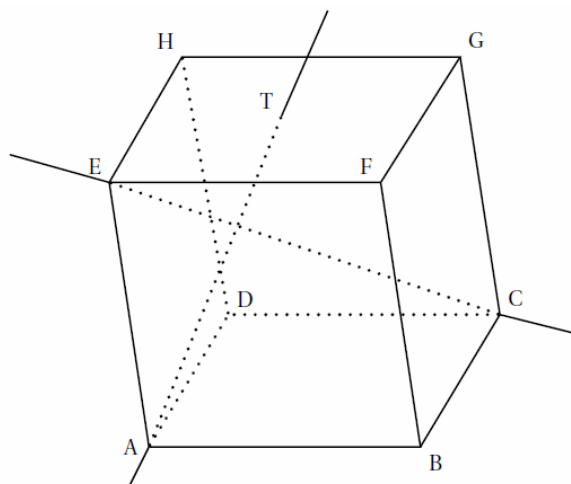
Affirmation 3 : la droite D de représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 6 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ où } t \in \mathbb{R}, \text{ coupe le plan}$$

$$(IJK) \text{ au point } E\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right).$$

4. Dans le cube $ABCDEFGH$, le point T est le milieu du segment $[HF]$.

Affirmation 4 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales.



4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Partie A

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1 + 3u_n}{3 + u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 1$.

2. a. Établir que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{(1 - u_n)(1 + u_n)}{3 + u_n}$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) . En déduire que la suite (u_n) converge.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{1 + 0,5u_n}{0,5 + u_n}$.

On admet que tous les termes de cette suite sont définis et strictement positifs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Soit un entier naturel non nul n
Initialisation	Affecter à u la valeur 2
Traitement et sortie	POUR i allant de 1 à n

	Affecter à u la valeur $\frac{1+0,5u}{0,5+u}$
	Afficher u
	FIN POUR

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour $n = 3$. Les valeurs de u seront arrondies au millième.

i	1	2	3
u			

1. Pour $n = 12$, on a prolongé le tableau précédent et on a obtenu :

i	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,0083	0,9973	1,0009	0,9997	1,0001	0,99997	1,00001	0,999996	1,000001

Conjecturer le comportement de la suite (u_n) à l'infini.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. Calculer v_0 puis écrire v_n en fonction de n .

4. a. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $v_n \neq 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n = \frac{1+v_n}{1-v_n}$.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.

Ainsi, le rectangle initial $OEFG$ est transformé en un rectangle $OE'F'G'$, appelé image de $OEFG$.

L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Les points E , F et G ont pour coordonnées respectives $(2; 2)$, $(-1; 5)$ et $(-3; 3)$.

La transformation du logiciel associe à tout point $M(x; y)$ du plan le point $M'(x'; y')$, image du

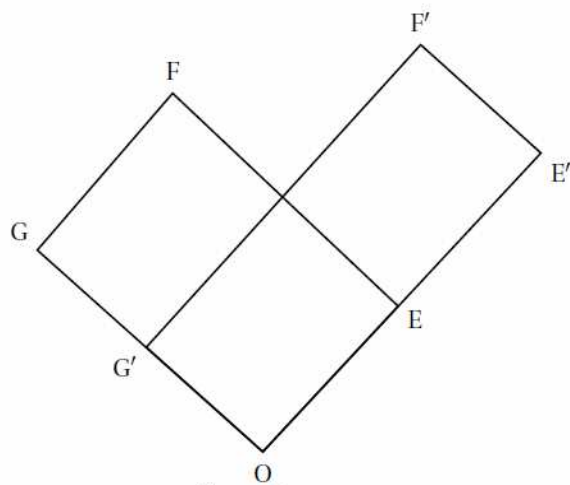


Figure 1

point M tel que :
$$\begin{cases} x' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ y' = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{cases}$$

1. a. Calculer les coordonnées des points E' , F' et G' , images des points E , F et G par cette transformation.

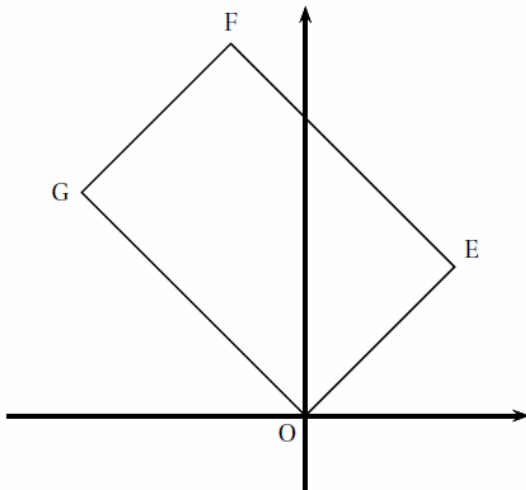


Figure 2

b. Comparer les longueurs OE et OE' d'une part, OG et OG' d'autre part.

Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A , telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle $OEFG$ lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1. On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.

Une erreur a été commise.

Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement	POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b FIN POUR
Sortie	Afficher x , afficher y

2. On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	2,5	7,25	15,625	31,8125	63,9063	2 047,9971	65 535,9999
y	5,5	8,75	16,375	32,1875	64,0938	2 048,0029	65 536,0001

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F .

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle $OEFG$. On définit la suite des points $E_n (x_n ; y_n)$ du plan par $E_0 = E$ et la relation de récurrence : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ où $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point E_{n+1} . Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1. On admet que, pour tout entier $n > 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $A^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n > 1$, on a : $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.

On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n , les coordonnées $(x_n ; y_n)$ du point E_n vérifient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b. Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.