

## Antilles-Guyane

### 1. Exercice 1 (5 points)

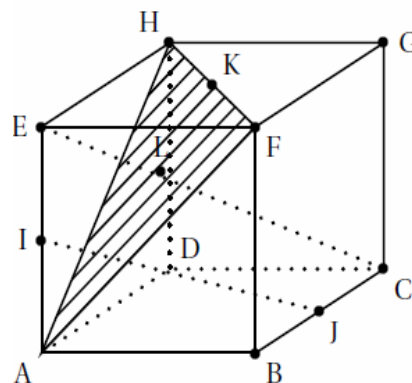
Description de la figure dans l'espace muni du repère orthonormé  $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$  : ABCDEFGH désigne un cube de côté 1. On appelle P le plan (AFH).

Le point I est le milieu du segment [AE].

Le point J est le milieu du segment [BC].

Le point K est le milieu du segment [HF].

Le point L est le point d'intersection de la droite (EC) et du plan P.



Ceci est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, une seule des quatre affirmations est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fautive ou une absence de réponse ne rapporte aucun point.

1. a. Les droites (IJ) et (EC) sont strictement parallèles.  
b. Les droites (IJ) et (EC) sont non coplanaires.  
c. Les droites (IJ) et (EC) sont sécantes.  
d. Les droites (IJ) et (EC) sont confondues.
2. a. Le produit scalaire  $\overline{AF} \cdot \overline{BG}$  est égal à 0.  
b. Le produit scalaire  $\overline{AF} \cdot \overline{BG}$  est égal à (-1).  
c. Le produit scalaire  $\overline{AF} \cdot \overline{BG}$  est égal à 1.  
d. Le produit scalaire  $\overline{AF} \cdot \overline{BG}$  est égal à 2.
3. Dans le repère orthonormé  $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$ ,  
a. le plan P a pour équation cartésienne :  $x + y + z - 1 = 0$ .  
b. le plan P a pour équation cartésienne :  $x - y + z = 0$ .  
c. le plan P a pour équation cartésienne :  $-x + y + z = 0$ .  
d. le plan P a pour équation cartésienne :  $x + y - z = 0$ .
4. a.  $\overline{EG}$  est un vecteur normal au plan P.  
b.  $\overline{EL}$  est un vecteur normal au plan P.  
c.  $\overline{IJ}$  est un vecteur normal au plan P.  
d.  $\overline{DI}$  est un vecteur normal au plan P.
5. a.  $\overline{AL} = \frac{1}{2}\overline{AH} + \frac{1}{2}\overline{AF}$       b.  $\overline{AL} = \frac{1}{3}\overline{AK}$       c.  $\overline{ID} = \frac{1}{2}\overline{IJ}$       d.  $\overline{AL} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{3}\overline{AD} + \frac{2}{3}\overline{AE}$ .

### 2. Exercice 2 (5 points)

#### Partie A

Soient  $n$  un entier naturel,  $p$  un nombre réel compris entre 0 et 1 et  $X_n$  une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$ . On note  $F_n = \frac{X_n}{n}$  et  $f$  une valeur prise par  $F_n$ .

On rappelle que, pour  $n$  assez grand, l'intervalle  $\left[ p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  contient la fréquence  $f$  avec une probabilité au moins égale à 0,95.

En déduire que l'intervalle  $\left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  contient  $p$  avec une probabilité au moins égale à 0,95.

### Partie B

On cherche à étudier le nombre d'étudiants connaissant la signification du sigle URSSAF.

Pour cela, on les interroge en proposant un questionnaire à choix multiples. Chaque étudiant doit choisir parmi trois réponses possibles, notées A, B et C, la bonne réponse étant la A.

On note  $r$  la probabilité pour qu'un étudiant connaisse la bonne réponse. Tout étudiant connaissant la bonne réponse répond A, sinon il répond au hasard (de façon équiprobable).

1. On interroge un étudiant au hasard. On note :

A l'évènement « l'étudiant répond A »,

B l'évènement « l'étudiant répond B »,

C l'évènement « l'étudiant répond C »,

R l'évènement « l'étudiant connaît la réponse »,  $\bar{R}$  l'évènement contraire de R.

a. Traduire cette situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

b. Montrer que la probabilité de l'évènement A est  $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}(1+2r)$ .

c. Exprimer en fonction de  $r$  la probabilité qu'une personne ayant choisi A connaisse la bonne réponse.

2. Pour estimer  $r$ , on interroge 400 personnes et on note  $X$  la variable aléatoire comptant le nombre de bonnes réponses. On admettra qu'interroger au hasard 400 étudiants revient à effectuer un tirage avec remise de 400 étudiants dans l'ensemble de tous les étudiants.

a. Donner la loi de  $X$  et ses paramètres  $n$  et  $p$  en fonction de  $r$ .

b. Dans un premier sondage, on constate que 240 étudiants répondent A, parmi les 400 interrogés.

Donner un intervalle de confiance au seuil 0,95 de l'estimation de  $p$ .

En déduire un intervalle de confiance au seuil 0,95 de  $r$ .

c. Dans la suite, on suppose que  $r = 0,4$ . Compte-tenu du grand nombre d'étudiants, on considérera que  $X$  suit une loi normale.

i. Donner les paramètres de cette loi normale.

ii. Donner une valeur approchée de  $\mathbb{P}(X \leq 250)$  à  $10^{-2}$  près.

### 3. Exercice 3 (5 points)

---

Dans tout ce qui suit,  $m$  désigne un nombre réel quelconque.

#### Partie A

Soit  $f$  la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels  $\mathbb{R}$  telle que :  $f(x) = (x+1)e^x$ .

1. Calculer la limite de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .

2. On note  $f'$  la fonction dérivée de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$ . Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (x+2)e^x$ .

3. Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

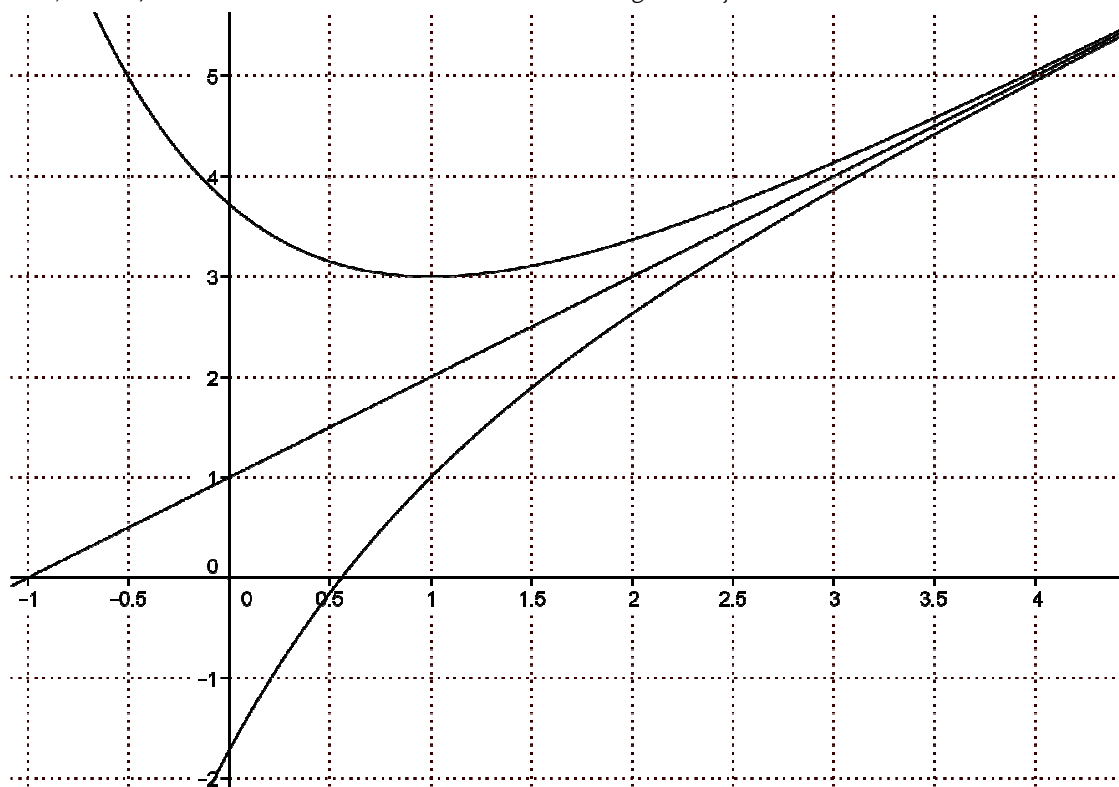
#### Partie B

On définit la fonction  $g_m$  sur  $\mathbb{R}$  par  $g_m(x) = x+1-me^{-x}$  et on note  $C_m$  la courbe de la fonction  $g_m$  dans un repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1. a. Démontrer que  $g_m(x) = 0$  si et seulement si  $f(x) = m$ .

b. Dédurre de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe  $C_m$  avec l'axe des abscisses en fonction du réel  $m$ .

2. On a représenté ci-dessous les courbes  $C_0$ ,  $C_e$  et  $C_{-e}$  (obtenues en prenant respectivement pour  $m$  les valeurs 0,  $e$  et  $-e$ ). Identifier chacune de ces courbes sur la figure en justifiant.



3. Étudier la position de la courbe  $C_m$  par rapport à la droite  $D$  d'équation  $y = x + 1$  suivant les valeurs du réel  $m$ .

4. a. On appelle  $D_2$  la partie du plan comprise entre les courbes  $C_e$ ,  $C_{-e}$ , l'axe  $(Oy)$  et la droite  $x = 2$ . Hachurer  $D_2$  sur la figure.

b. Dans cette question,  $a$  désigne un réel positif,  $D_a$  la partie du plan comprise entre  $C_e$ ,  $C_{-e}$ , l'axe  $(Oy)$  et la droite  $D_a$  d'équation  $x = a$ . On désigne par  $A(a)$  l'aire de cette partie du plan exprimée en unités d'aire.

Démontrer que pour tout réel  $a$  positif :  $A(a) = 2e - 2e^{1-a}$ .

En déduire la limite de  $A(a)$  quand  $a$  tend vers  $+\infty$ .

#### 4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

On considère la suite  $(z_n)$  à termes complexes définie par :  $z_0 = 1 + i$  et, pour tout entier naturel  $n$ , par

$$z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{3}.$$

Pour tout entier naturel  $n$ , on pose :  $z_n = a_n + ib_n$ , où  $a_n$  est la partie réelle de  $z_n$  et  $b_n$  est la partie imaginaire de  $z_n$ .

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$ .

#### Partie A

1. Donner  $a_0$  et  $b_0$ .

2. Calculer  $z_1$ , puis en déduire que  $a_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{3}$  et  $b_1 = \frac{1}{3}$ .

3. On considère l'algorithme suivant :

Variables	A et B sont des nombres réels K et N sont des nombres entiers
Initialisation	Affecter à A la valeur 1 Affecter à B la valeur 1
Traitement	Entrer la valeur de N Pour K variant de 1 à N Affecter à A la valeur $\frac{A + \sqrt{A^2 + B^2}}{3}$ Affecter à B la valeur $\frac{B}{3}$ Fin Pour Afficher A

a. On exécute cet algorithme en saisissant  $N = 2$ . Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme (on arrondira les valeurs calculées à  $10^{-4}$  près).

K	A	B
1		
2		

b. Pour un nombre  $N$  donné, à quoi correspond la valeur affichée par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

### Partie B

1. Pour tout entier naturel  $n$ , exprimer  $z_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ .

En déduire l'expression de  $a_{n+1}$  en fonction de  $a_n$  et  $b_n$ , et l'expression de  $b_{n+1}$  en fonction de  $b_n$ .

2. Quelle est la nature de la suite  $(b_n)$  ? En déduire l'expression de  $b_n$  en fonction de  $n$ , et déterminer la limite de la suite  $(b_n)$ .

3. a. On rappelle que pour tous nombres complexes  $z$  et  $z'$  :  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$  (inégalité triangulaire).

Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $|z_{n+1}| \leq \frac{2|z_n|}{3}$ .

b. Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = |z_n|$ .

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \sqrt{2}$ .

En déduire que la suite  $(u_n)$  converge vers une limite que l'on déterminera.

c. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $|a_n| \leq u_n$ .

En déduire que la suite  $(a_n)$  converge vers une limite que l'on déterminera.

### 5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

On définit les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sur l'ensemble  $\mathbb{N}$  des entiers naturels par :

$$u_0 = 0, v_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .

1. Calculer  $u_1$  et  $v_1$ .

2. On considère l'algorithme suivant :

Variables	u, v et w des nombres réels N et k des nombres entiers.
Initialisation	u prend la valeur 0 v prend la valeur 1
Traitement	Entrer la valeur de N Pour k variant de 1 à N w prend la valeur u u prend la valeur $\frac{w+v}{2}$ v prend la valeur $\frac{w+2v}{3}$ Fin du Pour Afficher u Afficher v

a. On exécute cet algorithme en saisissant  $N=2$ . Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b. Pour un nombre  $N$  donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3. Pour tout entier naturel  $n$ , on définit le vecteur colonne  $X_n$  par  $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$  et la matrice  $A$  par  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ .

a. Vérifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ .

b. Démontrer par récurrence que  $X_n = A^n X_0$  pour tout entier naturel  $n$ .

4. On définit les matrices  $P, P'$  et  $B$  par  $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ ,  $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$ .

a. Calculer le produit  $PP'$ . On admet que  $P'BP = A$ .

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ ,  $A^n = P'B^nP$ .

b. On admet que pour tout entier naturel  $n$ ,  $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$ . En déduire l'expression de la matrice  $A^n$  en fonction de  $n$ .

5. a. Montrer que  $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5} \times \frac{1}{6^n} \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{6^n} \end{pmatrix}$  pour tout entier naturel  $n$ .

En déduire les expressions de  $u_n$  et  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b. Déterminer alors les limites des suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$ .