Amérique du Nord

1. Exercice 1 (5 points)

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère les points A(0; 4; 1), B (1; 3; 0), C(2 ; –1 ; –2) et D (7 ; –1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2:-1;3)$.

a. Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

d. Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit P_1 le plan d'équation $x+y+z=0$ et P_2 le plan d'équation $x+4y+2=0$.

a. Démontrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b. Vérifier que la droite d, intersection des plans P_1 et P_2, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x=-4t-2 \\ y=t \\ z=3t+2 \end{cases}, t\in\mathbb{R}$.

c. La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ¿

Correction

1. $\overrightarrow{AB}(1;-1;-1)$ et $\overrightarrow{AC}(2;-5;-3)$ ne sont pas colinéaires (car les coordonnées ne sont pas proportionnelles) donc A,B,C ne sont pas alignés.

2. a. Il suffit de montrer que Δ est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

$\vec{u}.\overrightarrow{AB}=2\times1+(-1)(-1)+3(-1)=0$ et $\vec{u}.\overrightarrow{AC}=2\times2+(-1)(-5)+3(-3)=0$.

b. D'après a), $\vec{u}$ est un vecteur normal à (ABC) donc (ABC) : $2x-y+3z+d=0$.

Or $A\in(ABC)$ donc $2\times0-4+3\times1+d=0$ d'où $d=1$ et (ABC) : $2x-y+3z+1=0$.

c. $M(t)\begin{cases} x=7+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \end{cases}$.

d. On cherche t tel que $M(t)\in(ABC)$: $2(7+2t)-(-1-t)+3(4+3t)+1=0 \Leftrightarrow 14t=-28 \Leftrightarrow t=-2$ d'où $H=M(t=-2)$ qui a pour coordonnées $(3;1;-2)$.

3. a. Il suffit de montrer que les vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}(1;1;1)$ et $\overrightarrow{n_2}(1;4;0)$ ne sont pas colinéaires.

b. Maintenant qu'on sait que P_1 et P_2 sont sécants, il suffit de vérifier que le droite proposée est bien contenue dans ces deux plans : $(-4t-2)+(t)+(3t+2)=0$ et $(-4t-2)+4(t)+2=0$ pour tout réel t.

c. Il suffit de vérifier si un vecteur directeur $\vec{v}$ de d est orthogonal à $\vec{u}$ un vecteur normal à (ABC). Or d'après b), $\vec{v}(-4;1;3)$. Et $\vec{v}.\vec{u}=-4\times2+1\times(-1)+3\times3=0$ ce qui prouve que d est parallèle à (ABC).

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables	n est un entier naturel

	u est un réel positif
Initialisation	Demander la valeur de n Affecter à u la valeur 1
Traitement	Pour i variant de 1 à n : Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$ Fin de Pour
Sortie	Afficher u

a. Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b. Que permet de calculer cet algorithme ?

c. Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n :

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n \le 2$.

b. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

3. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n) - \ln 2$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -\ln 2$.

b. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de la suite (u_n).

d. Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions du traitement et de la sortie, de façon à afficher en sortie la plus petite valeur de n telle que $u_n > 1{,}999$.

Variables	n est un entier naturel u est un réel
Initialisation	Affecter à n la valeur 0 Affecter à u la valeur 1
Traitement	
Sortie	

Correction

1. a. u prend respectivement les valeurs $1; \sqrt{2}; \sqrt{2\sqrt{2}}; \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ et la dernière valeur vaut environ 1,834.

b. Il calcule la valeur de u_n.

2. a. Par récurrence. $u_0 = 1$ donc la proposition est vraie au rang 0.

Supposons que pour un certain entier $n \ge 0$ on ait $0 < u_n \le 2$. Alors $0 < 2u_n \le 4$ et $0 < \sqrt{2u_n} \le 2$ ce qui prouve que $0 < u_{n+1} \le 2$. La proposition $0 < u_n \le 2$ est donc vraie pour tout entier $n \ge 0$.

b. On cherche le signe de $u_{n+1} - u_n = \sqrt{2u_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{2} - \sqrt{u_n})$. Or $\sqrt{u_n} \ge 0$ et d'après 2a), $2 \ge u_n$ donc comme $u_n \ge 0$, $\sqrt{2} \ge \sqrt{u_n}$ d'où $\sqrt{2} - \sqrt{u_n} \ge 0$ ce qui prouve que $u_{n+1} - u_n \ge 0$, la suite est croissante.

Remarque : on pouvait aussi le faire par récurrence, en montrant que $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout entier $n \geq 0$.
c. La suite est croissante et d'après a., elle est majorée (par 2) donc elle converge.
3. a.

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - \ln 2 = \ln\left(\sqrt{2u_n}\right) - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln(2u_n) - \ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln u_n - \ln 2 = \frac{1}{2}(\ln u_n - \ln 2) = \frac{1}{2}v_n$$

donc (v_n) est bien géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$.

b. On a donc $v_n = v_0 q^n = -(\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. D'où $\ln u_n - \ln 2 = -(\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où $\ln u_n = \ln 2 - (\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ ce qui donne $u_n = e^{\ln 2 - (\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

c. Quand n tend vers $+\infty$, la limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ vaut 0 donc celle de $\ln 2 - (\ln 2)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est $\ln 2$ ce qui donne par composition que (u_n) converge bien vers $e^{\ln 2} = 2$.
d. Puisque la suite est croissante, on complète par :

tant que $(u \leq 1{,}999)$ faire
| Affecter à la valeur $\sqrt{2u}$
| Affecter à n la valeur $n+1$
Sortie : Afficher n

Exercice 2 (5 points, spécialistes)

PartieA

On considère l'algorithme suivant :

Variables	a, b, c sont des entiers naturels
Initialisation	Affecter à c la valeur 0 Demander la valeur de a Demander la valeur de b
Traitement	Tant que a>b Affecter à c la valeur c+1 Affecter à a la valeur a – b Fin de tant que
Sortie	Afficher c Afficher a

1. Faire fonctionner cet algorithme avec $a = 13$ et $b = 4$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
2. Que permet de calculer cet algorithme ?

PartieB

À chaque lettre de l'alphabet, on associe, grâce au tableau ci-dessous, un nombre entier compris entre 0 et 25.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

Étape 1 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre m correspondant dans le tableau.

Étape 2 : On calcule le reste de la division euclidienne de $9m+5$ par 26 et on le note p.

Étape 3 : Au nombre p, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

1. Coder la lettre U.

2. Modifier l'algorithme de la partie A pour qu'à une valeur de m entrée par l'utilisateur, il affiche la valeur de p, calculée à l'aide du procédé de codage précédent.

Partie C

1. Trouver un nombre entier x tel que $9x \equiv 1[26]$.

2. Démontrer alors l'équivalence : $9m+5 \equiv p[26] \Leftrightarrow m \equiv 3p-15[26]$.

3. Décoder alors la lettre B.

<u>Correction</u>

Partie A

1. Les valeurs du triplet (a,b,c) valent respectivement $(13,4,0)$, $(9,4,1)$,$(5,4,2)$, $(1,4,3)$. Il affiche alors $c=3$ et $a=1$.

2. Remarque : Il donne respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b. Mais en fait, il y a une erreur dans l'algorithme car pour que cela donne bien la division euclidienne, il faut mettre tant que $(a \geq b)$. En effet, la sortie de la boucle *tant que* se fait quand $a<b$ donc ce qui ferait de a un éventuel reste (car strictement inférieur au quotient b).

Reste à voir qu'on a bien à la fin : $a_{deb} = c \times b + a_{fin}$. Pour le démontrer, (c'est un peu comme une récurrence), il suffit de vérifier que l'égalité est vraie avant le début du tant que, et qu'à chaque passage de boucle, l'égalité $a_{deb} = c \times b + a_{fin}$ est un invariant (càd que si l'égalité est vraie au début du passage de la boucle, elle reste vraie à sa sortie). En effet, elle est vraie au tout début car $a_{deb} = a_{fin}$ et que $c=0$.

Si $a_{deb} = c \times b + a_{fin}$ au début du passage de boucle, alors à la fin du passage de boucle, a_{fin} prend la valeur $a_{fin} - b$ et c prend la valeur $c+1$, mais l'égalité reste vraie car $a_{deb} = (c+1) \times b + a_{fin} - b$.

Partie B

1. U correspond à $m=20$ donc $9m+5=185$ et la division euclidienne par 26 donne p=3 comme reste qui correspond à la lettre D.

2.

Variables : m,a,b,c entiers naturels
Initialisation : Demander la valeur de m
affecter à c la valeur 0 et à b la valeur de 26, à a la valeur 9m+5
traitement : tant que $a \geq b$
Affecter à c la valeur c+1
Affecter à a la valeur a-b
Sortie : Afficher c

Partie C

1. On voit que 3 convient car $9 \times 3 \equiv 27 \equiv 1[26]$.

Sinon, la méthode est de chercher un couple (u,v) tel que $9x-26y=1$ car $9x-26y=1 \Leftrightarrow 9x \equiv 1[26]$.

2 Il vaut mieux montrer les deux implications ici :

Si $9m+5 \equiv p[26]$ alors en multipliant membre à membre par 3, on obtient d'après 1), $m+15 \equiv 3p[26]$ d'où $m \equiv 3p-15[26]$.

Réciproque : si $m \equiv 3p - 15[26]$ alors en multipliant par 9 membre à membre on obtient $9m \equiv 27p - 135[26]$ mais comme $27 \equiv 1[26]$ et que $135 \equiv 5[26]$ puisque $135 = 26 \times 5 + 5$, on obtient alors $9m + 5 \equiv p[26]$.

3. B correspond à $p = 1$ donc d'après ce qui précède, $m \equiv 3 \times 1 - 15 \equiv -12 \equiv 14[26]$ donc $p = 14$ qui correspond à la lettre O.

3. Exercice 3 (5 points)

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Une boulangerie industrielle utilise une machine pour fabriquer des pains de campagne pesant en moyenne 400 grammes. Pour être vendus aux clients, ces pains doivent peser au moins 385 grammes.

Un pain dont la masse est strictement inférieure à 385 grammes est un pain non commercialisable,

un pain dont lamasse est supérieure ou égale à 385 grammes est commercialisable.

La masse d'un pain fabriqué par la machine peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi normale d'espérance $\mu = 400$ et d'écart-type $\sigma = 11$.

Les probabilités seront arrondies au millième le plus proche.

Partie A

On pourra utiliser le tableau suivant dans lequel les valeurs sont arrondies au millième le plus proche.

x	380	385	390	395	400	405	410	415	420
$\mathbb{P}(X \leq x)$	0,035	0,086	0,182	0,325	0,5	0,675	0,818	0,914	0,965

1. Calculer $\mathbb{P}(390 \leq X \leq 410)$.

2. Calculer la probabilité p qu'un pain choisi au hasard dans la production soit commercialisable.

3. Le fabricant trouve cette probabilité p trop faible. Il décide de modifier ses méthodes de production afin de faire varier la valeur de σ sans modifier celle de μ.

Pour quelle valeur de σ la probabilité qu'un pain soit commercialisable est-elle égale à 96 % ? On arrondira le résultat au dixième.

On pourra utiliser le résultat suivant : lorsque Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance 0 et d'écart-type 1, on a $\mathbb{P}(Z \leq -1{,}751) \approx 0{,}040$.

Partie B

Les méthodes de production ont été modifiées dans le but d'obtenir 96 % de pains commercialisables.

Afin d'évaluer l'efficacité de ces modifications, on effectue un contrôle qualité sur un échantillon de 300 pains fabriqués.

1. Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de pains commercialisables dans un échantillon de taille 300.

2. Parmi les 300 pains de l'échantillon, 283 sont commercialisables.

Au regard de l'intervalle de fluctuation obtenu à la question 1, peut-on décider que l'objectif a été atteint ?

Partie C

Le boulanger utilise une balance électronique. Le temps de fonctionnement sans dérèglement, en jours, de cette balance électronique est une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. On sait que la probabilité que la balance électronique ne se dérègle pas avant 30 jours est de 0,913. En déduire la valeur de λ arrondie au millième.

Dans toute la suite on prendra $\lambda = 0{,}003$.

2. Quelle est la probabilité que la balance électronique fonctionne encore sans dérèglement après 90 jours, sachant qu'elle a fonctionné sans dérèglement 60 jours ?

3. Le vendeur de cette balance électronique a assuré au boulanger qu'il y avait une chance sur deux pour que la balance ne se dérègle pas avant un an. A-t-il raison ? Si non, pour combien de jours est-ce vrai ?

Correction

Partie A : 1. $P(390 \le X \le 410) = P(X \le 410) - P(X \le 390) \approx 0{,}818 - 0{,}182 \approx 0{,}636$.

2. On demande ici $P(X \ge 385) = 1 - P(X \le 385) \approx 1 - 0{,}086 \approx 0{,}914$.

3. On cherche donc σ tel que $P(X \ge 385) = 0{,}96$ $P\left(\dfrac{X-\mu}{\sigma} \le \dfrac{385-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}96 \Rightarrow P\left(Z \le \dfrac{385-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}96$ où $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi N(0 ;1). Or l'indication nous révèle que $P(Z \le -1{,}751) \approx 1 - 0{,}040 \approx 0{,}96$ donc $\dfrac{385-\mu}{\sigma} \approx -1{,}751$. Puisque $\mu = 400$ on obtient $\sigma \approx 8{,}567$ grammes.

Partie B

1. Ici $p = 0{,}96$ et $n = 300$ donc $\left[p - \dfrac{1{,}96\sqrt{pq}}{\sqrt{n}} \;; p + \dfrac{1{,}96\sqrt{pq}}{\sqrt{n}}\right] \approx [0{,}938;0{,}982]$.

2. Dans cet échantillon, la fréquence des pains commercialisables est $f = \dfrac{283}{300} \approx 0{,}943$, et cette fréquence appartient à l'intervalle de fluctuation, donc on peut décider (avec un risque de 5%) que l'objectif est atteint.

Partie C

1. On sait que $P(T \ge 30) = 0{,}913$ donc $e^{-30\lambda} = 0{,}913$ donc $-30\lambda = \ln 0{,}913$ d'où $\lambda = -\dfrac{\ln 0{,}913}{30} \approx 0{,}003$.

2. On demande ici $P_{T\ge 60}(T \ge 90)$, or la loi exponentielle est sans vieillissement donc elle vaut $P(T \ge 30) \approx 0{,}913$ d'après la question précédente.

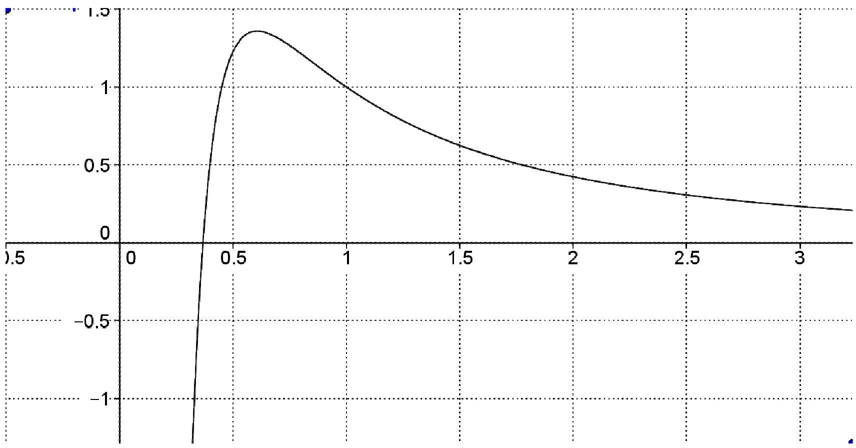
3. On calcule $P(T \ge 365) = e^{-365\times 0{,}003} \approx 0{,}335$. Cette probabilité, tout comme $P(T \ge 366)$ n'est pas égale à 1/2 donc le vendeur a tort.

Sinon, on nous demande ici de trouver la demi-vie t :

$P(T \ge t) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - e^{-t\lambda} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} = e^{-t\lambda} \Leftrightarrow \ln\dfrac{1}{2} = -t\lambda \Leftrightarrow -\ln 2 = -t\lambda \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$ soit environ 231 jours.

4. Exercice 4 (5 points)

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x^2}$ et soit C la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère du plan. La courbe C est donnée ci-dessous.



1. a. Étudier la limite de *f* en 0.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

c. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

b. Résoudre sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln x>0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

c. Dresser le tableau des variations de la fonction *f*.

3. a. Démontrer que la courbe C a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4. Pour tout entier $n > 1$, on note I_n l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations respectives $x=\dfrac{1}{e}$ et $x=n$.

a. Démontrer que $0\le I_2\le e-\dfrac{1}{2}$.

On admet que la fonction *F*, définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{-2-\ln x}{x}$, est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

b. Calculer I_n en fonction de *n*.

c. Étudier la limite de I_n en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Correction

1. a. Vu l'ensemble de définition, la limite est à faire seulement en 0^+ ($x > 0$) : or $1+\ln x$ tend vers $-\infty$ et x^2 tend vers 0^+ donc par quotient f tend vers $-\infty$.

b. C'est une limite de cours, par croissance comparée $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}\times\dfrac{\ln x}{x}$ qui tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ puisque $\dfrac{1}{x^2}$, $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{\ln x}{x}$ tendent vers 0.

c. La limite obtenue en 1. a. donne une asymptote verticale d'équation $x=0$ et celle du 1.b. donne une asymptote horizontale d'équation $y=0$.

2. a. f est dérivable sur son ensemble de définition comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-(1+\ln x)\times(2x)}{x^4}=\dfrac{x-2x-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{-x-2x\ln x}{x^4}=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

b. L'inéquation n'est définie que si $x>0$: $-1-2\ln x>0\Leftrightarrow-\dfrac{1}{2}>\ln x\Leftrightarrow e^{-1/2}>x$ d'où $S=]0;e^{-1/2}[$.

Puisque sur $]0;+\infty[$, $x^3>0$, $f'(x)$ est du signe de $-1-2\ln x$ donc d'après ce qui précède :

f' s'annule en $e^{-1/2}$, $f'>0$ sur $]0;e^{-1/2}[$ et $f'<0$ sur $]e^{-1/2};+\infty[$.

c. $f\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1+\ln\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)}{\left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}=\dfrac{1-\frac{1}{2}}{e^{-1}}=\dfrac{1}{2}e=\dfrac{e}{2}$

x	0		$e^{-1/2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

3. a. Il suffit de résoudre $f(x)=0 \Leftrightarrow 1+\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$ ce qui prouve qu'il y a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, il a pour coordonnées $(\frac{1}{e};0)$.

b. D'après les variations de f et la question précédente, $f(x)>0$ pour tout $x>\frac{1}{e}$, $f(x)<0$ pour tout x, tel que $0<x<\frac{1}{e}$ et $f(x)=0$ pour $x=\frac{1}{e}$.

4. a. D'après 3b), sur $[\frac{1}{e};2[$, f est positive donc par intégration $\int_{1/e}^{2} f(x)\,dx \geq 0$.

D'autre part, d'après 2.c. sur $[\frac{1}{e};2[$, $f(x)\leq \frac{e}{2}$ donc par intégration, $\int_{1/e}^{2} f(x)\,dx \leq \int_{1/e}^{2} \frac{e}{2}\,dx$. Or $\int_{1/e}^{2} \frac{e}{2}\,dx = \frac{e}{2}\times\left(2-\frac{1}{e}\right)=e-\frac{1}{2}$ d'où le résultat : $0\leq I_2 \leq e-\frac{1}{2}$.

b. $I_n=\int_{1/e}^{n} f(x)\,dx=[F(x)]_{1/e}^{n}=F(n)-F\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{-2-\ln n}{n}-\frac{-2-\ln e^{-1}}{e^{-1}}=\frac{-2-\ln n}{n}-\frac{-2+1}{e^{-1}}=-\frac{2}{n}-\frac{\ln n}{n}+e.$

c. Quand n tend vers $+\infty$, $-\frac{2}{n}$ et $\frac{\ln n}{n}$ tendent vers 0 donc I_n tend vers $e\approx 2{,}7$. Cela signifie puisque f est positive sur $[\frac{1}{e};+\infty[$ d'après 3b, l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe et la droite d'équation $x=\frac{1}{e}$ vaut e unités d'aire.