Amérique du Sud

1. Exercice 1 (6 points)

Partie A

1. Restitution organisée de connaissance

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

On suppose connus les résultats suivants :

- la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;

- $e^0=1$;

- pour tout réel x, on a $e^x>x$.

- soient deux fonctions v et w définies sur l'intervalle $[A;+\infty[$, où A est un réel positif. Si pour tout x de $[A;+\infty[$, $v(x)\le w(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}v(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}w(x)=+\infty$.

a. Soit φ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\varphi(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2$. Montrer que pour tout x de $[0;+\infty[$, $\varphi(x)\ge 1$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$.

a. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations sur $[0;+\infty[$.

Partie B

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang.

On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures ($t>0$).

On constate expérimentalement que la fonction g est solution de l'équation différentielle (E) : $y'+\dfrac{1}{2}y=\dfrac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. On considère l'équation différentielle (E') : $y'+\dfrac{1}{2}y=0$.

a. Déterminer le réel a pour que la fonction u définie par l'équation $u(t)=ate^{-\frac{1}{2}t}$ soit solution de l'équation (E).

b. Montrer qu'une fonction v est solution de l'équation (E) si, et seulement si, la fonction $h=v-u$ est solution de l'équation (E').

c. Résoudre l'équation (E').

d. En déduire les solutions de l'équation (E).

2. On suppose qu'à l'instant $t=0$, la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle.

Montrer que la solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie cette condition initiale est la fonction f étudiée dans la partie A.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Affecter la valeur 3 à la variable n.
Traitement	Tant que $f(n) > 0{,}1$ incrémenter la variable n de 1. Fin Tant que
Sortie	Afficher la valeur de n.

où f est la fonction étudiée dans la partie A.

a. À l'aide de la question 2. a. de la partie A, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.

b. Quelle est la valeur n_0 de la variable n obtenue à la sortie de l'algorithme ?

c. L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à 8 h. À quelle question cet algorithme permettrait-il de répondre ?

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe estmuni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 2 cm). On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 1$.

On considère la transformation f qui à tout point M du plan d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{2iz}{z-i}$.

On fera une figure que l'on complètera au fur et àmesure.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par la transformation f.

2. Déterminer, sous forme algébrique, les affixes des points B' et C', images respectives des points B et C par f.

3. a. Montrer que, pour tout point M distinct de A, l'affixe z' de M' vérifie l'égalité $z' - 2i = \dfrac{-2}{z-i}$.

b. En déduire que si le point M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon 1, alors son image M' appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

c. Exprimer une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{BM'}\right)$ en fonction d'une mesure de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)$.

d. On considère le point D d'affixe $z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$. Vérifier que D appartient au cercle Γ .

Construire, à la règle et au compas, le point D et son image D' par f.

4. On note G l'isobarycentre des points O, B et C.

a. Déterminer l'affixe du point G.

b. On admet que l'image G' du point G a pour affixe $z_{G'} = -3 - i$.

Le point G' est-il l'isobarycentre des points O, B' et C' ?

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que AB = L et AD = 1 ($L > 1$).

Sur les segments [AB] et [CD], on place respectivement les points F et E tels que AFED soit un carré.

On suppose qu'il existe une similitude directe f de rapport k telle que : f(A) = B, f(B) = C, f(C) = E.

Partie A

1. En utilisant des rapports de longueurs, montrer que $L = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude f. On appelle Ω le centre de la similitude f.

b. Déterminer l'image par la composée $f \circ f$ des points Ω , A et B.

c. Quelle est la nature de la transformation $f \circ f$? Préciser ses éléments caractéristiques.

d. En déduire que Ω est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).

3. a. Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude f.

b. En déduire une construction du point E', image du point E par la similitude f.

Partie B

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{A} ; \overrightarrow{\mathrm{AF}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}} \right)$.

On appelle z l'affixe du point M, et z' l'affixe du point M', image du point M par f.

1. Montrer que $z' = \frac{\sqrt{5}-1}{2} iz + \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

2. Déterminer l'image du point D par f.

4. Exercice 3 (4 points)

Au cours d'une séance, un joueur de tennis s'entraîne à faire des services.

Pour tout entier naturel non nul, on note R_n l'évènement « le joueur réussit le n-ième service » et $\overline{R_n}$ l'évènement contraire.

Soit x_n la probabilité de R_n et y_n celle de $\overline{R_n}$.

La probabilité qu'il réussisse le premier service est égale à 0,7.

On suppose de plus que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- si le joueur réussit le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,8 ;
- si le joueur ne réussit pas le n-ième service, alors la probabilité qu'il réussisse le suivant vaut 0,7.

1. On s'intéresse aux deux premiers services de l'entraînement.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de services réussis sur ces deux premiers services.

a. Déterminer la loi de probabilité de X. (On pourra utiliser un arbre de probabilité)

b. Calculer l'espérance mathématique $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire X.

2. On s'intéresse maintenant au cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}_{R_n}(R_{n+1})$ et $\mathbb{P}_{\overline{R_n}}(R_{n+1})$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $x_{n+1} = 0,1 x_n + 0,7$.

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par $u_n = x_n - \frac{7}{9}$.

a. Déterminer la nature de la suite (u_n).

b. En déduire la limite de la suite (x_n).

5. Exercice 4 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit P le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z - 1 = 0$ et soit S le point de coordonnées (1 ; 3 ; 5).

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie. ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1. Les points d'intersection du plan P avec les trois axes du repère sont les sommets d'un triangle isocèle.

2. La droite D_1 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 5 - 4t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 2t \end{cases}$, est incluse dans le plan P.

3. La droite D_2 de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -t' \\ y = 7 + 4t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 7 + 2t' \end{cases}$ est la droite parallèle à la droite D_1 passant par le point S.

4. Le projeté orthogonal du point S sur le plan P a pour coordonnées $\left(-\frac{6}{7} ; \frac{55}{14} ; \frac{31}{14} \right)$.

5. Le plan P coupe la sphère de centre S et de rayon 3.