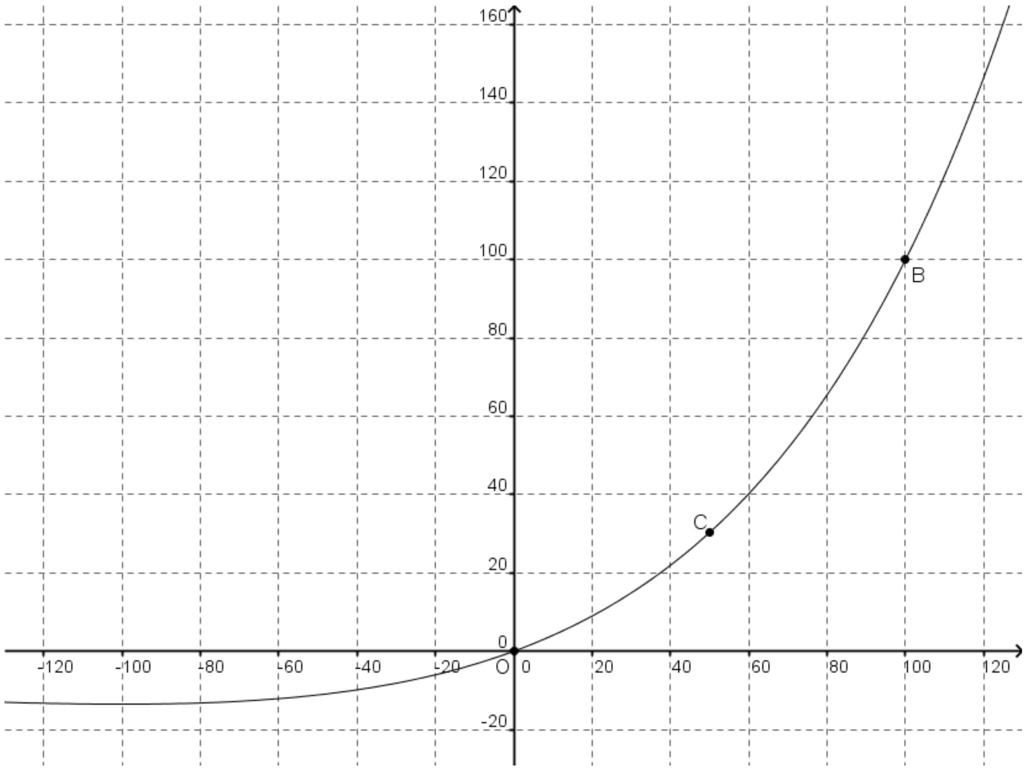
Polynésie

1. Exercice 1 (5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points B(100 ; 100) et $C\left(50\,;\dfrac{50}{\sqrt{e}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée (C) , est donnée ci-dessous.



On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

* pour tout x réel, $f(x) = xe^{ax+b}$;

* les points B et C appartiennent à la courbe (C).

1. a. Montrer que le couple (a, b) est solution du système : $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

b. En déduire que pour tout x réel, $f(x) = xe^{0,01x-1}$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

3. a. Montrer que pour tout x réel $f(x) = \dfrac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$.

b. En déduire la limite de f en $-\infty$.

4. Étudier les variations de la fonction f. On donnera le tableau de variations complet.

5. Étudier la position relative de la courbe (C) et de la droite (D).

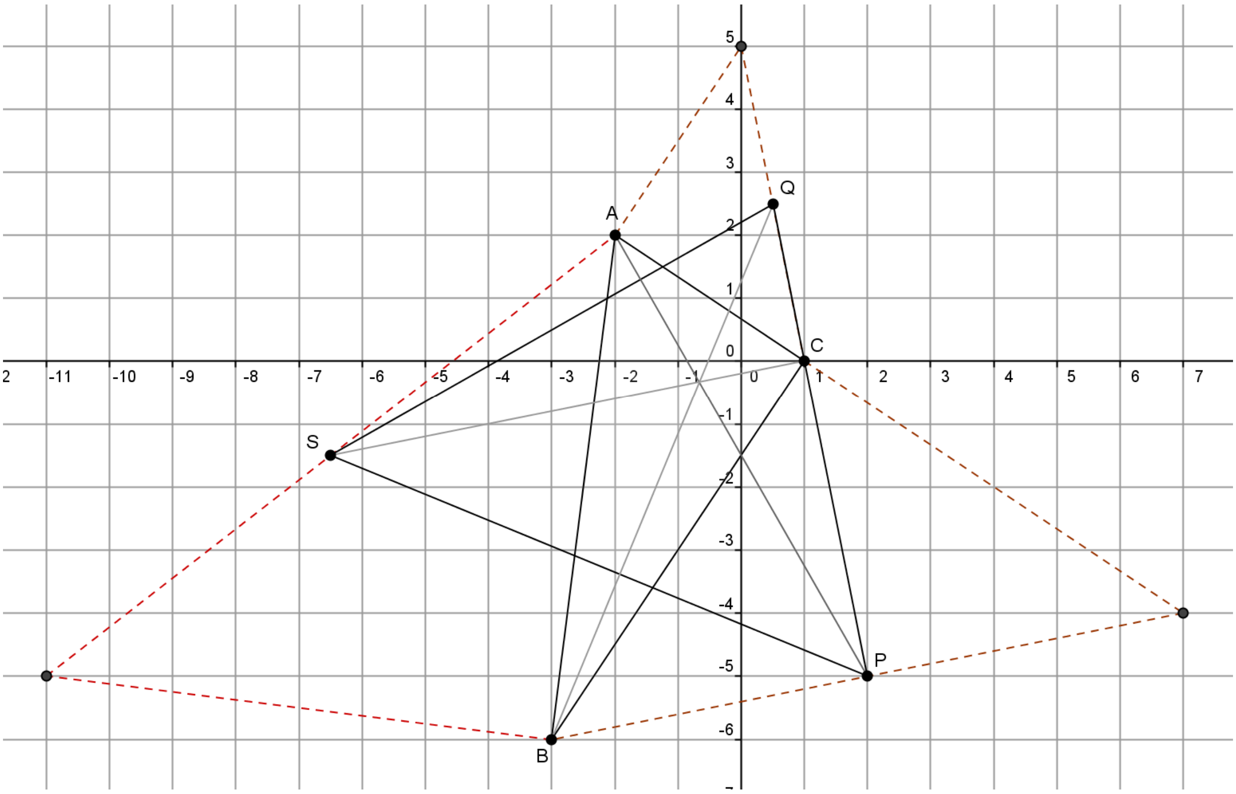
6. a. Calculer à l'aide d'une intégration par parties l'intégrale $\int_0^{100} f(t)\,dt$.

b. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 100$, la droite (D) et la courbe (C). Calculer $\mathcal{A}$.

2. *Exercice 2 (5 points)*

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2 + 2i$, $b = -3 - 6i$ et $c = 1$.

La figure de l'exercice est donnée ci-dessous. Elle peut servir à émettre des conjectures ou à vérifier des résultats.



1. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. a. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. En déduire l'affixe du point A' image de A par r.

c. Vérifier que l'affixe s du point S milieu de [AA'] est $s = -\frac{13}{2} - \frac{3}{2}i$.

d. Démontrer que le point S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3. On construit de la même manière C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Q le milieu de [CC'], B' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et P le milieu de [BB'].

On admet que les affixes respectives de Q et de P sont $q = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$ et $p = 2 - 5i$.

a. Démontrer que $\frac{s-q}{p-a} = -i$.

b. En déduire que les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et que les segments [AP] et [QS] sont de même longueur.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même infructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Démontrer que les droites (AP), (BQ) et (CS) sont concourantes.

3. Exercice 3 (5 points, non spécialistes)

Partie A

On considère l'algorithme suivant : les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N.

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul N
Traitement	Affecter à U la valeur 0 Pour k allant de 0 à N – 1 Affecter à U la valeur 3U – 2k + 3 Fin pour
Sortie	Afficher U

Quel est l'affichage en sortie lorsque N = 3 ?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

a. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?

b. On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0.

Justifier que $n_0 \leq 3p$.

c. Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

d. Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

On désigne par x un réel appartenant à l'intervalle [0 ; 80].

Une urne contient 100 petits cubes en bois dont 60 sont bleus et les autres rouges.

Parmi les cubes bleus, 40 % ont leurs faces marquées d'un cercle, 20 % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Parmi les cubes rouges, 20 % ont leurs faces marquées d'un cercle, x % ont leurs faces marquées d'un losange et les autres ont leurs faces marquées d'une étoile.

Partie A : expérience 1

On tire au hasard un cube de l'urne.

1. Démontrer que la probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à $0,12 + 0,004x$.

2. Déterminer x pour que la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange soit égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

3. Déterminer x pour que les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » soient indépendants.

4. On suppose dans cette question que $x = 50$.

Calculer la probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange.

Partie B : expérience 2

On tire au hasard simultanément 3 cubes de l'urne.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins un cube rouge ?
2. Quelle est la probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur ?
3. Quelle est la probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle ?

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Partie A

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (13, 3) est solution de cette équation.
2. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

On rappelle le petit théorème de Fermat : si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors a^{p-1} est congru à 1 modulo p, ce que l'on note $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

1. Soit x un entier naturel.

Démontrer que si $x \equiv a[7]$ et $x \equiv a[19]$ alors $x \equiv a[133]$.

2. a. On suppose que a n'est pas un multiple de 7.

Démontrer que $a^6 \equiv 1[7]$ puis que $a^{108} \equiv 1[7]$. En déduire que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.

b. On suppose que a est un multiple de 7. Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[7]$.

c. On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[19]$. Démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a[133]$.

Partie C

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \le a \le 26$.

Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.

La phase de codage consiste à associer à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r[133]$ avec $0 \le r < 133$.

La phase de décodage consiste à associer à r, l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1[133]$ avec $0 \le r_1 < 133$.

1. Justifier que $r_1 \equiv a[133]$.
2. Un message codé conduit à la suite des 2 entiers suivants : 128 et 59. Décoder ce message.