France métropolitaine

1. Exercice 1 (4 points)

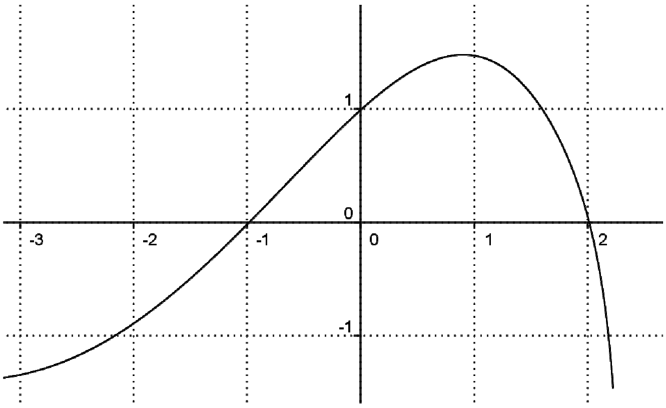
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 2]$.

On dispose des informations suivantes :

* $f(0) = -1$.

* la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative C ci -dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; -1]$, $f'(x) \leq 0$.

2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 ; 2]$.

3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 ; 2]$, $f(x) \geq -1$.

4. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

La tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées (1 ; 0).

2. Exercice 2 (5 points)

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante : le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier ; 40 %des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

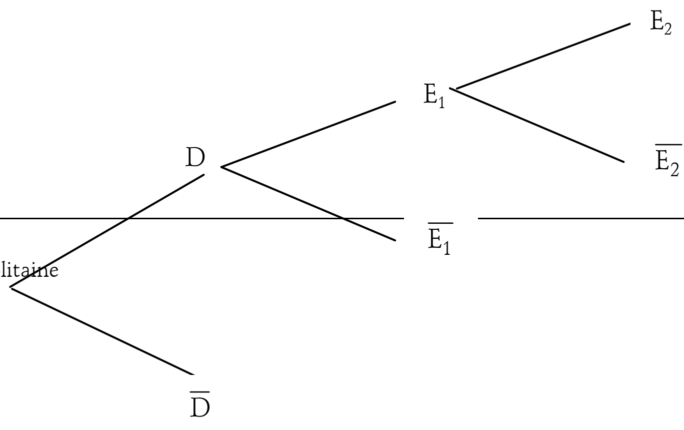
On considère les évènements suivants :

– D : « Le candidat est retenu sur dossier »,

– E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,

– E_2 : « Le candidat est recruté ».

a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

c. On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».

Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres.

On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

a. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

3. *Exercice 3 (6 points)*

Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.

Partie A

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}+\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1\,;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{1}{x(x+1)^2}$.

Dresser le tableau de variation de la fonction f. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par $u_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation	Affecter à u la valeur 0
Traitement	Pour i variant de 1 à n Affecter à u la valeur $u+\dfrac{1}{i}$
Sortie	Afficher u

Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n.

3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à 10^{-3}.

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$ et son éventuelle convergence.

Partie C

Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite $\left(u_n\right)$ telle que pour tout entier strictement positif n, $u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$.

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n, $u_{n+1}-u_n = f\left(n\right)$ où f est la fonction définie dans la partie A. En déduire le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.

2. a. Soit k un entier strictement positif. Justifier l'inégalité $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx \geq 0$.

En déduire que $\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx \leq \frac{1}{k}$. Démontrer l'inégalité $\ln\left(k+1\right)-\ln\left(k\right) \leq \frac{1}{k}$ (**1**).

b. Écrire l'inégalité (**1**) en remplaçant successivement k par 1, 2, . . . , n et démontrer que pour tout entier strictement positif n, $\ln\left(n+1\right) \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$.

c. En déduire que pour tout entier strictement positif n, $u_n > 0$.

3. Prouver que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de –1, fait correspondre le point M' d'affixe $\frac{1}{z+1}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x=-\frac{1}{2}$.

1. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -\frac{1}{2}$, $z_{\text{B}} = -\frac{1}{2}+i$ et $z_{\text{C}} = -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$.

a. Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.

b. Calculer les affixes des points A' = f(A), B' = f(B) et C' = f(C) et placer les points A', B'et C' sur la figure.

c. Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $z+1$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Sans donner d'explication, placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g de A, B et C et tracer la droite $\mathcal{D}_1$, image de la droite $\mathcal{D}$ par g.

c. Démontrer que $\mathcal{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-1|=|z|$.

3. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\frac{1}{z}$.

a. Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a : $\left|\frac{1}{z}-1\right|=1 \Leftrightarrow |z-1|=|z|$.

c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure. On admet que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est le cercle $\mathcal{C}$ privé de O.

4. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1 + i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 1 + 3i$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x + 2$.

1. Prouver que les points A, B et C appartiennent à la droite $\mathcal{D}$.

Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points A, B, C et tracer la droite $\mathcal{D}$.

2. Résoudre l'équation $(1+i)z+3-i=0$ et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$.

Dans la suite de l'exercice, on appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z différente de $-1 + 2i$, fait correspondre le point M' d'affixe $\frac{1}{(1+i)z+3-i}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathcal{D}$.

3. Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $z_1=(1+i)z+3-i$.

a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation g.

b. Calculer les affixes des points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g des points A, B et C.

c. Déterminer l'image $\mathcal{D}_1$ de la droite $\mathcal{D}$ par la transformation g et la tracer sur la figure.

4. Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, fait correspondre le point M_2 d'affixe $\frac{1}{z}$.

a. Déterminer les affixes des points $h(A_1)$, $h(B_1)$ et $h(C_1)$ et placer ces points sur la figure.

b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a : $\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2} \Leftrightarrow |z-2|=|z|$.

c. En déduire que l'image par h de la droite $\mathcal{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.

d. Démontrer que tout point du cercle $\mathcal{C}$ qui est distinct de O est l'image par h d'un point de la droite $\mathcal{D}_1$.

5. Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathcal{D}$.