

Asie**1. Exercice 1 (5 points)**

Les cinq questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Une réponse correcte et justifiée rapporte 1 point.

1. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite D dont on donne une représentation paramétrique, et le plan P dont on donne une équation cartésienne :

$$D: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = t \\ z = -5 - 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } P: 3x + 2y - z - 5 = 0.$$

Affirmation 1 : la droite D est strictement parallèle au plan P.

2. Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A(1 ; 9 ; 0) et le plan P d'équation cartésienne : $4x - y - z + 3 = 0$.

Affirmation 2 : la distance du point A au plan P est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Soit la fonction f définie pour tout réel x par : $f(x) = \frac{3}{1 + e^{-2x}}$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan.

Affirmation 3 : la courbe \mathcal{C} admet deux asymptotes parallèles à l'axe des abscisses.

4. Pour tout réel x , on pose $F(x) = \int_1^x (2-t)e^{-t} dt$.

Affirmation 4 : $F(x)$ est négatif ou nul quelle que soit la valeur du réel x supérieur à 1.

5. On considère l'intégrale $I = \int_1^e t^2 \ln t dt$.

Affirmation 5 : la valeur exacte de l'intégrale I est : $\frac{2e^3 + 1}{9}$.

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

On considère le point A, d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le conjugué de z_A .

On note enfin B image du point A, par la rotation r et z_B l'affixe du point B.

1. a. Écrire le nombre complexe z_A sous forme exponentielle, puis placer les points A et A_1 , dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.

b. Vérifier que $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique. Placer alors le point B dans le même repère.

2. On considère le vecteur unitaire \vec{w} , tel que $(\vec{u}; \vec{w}) = \frac{\pi}{12}$, et la droite Δ passant par O et de vecteur directeur \vec{w} .

- a. Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
- b. Tracer la droite Δ , puis démontrer que Δ est la bissectrice de l'angle $(\overline{OA}; \overline{OB})$.

En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ .

3. On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$ et B' l'image de B_1 par la rotation r . Démontrer que $B' = A$.

4. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit C le point d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$ et D le symétrique de C par rapport à la droite Δ .

Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D.

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A - Détermination d'une similitude directe

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_B = -\sqrt{3} + i$.

1. a. Écrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
- b. Placer les points A et B dans le repère. On prendra 1 cm comme unité graphique.
2. a. Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe f de centre O qui transforme le point A en B.
- b. Préciser les éléments caractéristiques de la similitude f .

Partie B - Étude d'une transformation

Le but de cette partie est d'étudier la transformation $g = s \circ f$ où f désigne la similitude définie dans la partie A et s la réflexion d'axe $(O; \vec{u})$.

1. Soit M un point quelconque du plan. On désigne par M' l'image du point M par la transformation g .

On note z et z' les affixes respectives des points M et M' , et \bar{z} celle du conjugué de z .

- a. Démontrer l'égalité : $z' = e^{-\frac{i\pi}{6}} z$.
- b. On pose $C = g(A)$ et $D = g(B)$. Calculer les affixes respectives des points C et D, puis placer les points C et D sur la figure.
- c. Quelle est la nature du triangle OAC ?
- d. Démontrer que les vecteurs \overline{OA} et \overline{OD} sont colinéaires.

2. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer la nature de la transformation $g \circ g$ et préciser ses éléments géométriques.

4. Exercice 3 (5 points)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches. Ces $k + 3$ boules sont indiscernables au toucher.

Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k = 7$. Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1. Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes.

Démontrer que $p = 0,42$.

2. Soit n un entier tel que $n > 2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.

On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a. Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p .

b. Exprimer p_n en fonction de n , puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

c. Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99 %.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Un joueur joue une partie.

On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. a. Justifier l'égalité : $\mathbb{P}(Y_k = 5) = \frac{6k}{(k+3)^2}$.

b. Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k .

2. On note $\mathbb{E}(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k .

On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $\mathbb{E}(Y_k)$ est strictement positive.

Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

5. Exercice 4 (5 points)

1. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	Saisir un réel strictement positif non nul a Saisir un réel strictement positif non nul b ($b > a$) Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation	Affecter à u la valeur a Affecter à v la valeur b Affecter à n la valeur 0
Traitement	TANTQUE $n < N$ Affecter à n la valeur $n + 1$ Affecter à u la valeur $\frac{a+b}{2}$ Affecter à v la valeur $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ Affecter à a la valeur u Affecter à b la valeur v
Sortie	Afficher u , afficher v

Reproduire et compléter le tableau suivant, en faisant fonctionner cet algorithme pour

$$a = 4, b = 9 \text{ et } N = 2.$$

Les valeurs successives de u et v seront arrondies au millième.

n	a	b	u	v
0	4	9		
1				
2				

Dans la suite, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}}.$$

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 = \left(\frac{v_n - u_n}{2}\right)^2$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n \leq v_n$.

3. a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Comparer v_{n+1}^2 et v_n^2 . En déduire le sens de variation de la suite (v_n) .

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.