

## Antilles - Guyane

---

### 1. Exercice 1 (6 points)

---

Les parties B et C sont indépendantes.

On note  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels et on considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = xe^{x-1} + 1$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

#### Partie A : étude de la fonction

- Déterminer la limite de  $f$  en  $-\infty$ . Que peut-on en déduire pour la courbe  $\mathcal{C}$  ?
- Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
- On admet que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et on note  $f'$  sa fonction dérivée.

Montrer que, pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = (x+1)e^{x-1}$ .

- Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et dresser son tableau de variation sur  $\mathbb{R}$ .

#### Partie B : recherche d'une tangente particulière

Soit  $a$  un réel strictement positif. Le but de cette partie est de rechercher s'il existe une tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ , qui passe par l'origine du repère.

- On appelle  $T_a$  la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $a$ . Donner une équation de  $T_a$ .
- Démontrer qu'une tangente à  $\mathcal{C}$  en un point d'abscisse  $a$  strictement positive passe par l'origine du repère si et seulement si  $a$  vérifie l'égalité  $1 - a^2 e^{a-1} = 0$ .
- Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que 1 est l'unique solution sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  de l'équation  $1 - x^2 e^{x-1} = 0$ .

- Donner alors une équation de la tangente recherchée.

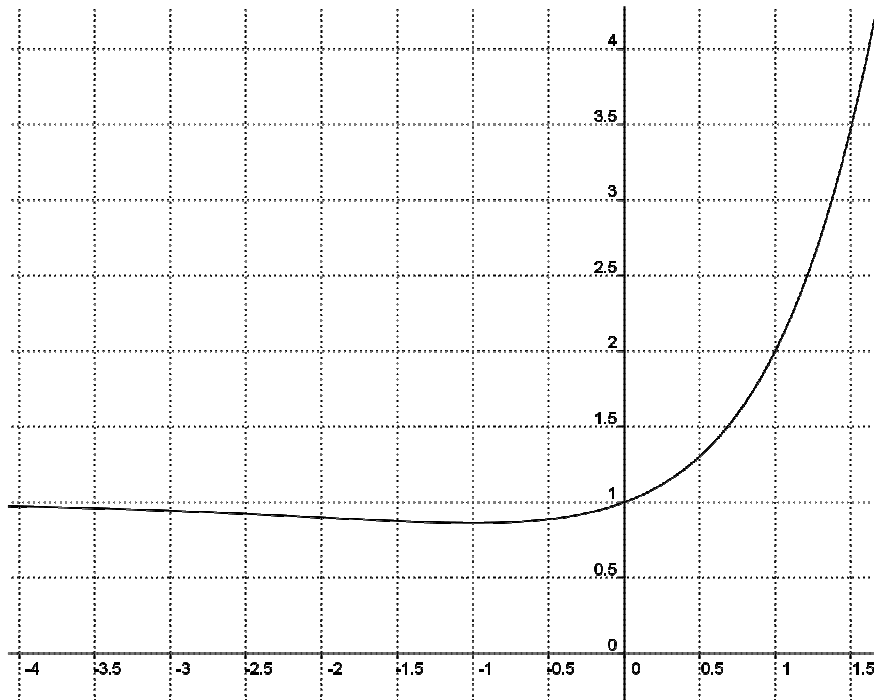
#### Partie C : calcul d'aire

Le graphique donné ci-dessous représente la courbe  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

- Construire sur ce graphique la droite  $\Delta$  d'équation  $y = 2x$ . On admet que la courbe  $\mathcal{C}$  est au-dessus de la droite  $\Delta$ . Hachurer le domaine D limité par la courbe  $\mathcal{C}$ , la droite  $\Delta$ , la droite d'équation  $(x = 1)$  et l'axe des ordonnées.

- On pose  $I = \int_0^1 xe^{x-1} dx$ . Montrer à l'aide d'une intégration par parties que  $I = \frac{1}{e}$ .

- En déduire la valeur exacte (en unités d'aire) de l'aire du domaine D.



### 2. Exercice 2 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

On réalisera sur une feuille de papier millimétré une figure en prenant pour unité 2 cm. On complètera cette figure au fur et à mesure des questions.

On considère les points A, B et C du plan complexe d'affixes respectives  $a = -1 + 2i$ ,  $b = -2 - i$ ,  $c = -3 + i$ .

1. Placer les points A, B et C sur le graphique.

2. Calculer  $\frac{b}{a}$ . En déduire la nature du triangle OAB.

3. On considère l'application  $f$  qui à tout point M d'affixe  $z$  avec  $z \neq b$ , associe le point M' d'affixe  $z'$  définie par :  $z' = \frac{z + 1 - 2i}{z + 2 + i}$ .

a. Calculer l'affixe  $c'$  du point C', image de C par  $f$  et placer le point C' sur la figure.

b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe  $z$  avec  $z \neq b$ , tels que  $|z'| = 1$ .

c. Justifier que E contient les points O et C. Tracer E.

4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète sera prise en compte dans l'évaluation.

On appelle J l'image du point A par la rotation  $r$  de centre O et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ . On appelle K l'image du point

C par la rotation  $r'$  de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . On note L le milieu de [JK].

Démontrer que la médiane issue de O du triangle OJK est la hauteur issue de O du triangle OAC.

### 3. Exercice 3 (5 points)

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  non nul par  $u_1 = \frac{1}{2}$  et  $u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n$ .

1. Calculer  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$ .

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n$  est strictement positif.

b. Démontrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

c. Que peut-on en déduire pour la suite  $(u_n)$  ?

3. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $v_n = \frac{u_n}{n}$ .

a. Démontrer que la suite  $(v_n)$  est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme  $v_1$ .

b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n = \frac{n}{2^n}$ .

4. Soit la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = \ln x - x \ln 2$ .

a. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .

b. En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

#### 4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité. Les cinq questions sont indépendantes.

1. Dans un lycée donné, on sait que 55 % des élèves sont des filles. On sait également que 35 % des filles et 30 % des garçons déjeunent à la cantine.

On choisit, au hasard, un élève du lycée. Quelle est la probabilité que cet élève ne déjeune pas à la cantine ?

2. Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire 3 jetons simultanément. Combien de tirages différents peut-on faire contenant au moins un jeton à numéro pair ?

3. Une variable aléatoire  $Y$  suit une loi binomiale de paramètres 20 et  $\frac{1}{5}$ .

Calculer la probabilité que  $Y$  soit supérieure ou égale à 2. Donner une valeur approchée du résultat à  $10^{-3}$ .

4. Un appareil ménager peut présenter après sa fabrication deux défauts.

On appelle  $A$  l'évènement « l'appareil présente un défaut d'apparence » et  $F$  l'évènement « l'appareil présente un défaut de fonctionnement ».

On suppose que les évènements  $A$  et  $F$  sont indépendants.

On sait que la probabilité que l'appareil présente un défaut d'apparence est égale à 0,02 et que la probabilité que l'appareil présente au moins l'un des deux défauts est égale à 0,069.

On choisit au hasard un des appareils. Quelle est la probabilité que l'appareil présente le défaut  $F$  ?

5. On considère l'algorithme :

Entrée	A et C sont des entiers naturels
Calculs	C prend la valeur 0 Répéter 9 fois A prend une valeur aléatoire entière entre 1 et 7. Si $A > 5$ alors C prend la valeur de $C + 1$ Fin Si Fin répéter
Sortie	Afficher C.

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle  $X$  la variable aléatoire prenant la valeur  $C$  affichée. Quelle loi suit la variable  $X$  ? Préciser ses paramètres.

#### 5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Les quatre questions sont indépendantes.

1. a. Vérifier que le couple  $(4; 6)$  est une solution de l'équation (E)  $11x - 5y = 14$ .

b. Déterminer tous les couples d'entiers relatifs  $(x; y)$  vérifiant l'équation (E).

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2^{3n} \equiv 1 \pmod{7}$ .

b. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $2011^{2012}$  par 7.

3. On se place dans le plan complexe. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $f$  qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  tel que :

$$z' = \frac{3}{2}(1-i)z + 4 - 2i.$$

4. On considère l'algorithme suivant où  $\text{Ent}\left[\frac{A}{N}\right]$  désigne la partie entière de  $\frac{A}{N}$  (par exemple  $\text{Ent}\left[\frac{37}{5}\right] = \text{Ent}[7,4] = 7$ ).

Entrée	A et N sont des entiers naturels Saisir A
Calculs	N prend la valeur 1 Tant que $N \leq \sqrt{A}$ Si $\frac{A}{N} - \text{Ent}\left[\frac{A}{N}\right] = 0$ alors Afficher N et $\frac{A}{N}$ Fin si N prend la valeur $N + 1$ Fin Tant que.

Quels résultats affiche cet algorithme pour  $A = 12$  ?

Que donne cet algorithme dans le cas général ?