Pondichéry

1. Exercice 1 (6 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.

À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?

2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :

– « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50] ;

– l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$ Début du tant que $a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ; $c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ; $e :=$ rand(1, 50) Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :

$L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}$; $L_2 = \{8 ; 17 ; 41 ; 34 ; 6\}$; $L_3 = \{12 ; 17 ; 23 ; 17 ; 50\}$; $L_4 = \{45 ; 19 ; 43 ; 21 ; 18\}$?

b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants.

Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à 0,1.

4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :

– il a été contrôlé 5 fois exactement ;

– il n'a pas été contrôlé ;

– il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $\mathbb{P}(\mathrm{T}) = 0,05$.

On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».

Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100%, on sait que :

– si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97%des cas ;

– si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1% des cas.

1. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{D})$.

2. Un coureur a un contrôle positif.Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

2. Exercice 2 (4 points)

Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, on considère :

– les plans P et P' d'équations : P : $x-y-z-2=0$ et P' : ;

– la droite D ayant pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x=-3-2t \\ y=2t \\ z=1+2t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse. Une justification est attendue pour chaque réponse.

Proposition 1 : La droite D est orthogonale au plan P .

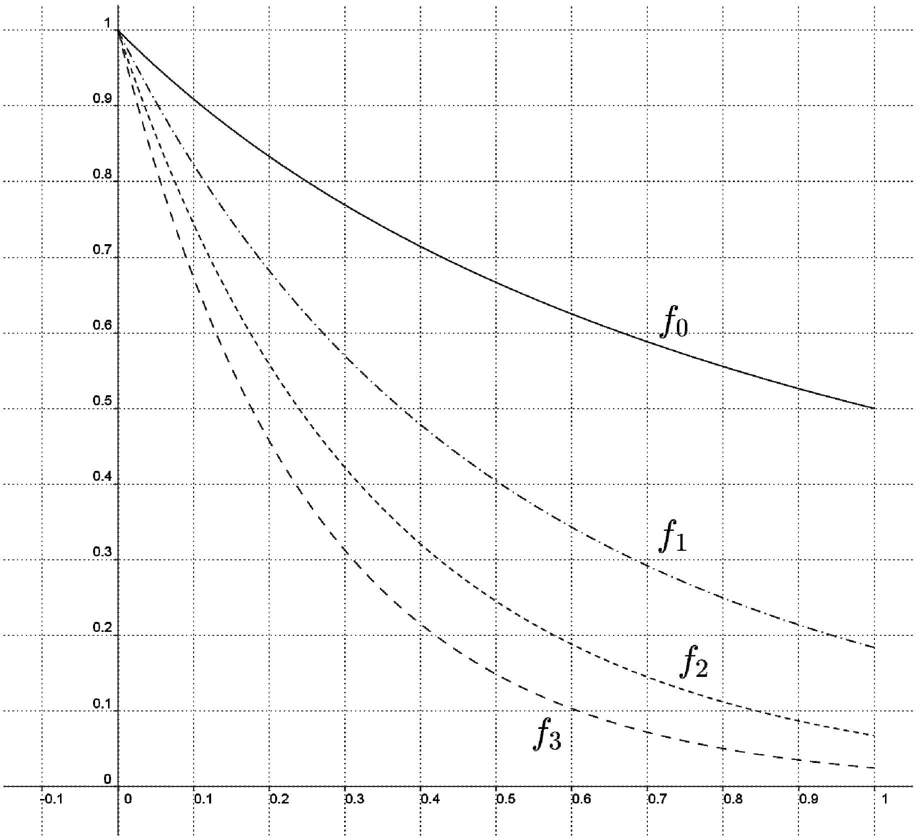
Proposition 2 : La sphère S de centre O et de rayon 2 est tangente au plan P .

Proposition 3 : L'intersection des plans P et P' est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$\begin{cases} x=1-t' \\ y=-1-2t',\ t'\in\mathbb{R} \\ z=t' \end{cases}$.

Proposition 4 : Les droites D et Δ sont coplanaires.

3. Exercice 3 (5 points)



On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par : $I_n=\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}dx$ et $J_n=\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}dx$.

1. Sont représentées ci-dessus les fonctions f_n définies sur l'intervalle [0 ; 1] par $f_n(x)=\dfrac{e^{-nx}}{1+x}$ pour différentes valeurs de n.

a. Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b. Démontrer cette conjecture.

2. a. Montrer que pour tout entier $n > 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 1] : $0 \leq \dfrac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \dfrac{e^{-nx}}{1+x}$.

b. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3. a. Montrer, en effectuant une intégration par parties, que pour tout entier $n > 1$: $I_n = \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{e^{-n}}{2}-J_n\right)$.

b. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

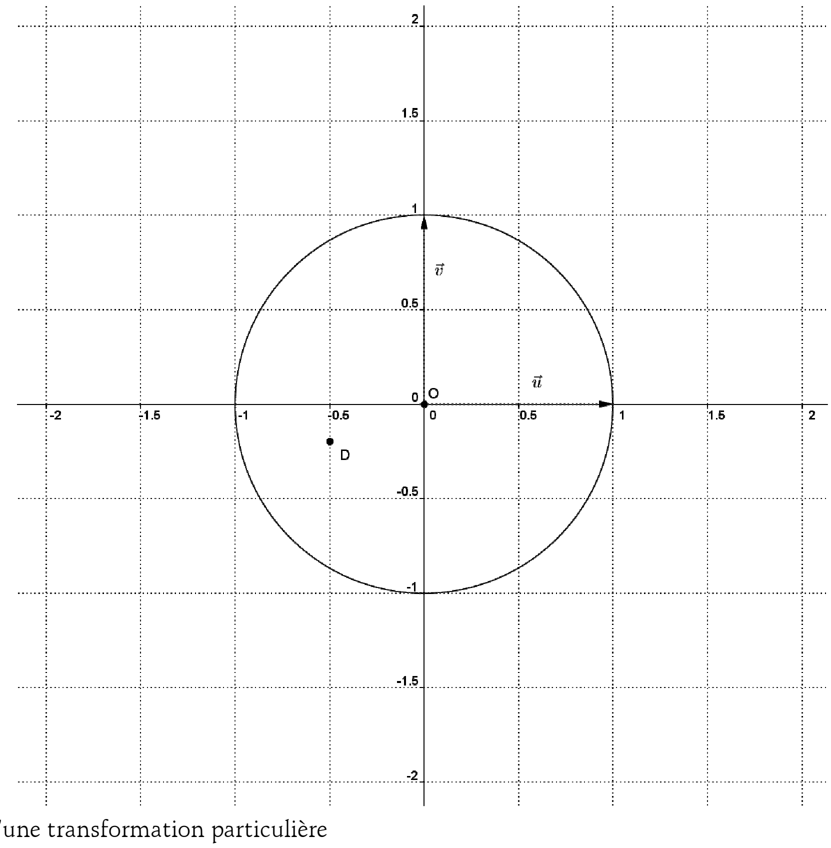
4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\bar{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est lemodule de z.

On admet l'égalité : $|z|^2 = z\bar{z}$.

Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$.



Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et –1.

Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \dfrac{1-z}{\bar{z}-1}$.

1. Soit C le point d'affixe $z_C = -2+i$.

a. Calculer l'affixe z'_C du point *C'* image de *C* par la transformation *f*, et placer les points *C* et *C'* dans le repère donné en annexe.

b. Montrer que le point *C'* appartient au cercle Γ de centre *O* et de rayon 1.

c. Montrer que les points *A*, *C* et *C'* sont alignés.

2. Déterminer et représenter sur la figure ci-dessous l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point *A* pour image par la transformation *f*.

3. Montrer que, pour tout point *M* distinct de *A*, le point *M'* appartient au cercle Γ.

4. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel. Que peut-on en déduire pour les points *A*, *M* et *M'* ?

5. On a placé un point *D* sur la figure. Construire son image *D'* par la transformation *f*.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Partie A : Restitution organisée de connaissance

Soit *a*, *b*, *c*, *d* des entiers relatifs et *n* un entier naturel non nul.

Montrer que si $a \equiv b\,[\text{mod } n]$ et $c \equiv d\,[\text{mod } n]$ alors $ac \equiv bd\,[\text{mod } n]$.

Partie B : Inverse de 23 modulo 26

On considère l'équation (E) : $23x - 26y = 1$, où *x* et *y* désignent deux entiers relatifs.

1. Vérifier que le couple (–9 ; –8) est solution de l'équation (E).

2. Résoudre alors l'équation (E).

3. En déduire un entier *a* tel que $0 \leq a \leq 25$ et $23a \equiv 1\,[\text{mod } 26]$.

Partie C : Chiffrement de Hill

On veut coder un mot de deux lettres selon la procédure suivante :

Étape 1 : Chaque lettre du mot est remplacée par un entier en utilisant le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On obtient un couple d'entiers $(x_1\,;x_2)$ où x_1 correspond à la première lettre du mot et x_2 correspond à la deuxième lettre du mot.

Étape 2 : $(x_1\,;x_2)$ est transformé en $(y_1\,;y_2)$ tel que : $(S_1)\begin{cases} y_1 = 11x_1 + 3x_2\,[\text{mod } 26] \\ y_2 = 7x_1 + 4x_2\,[\text{mod } 26] \end{cases}$ avec $0 \leq y_1 \leq 25$ et $0 \leq y_2 \leq 25$.

Étape 3 : $(y_1\,;y_2)$ est transformé en un mot de deux lettres en utilisant le tableau de correspondance donné dans l'étape 1.

Exemple : $\underbrace{\text{TE}}_{\textit{mot en clair}} \rightarrow (19\,;4) \rightarrow (13\,;19) \rightarrow \underbrace{\text{NT}}_{\textit{mot codé}}$.

1. Coder lemot ST.

2. On veut maintenant déterminer la procédure de décodage.

a. Montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système (S_1), vérifie les équations du système :

$$(S_2)\begin{cases} 23x_1 \equiv 4y_1 + 23y_2\,[\text{mod } 26] \\ 23x_2 \equiv 19y_1 + 11y_2\,[\text{mod } 26] \end{cases}.$$

b. À l'aide de la partie B, montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système (S_2), vérifie les équations du système (S_3) : $(S_3)\begin{cases} x_1 \equiv 16y_1 + y_2\,[\text{mod } 26] \\ x_2 \equiv 11y_1 + 5y_2\,[\text{mod } 26] \end{cases}$.

c. Montrer que tout couple $(x_1\,;x_2)$ vérifiant les équations du système (S_3), vérifie les équations du système (S_1).

d. Décoder lemot YJ.