Asie

1. Exercice 1 (5 points)

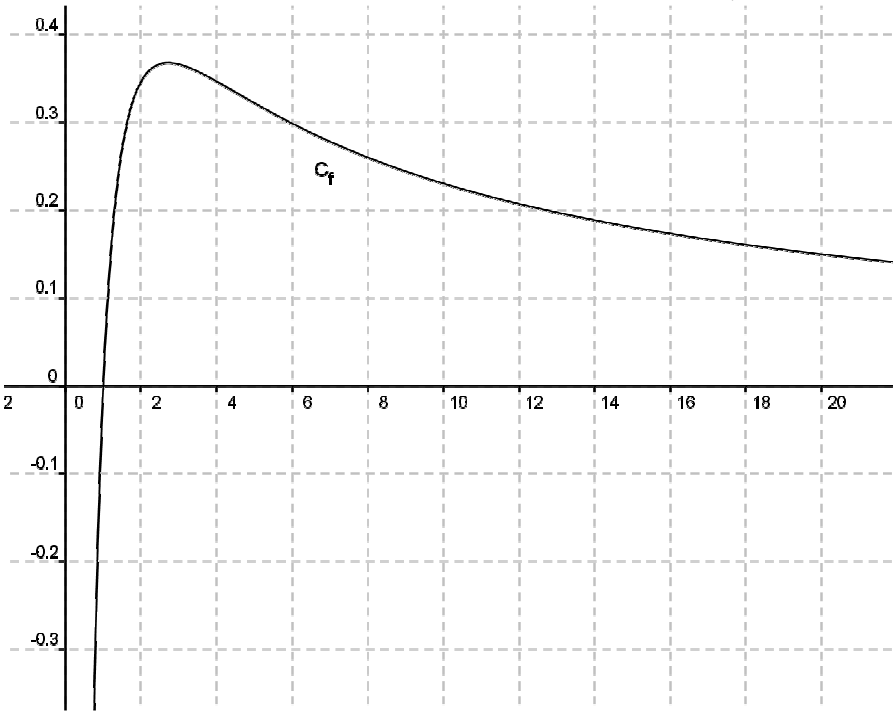
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère. La courbe C_f est représentée ci-dessous.



a. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f.

c. En déduire les variations de la fonction f.

2. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

a. Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x}=4\dfrac{\left(\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$.

b. Calculer la dérivée g' de la fonction g.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. a. Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

b. Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

c. Tracer sur le graphique la courbe C_g.

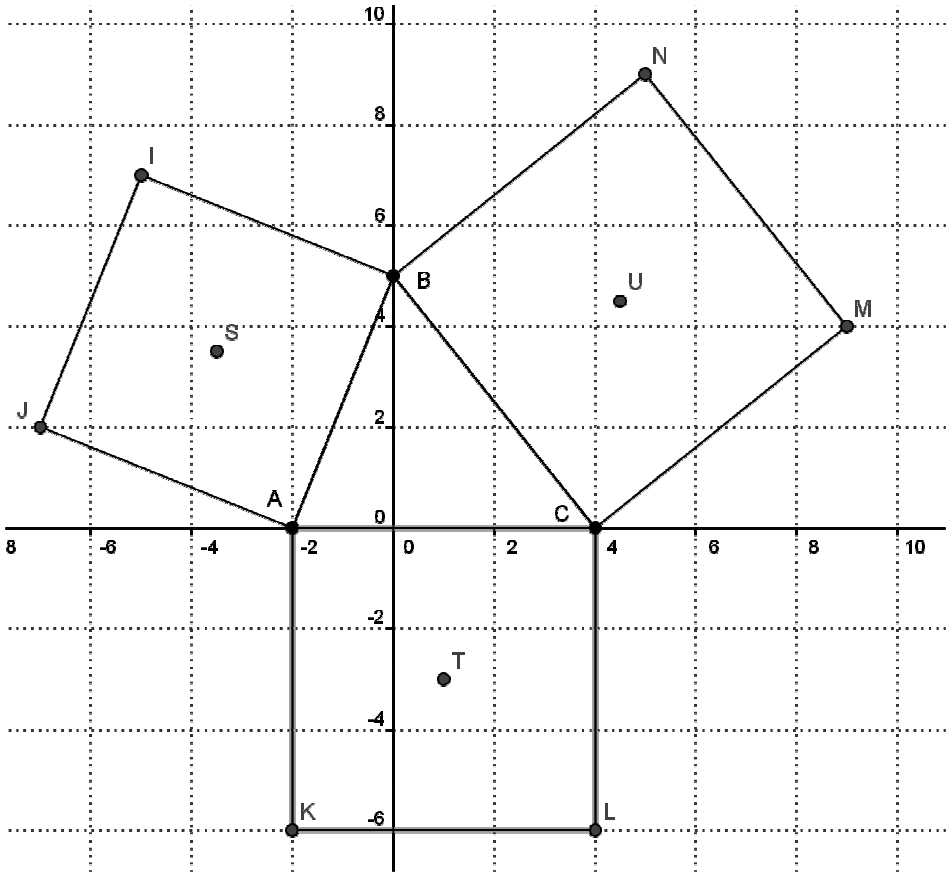
4. On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes C_f et C_g, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.

En exprimant l'aire A comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire A.

2. Exercice 2 (5 points)

Dans le plan complexe on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2$, $b = 5i$ et $c = 4$ ainsi que les carrés ABIJ, AKLC et BCMN, extérieurs au triangle ABC, de centres respectifs S, T et U.

La figure est donnée ci-dessous.



1. Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. En déduire que le point J a pour affixe $-7+2i$.

On admettra que l'affixe du point K est $-2 - 6i$.

2. Justifier que les droites (BK) et (JC) sont perpendiculaires et que les segments [BK] et [JC] ont la même longueur. Calculer cette longueur.

3. a. Calculer les affixes des points S et T.

b. Déterminer l'affixe du point U.

c. Démontrer que la droite (AU) est une hauteur du triangle STU.

4. Déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{AU}\right)$.

5. On admet que les droites (BK) et (JC) se coupent au point V d'affixe $v = -0{,}752 + 0{,}864i$.

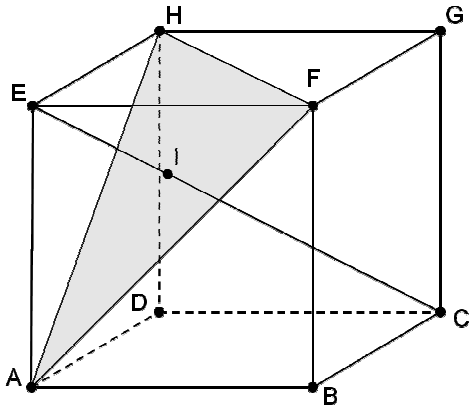
a. Établir que les points A, V et U sont alignés.

b. Que représente la droite (AU) pour l'angle $\widehat{BVC}$?

3. Exercice 3 (5 points)

On considère un cube ABCDEFGH, d'arête de longueur 1.

On note I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).



1. On se place dans le repère $\left(D\,;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$.

Dans ce repère, les sommets du cube ont pour coordonnées : A(1 ; 0 ; 0), B(1 ; 1 ; 0), C(0 ; 1 ; 0), D(0 ;0 ; 0), E(1 ;0 ; 1), F(1 ; 1 ; 1), C(0 ; 1 ; 1) et H(0 ;0 ; 1)

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC).

b. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).

c. En déduire les coordonnées du point I, puis montrer que le point I est le projeté orthogonal du point E sur le plan (AFH).

d. Vérifier que la distance du point E au plan (AFH) est égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

e. Démontrer que la droite (HI) est perpendiculaire à la droite (AF). Que représente le point I pour le triangle AFH?

2. *Dans la suite de cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Définitions :

* un tétraèdre est dit de type 1 si ses faces ont même aire ;
* il est dit de type 2 si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux ;
* il est dit de type 3 s'il est à la fois de type 1 et de type 2.

Préciser de quel(s) type(s) est le tétraèdre EAFH.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

On admet que la durée de vie (exprimée en années) d'un certain type de capteur de lumière peut être modélisée par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ (strictement positif), c'est-à-dire que la probabilité que ce capteur tombe en panne avant l'année t (t positif) s'exprime par

$$F(t)=\mathbb{P}(X\leq t)=\mathbb{P}\left([0\,;t]\right)=\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}dx\,.$$

1. Restitution organisée de connaissances

Pré-requis :

a. $\mathbb{P}_A(B)=\dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ (où A et B sont deux évènements tels que $\mathbb{P}(A)\neq 0$) ;

b. $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)=1-\mathbb{P}(A)$ où A est un évènement ;

c. $\mathbb{P}([a\,;b])=F(b)-F(a)$ (où a et b sont des nombres réels positifs tels que $a\leq b$).

Démontrer que, pour tout nombre réel positif s, on a : $\mathbb{P}_{[t\,;+\infty[}\left([t\,;t+s]\right)=\dfrac{F(t+s)-F(t)}{1-F(t)}$ et que $\mathbb{P}_{[t\,;+\infty[}\left([t\,;t+s]\right)$ est indépendant du nombre réel t.

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda=0{,}2$.

2. Démontrer que la probabilité que le capteur ne tombe pas en panne au cours des deux premières années est égale à $e^{-0{,}4}$.

3. Sachant que le capteur n'est pas tombé en panne au cours des deux premières années, quelle est, arrondie au centième, la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de six ans ?

4. On considère un lot de 10 capteurs, fonctionnant de manière indépendante.

Dans cette question, les probabilités seront arrondies à la sixième décimale.

a. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait exactement deux capteurs qui ne tombent pas en panne au cours des deux premières années.

b. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un capteur qui ne tombe pas en panne au cours des deux premières années.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

Partie A : Restitution organisée de connaissances

1. Pré-requis : tout nombre entier n strictement supérieur à 1 admet au moins un diviseur premier.

Démontrer que tout nombre entier n strictement supérieur à 1 est premier ou peut se décomposer en produit de facteurs premiers (on ne demande pas de démontrer l'unicité de cette décomposition).

2. Donner la décomposition en produit de facteurs premiers de 629.

Partie B

Dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les surfaces Γ et C d'équations respectives Γ : $z=xy$ et C : $x^2+z^2=1$.

1. Donner la nature de la surface C et déterminer ses éléments caractéristiques.

2. Points d'intersection à coordonnées entières des surfaces Γ et C

a. Démontrer que les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ des points d'intersection de Γ et de C sont telles que : $x^2\left(1+y^2\right)=1$.

b. En déduire que Γ et C ont deux points d'intersection dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

3. Points d'intersection à coordonnées entières de Γ et d'un plan

Pour tout nombre entier naturel non nul n, on désigne par P_n le plan d'équation $z=n^4+4$.

a. Déterminer l'ensemble des points d'intersection de Γ et du plan P_1 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.

Pour la suite de l'exercice, on suppose $n>2$.

b. Vérifier que : $\left(n^2-2n+2\right)\left(n^2+2n+2\right)=n^4+4$.

c. Démontrer que, quel que soit le nombre entier naturel $n>2$, n^4+4 n'est pas premier.

d. En déduire que le nombre de points d'intersection de Γ et du plan P_n dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs est supérieur ou égal à 8.

e. Déterminer les points d'intersection de Γ et du plan P_5 dont les coordonnées sont des nombres entiers relatifs.