

ANNALES BAC 2008

ANNALES BAC 2008	1
1. 1. Polynésie 09/2008	1
1. 2. France et La Réunion 09/2008	4
1. 3. Antilles 09/2008	7
1. 4. Nouvelle-Calédonie 11/2008	12
1. 5. Amérique du Sud 11/2008	17
1. 6. Pondicherry 06/2008	19
1. 7. Amérique du Nord 06/2008	28
1. 8. Antilles – Guyane 06/2008	37
1. 9. Asie 06/2008	40
1. 10. Centres étrangers 06/2008	43
1. 11. La Réunion 06/2008	45
1. 12. Liban 06/2008	47
1. 13. France 06/2008	51
1. 14. Polynésie 06/2008	54
1. 15. Nouvelle Calédonie 03/2008	57

Les exercices de spécialité, corrigés ou pas sont dans les fichiers d'exercices correspondants.

1. 1. Polynésie 09/2008

1. 1. Polynésie 09/2008 4 points

On rappelle que la probabilité d'un événement A sachant que l'événement B est réalisé se note $p_B(A)$.

Une urne contient au départ 30 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule de l'urne :

- si la boule tirée est blanche, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules blanches supplémentaires ;
- si la boule tirée est noire, on la remet dans l'urne et on ajoute n boules noires supplémentaires.

On tire ensuite au hasard une seconde boule de l'urne.

On note :

* B_1 l'événement : « on obtient une boule blanche au premier tirage » ;

* B_2 l'événement : « on obtient une boule blanche au second tirage » ;

* A l'événement : « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

1. Dans cette question, on prend $n = 10$.

a. Calculer la probabilité $p(B_1 \cap B_2)$ et montrer que $p(B_2) = \frac{3}{4}$.

b. Calculer $p_{B_2}(B_1)$.

c. Montrer que $p(A) = \frac{3}{10}$.

2. On prend toujours $n = 10$.

Huit joueurs réalisent l'épreuve décrite précédemment de manière identique et indépendante.

On appelle X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de réalisations de l'événement A .

a. Déterminer $p(X = 3)$. (On donnera la réponse à 10^{-2} près).

b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .

3. Dans cette question n est un entier supérieur ou égal à 1.

Existe-t-il une valeur de n pour laquelle $p(A) = \frac{1}{4}$?

1. 2. Polynésie 09/2008 5 points

On donne la propriété suivante : « Par un point de l'espace, il passe un plan et un seul orthogonal à une droite donnée »

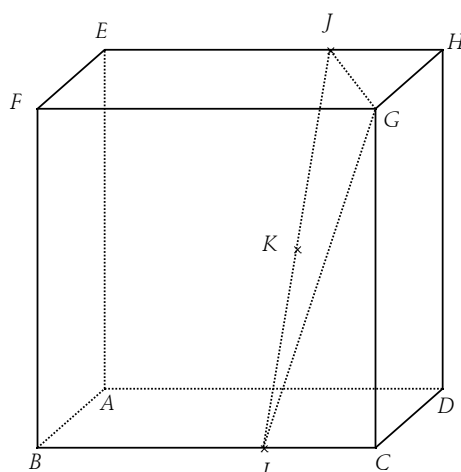
Sur la figure donnée ci-dessous, on a représenté le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1.

On a placé :

les points I et J tels que $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$;

le milieu K de $[IJ]$.

On appelle P le projeté orthogonal de G sur le plan (FIJ) .



PARTIE A

1. Démontrer que le triangle FIJ est isocèle en F . En déduire que les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

On admet que les droites (GK) et (IJ) sont orthogonales.

2. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGK) .

3. Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (FGP) .

4. a. Montrer que les points F, G, K et P sont coplanaires.

b. En déduire que les points F, P et K sont alignés.

PARTIE B

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On appelle N le point d'intersection de la droite (GP) et du plan (ADB) . On note $(x, y, 0)$ les coordonnées du point N .

1. Donner les coordonnées des points F, G, I et J .

2. a. Montrer que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ) .

b. Exprimer les produits scalaires $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FI}$ et $\overrightarrow{GN} \cdot \overrightarrow{FJ}$ en fonction de x et y .

c. Déterminer les coordonnées du point N .

3. Placer alors le point P sur la figure.

1. 3. Polynésie 09/2008 5 points

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

On considère l'ensemble (E) des suites (x_n) définies sur $\mathbb{N}$ et vérifiant la relation suivante : pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} - x_n = 0,24x_{n-1}$.

1. On considère un réel λ non nul et on définit sur $\mathbb{N}$ la suite (t_n) par $t_n = \lambda^n$. Démontrer que la suite (t_n) appartient à l'ensemble (E) si et seulement si λ est solution de l'équation $\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$.

En déduire les suites (t_n) appartenant à l'ensemble (E).

On admet que (E) est l'ensemble des suites (u_n) définies sur $\mathbb{N}$ par une relation de la forme $u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n$ où α et β sont deux réels.

2. On considère une suite (u_n) de l'ensemble (E). Déterminer les valeurs de α et β telles que $u_0 = 6$ et $u_1 = 6,6$.

En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{39}{7}(1,2)^n + \frac{3}{7}(-0,2)^n$.

3. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Partie B

On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_0 = 6$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = 1,4v_n - 0,05v_n^2$.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1,4x - 0,05x^2$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 8]$.

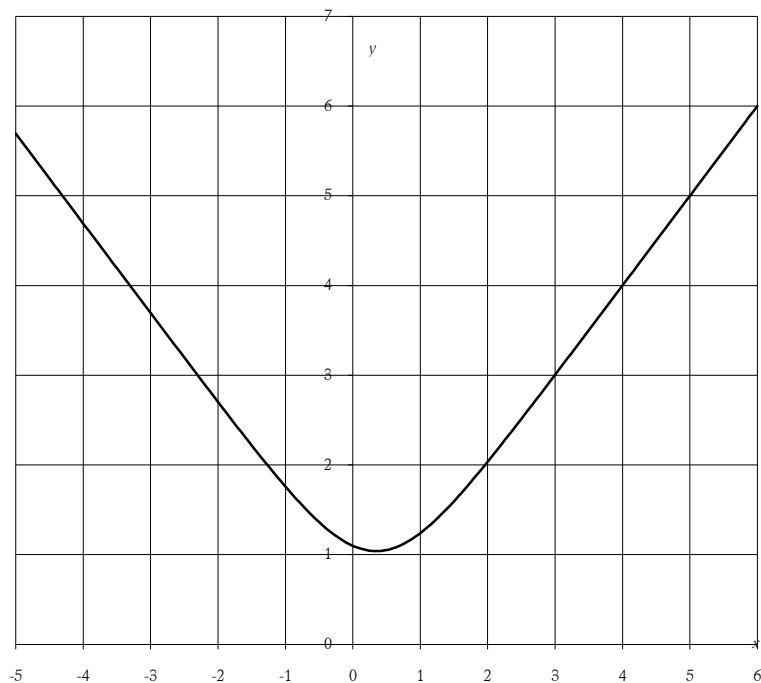
b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq v_n < v_{n-1} \leq 8$.

2. En déduire que la suite (v_n) est convergente et déterminer sa limite l .

1. 4. Polynésie 09/2008 6 points (c)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x})$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



Partie A - Étude de la fonction f

1. Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

On admet que, pour tout réel x , $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

Étudier la position relative de (C) et de (d).

3. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et montrer que la droite (d') d'équation $y = -x + \ln 2$ est asymptote à (C).

4. Étudier les variations de la fonction f . Montrer que le minimum de la fonction f est égal à $\frac{3}{2} \ln 2$.

5. Tracer les droites (d) et (d') sur la figure.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

On pose $I = \int_2^3 [f(x) - x] dx$.

1. Donner une interprétation géométrique de I .

2. Montrer que, pour tout $X \in [0; +\infty[$, $\ln(1+X) \leq X$.

En déduire que $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx$ et donner un encadrement de I d'amplitude 0,02.

Correction

Partie A

1. $f(x) = \ln(e^x + 2e^{-x}) = \ln(e^x(1 + 2e^{-2x})) = \ln e^x + \ln(1 + 2e^{-2x}) = x + \ln(1 + 2e^{-2x})$.

Remarque : si on met en facteur e^{-x} à la place de e^x , on a $f(x) = -x + \ln(2 + e^{2x})$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(1 + 2e^{-2x}) = +\infty + \ln(1 + 2 \times 0) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-2x}) = \ln(1 + 2 \times 0) = 0$: la droite (d) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + \ln(2 + e^{2x}) = +\infty + \ln(2 + 0) = +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(2 + e^{2x}) = \ln 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x + \ln 2) = 0$: la droite (d') $y = -x + \ln 2$ est asymptote à (C).

4. $f'(x) = \frac{e^x - 2e^{-x}}{e^x + 2e^{-x}}$; $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} \geq 2 \Leftrightarrow 2x \geq \ln 2 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2} \ln 2$.

$f\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \ln\left(e^{\frac{1}{2}\ln 2} + 2e^{-\frac{1}{2}\ln 2}\right) = \ln\left((e^{\ln 2})^{1/2} + 2(e^{\ln 2})^{-1/2}\right) = \ln(2^{1/2} + 2^1 2^{-1/2}) = \ln(2 \times 2^{1/2}) = \ln(2^{3/2})$.

Partie B - Encadrement d'une intégrale

1. I représente l'aire comprise entre (C), la droite ($y=x$), les droites $x=2$ et $x=3$.

2. $\ln(1+X) \leq X \Rightarrow \ln(1 + 2e^{-2x}) \leq 2e^{-2x}$ car $2e^{-2x} > 0$. Par ailleurs on a $f(x) \geq x \Rightarrow I \geq 0$.

$I = \int_2^3 [f(x) - x] dx = \int_2^3 \ln(1 + 2e^{-2x}) dx \leq \int_2^3 2e^{-2x} dx = \left[\frac{2}{-2} e^{-2x} \right]_2^3 = -e^{-6} + e^{-4} \approx 0,015$; 0,01 est une

estimation de I d'amplitude 0,02.

1. 2. France et La Réunion 09/2008

1. 5. France et La Réunion 09/2008 4 points

Dans une kermesse un organisateur de jeux dispose de 2 roues de 20 cases chacune. La roue A comporte 18 cases noires et 2 cases rouges. La roue B comporte 16 cases noires et 4 cases rouges.

Lors du lancer d'une roue toutes les cases ont la même probabilité d'être obtenues.

La règle du jeu est la suivante :

- Le joueur mise 1 euro et lance la roue A.
- S'il obtient une case rouge, alors il lance la roue B, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.
- S'il obtient une case noire, alors il relance la roue A, note la couleur de la case obtenue et la partie s'arrête.

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Soient E et F les événements :

E : « à l'issue de la partie, les 2 cases obtenues sont rouges » ;

F : « à l'issue de la partie, une seule des deux cases est rouge ».

Montrer que $p(E) = 0,02$ et $p(F) = 0,17$.

3. Si les 2 cases obtenues sont rouges le joueur reçoit 10 euros ; si une seule des cases est rouge le joueur reçoit 2 euros ; sinon il ne reçoit rien.

X désigne la variable aléatoire égale au gain algébrique en euros du joueur (rappel : le joueur mise 1 euro).

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X et en donner une interprétation.

4. Le joueur décide de jouer n parties consécutives et indépendantes (n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2).

a. Démontrer que la probabilité p_n qu'il lance au moins une fois la roue B est telle que : $p_n = 1 - (0,9)^n$.

b. Justifier que la suite de terme général p_n est convergente et préciser sa limite.

c. Quelle est la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $p_n > 0,9$?

1. 6. France et La Réunion 09/2008 3 points (c)

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle (E) : $xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$.

1. a. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = 2y + 8$.

b. Démontrer que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point A $(\ln 2, 0)$? Si oui la préciser.

Correction

(E) : $xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$.

1. a. $g(x) = \frac{f(x)}{x} \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)x - f(x)}{x^2}$, d'où en remplaçant dans (E') :

$$\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = 2\frac{f(x)}{x} + 8 \Leftrightarrow xf'(x) - f(x) = 2xf(x) + 8x^2 \Leftrightarrow xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2.$$

b. Même chose mais à l'envers.

2. $y' = 2y + 8$ a comme solutions $y = h(x) = Ce^{2x} - \frac{8}{2} = Ce^{2x} - 4$.

Les solutions de (E) sont donc $f(x) = xh(x) = x(Ce^{2x} - 4)$.

3. $f(\ln 2) = 0 \Leftrightarrow \ln 2(Ce^{2\ln 2} - 4) = 0 \Rightarrow 4C = 4 \Rightarrow C = 1$; la solution cherchée est $f(x) = x(e^{2x} - 4)$.

1. 7. France et La Réunion 09/2008 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiple (QCM). Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat portera sur la copie, sans justification, la lettre correspondant à la réponse choisie. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

Dans le plan orienté, $ABCD$ est un carré direct $\left((\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} \right)$.

On note I son centre et J le milieu de $[AI]$.

1. C est le barycentre des points pondérés (A, m) , $(B, 1)$ et $(D, 1)$ lorsque :

- a. $m = -2$ b. $m = 2$ c. $m = -1$ d. $m = 3$

2. a. B est l'image de C par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. Le rapport de l'homothétie de centre C qui transforme I en J est $\frac{2}{3}$.

c. Le triangle DAB est invariant par la symétrie de centre I .

d. J est l'image de I par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$.

3. L'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\| = AB$ est :

- a. la médiatrice de $[AC]$. b. le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
c. la médiatrice de $[AI]$. d. le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

4. L'ensemble des points M du plan tels que $(2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}) \cdot (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) = 0$ est :

- a. la médiatrice de $[AC]$. b. le cercle circonscrit au carré $ABCD$.
c. la médiatrice de $[AI]$. d. le cercle inscrit dans le carré $ABCD$.

1. 8. France et La Réunion 09/2008 4 points

On considère la suite numérique (J_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par $J_n = \int_1^n e^{-t} \sqrt{t+1} dt$.

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.

2. Dans cette question, le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

On définit la suite (I_n) , pour tout entier naturel n non nul, par $I_n = \int_1^n (t+1)e^{-t} dt$.

a. Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leq t+1$.

b. En déduire que $J_n \leq I_n$.

c. Calculer I_n en fonction de n . En déduire que la suite (J_n) est majorée par un nombre réel (indépendant de n).

d. Que peut-on en conclure pour la suite (J_n) ?

1. 9. France et La Réunion 09/2008 5 points (spé)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On réalisera une figure en prenant 4 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère le point A d'affixe $z_A = 1$.

Partie A

k est un réel strictement positif ; f est la similitude directe de centre O de rapport k et d'angle $\frac{\pi}{3}$. On note

$A_0 = A$ et pour tout entier naturel n , $A_{n+1} = f(A_n)$.

1. a. Étant donné un point M d'affixe z , déterminer en fonction de z l'affixe z' du point M' image de M par f .

b. Construire les points A_0, A_1, A_2 et A_3 dans le cas particulier où k est égal à $\frac{1}{2}$.

2. a. Démontrer par récurrence que pour tout entier n , l'affixe z_n du point A_n est égale à $k^n e^{\frac{in\pi}{3}}$.

b. En déduire les valeurs de n pour lesquelles le point A_n appartient à la demi droite $[O; \vec{u})$ et, dans ce cas, déterminer en fonction de k et de n l'abscisse de A_n .

Partie B

Dans cette partie toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Désormais, k désigne un entier naturel non nul.

1. Donner la décomposition en facteurs premiers de 2008.

2. Déterminer, en expliquant la méthode choisie, la plus petite valeur de l'entier naturel k pour laquelle k^6 est un multiple de 2008.

3. Pour quelles valeurs des entiers n et k le point A_n appartient-il à la demi droite $[O; \vec{u})$ avec pour abscisse un nombre entier multiple de 2008 ?

1. 10. France et La Réunion 09/2008 5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On réalisera une figure en prenant 2 cm comme unité graphique sur chaque axe.

On considère les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = 1$, $z_B = 5$ et $z_I = 3 + i$.

On note (C) le cercle de centre O et de rayon 1, (Δ) la médiatrice de $[AB]$ et (T) la tangente au cercle (C) en A .

À tout point M d'affixe z , différent de A , on associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-5}{z-1}$.

Le point M' est appelé l'image de M .

Partie A

1. Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point I' image de I . Vérifier que I' appartient à (C).

2. a. Justifier que pour tout point M distinct de A et B , on a : $OM' = \frac{MB}{MA}$.

b. Justifier que pour tout point M distinct de A et B , on a : $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM'}) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Dans la suite de l'exercice, M désigne un point quelconque de (Δ) .

On cherche à construire géométriquement son image M' .

1. Démontrer que M' appartient à (C).

2. On note (d) la droite symétrique de la droite (AM) par rapport à la tangente (T). (d) recoupe (C) en N .

a. Justifier que les triangles AMB et AON sont isocèles.

Après avoir justifié que $(\overrightarrow{AO}; \overrightarrow{AN}) = (\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AB})$, démontrer que $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{ON}) = (\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB})$.

b. En déduire une construction de M' .

1. 3. Antilles 09/2008

1. 11. Antilles 09/2008 4 points

Certains résultats de la PARTIE A pourront être utilisés dans la PARTIE B, mais les deux parties peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

On définit :

– la suite (u_n) par : $u_0 = 13$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$.

– la suite (S_n) par : pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n = 1 + \frac{12}{5^n}$. En déduire la limite de la suite (u_n) .

2. a. Déterminer le sens de variation de la suite (S_n) .

b. Calculer S_n en fonction de n .

c. Déterminer la limite de la suite (S_n) .

Partie B

Etant donné une suite (x_n) , de nombres réels, définie pour tout entier naturel n , on considère la suite (S_n)

définie par $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$.

Indiquer pour chaque proposition suivante si elle est vraie ou fausse. Justifier dans chaque cas.

Proposition 1 : si la suite (x_n) est convergente, alors la suite (S_n) l'est aussi.

Proposition 2 : les suites (x_n) et (S_n) ont le même sens de variation.

1. 12. Antilles 09/2008 5 points (spé)

Partie A

On considère le système de congruences : $(S) \begin{cases} n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \equiv 1 \pmod{5} \end{cases}$, où n désigne un entier relatif.

1. Montrer que 11 est solution de (S) .

2. Montrer que si n est solution de (S) alors $n - 11$ est divisible par 3.

3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme $11 + 15k$, où k désigne un entier relatif.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z' et g celle qui à tout point M d'affixe z associe le point d'affixe z'' définies par :

$$z' = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right) z \text{ et } z'' = e^{i\frac{\pi}{5}} z.$$

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .

2. On considère les points A_0 et B_0 d'affixes respectives $a_0 = 2e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ et $b_0 = 4e^{-i\frac{\pi}{5}}$.

Soient (A_n) et (B_n) les suites de points définies par les relations de récurrences :

$$A_{n+1} = f(A_n) \text{ et } B_{n+1} = g(B_n).$$

On note a_n et b_n les affixes respectives de A_n et B_n .

a. Quelle est la nature de chacun des triangles OA_nA_{n+1} ?

b. En déduire la nature du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4A_5$.

3. a. Montrer que les points B_n sont situés sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Indiquer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB_n}, \overrightarrow{OB_{n+2}})$.

c. En déduire la nature du polygone $B_0B_2B_4B_6B_8$.

4. a. Exprimer a_n et b_n en fonction de n .

b. Montrer que les entiers n pour lesquels les points A_n et B_n sont simultanément sur l'axe des réels sont les solutions du système (S) de la PARTIE A.

1. 13. Antilles 09/2008 7 points (c)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
- b. Démontrer que la droite D_1 d'équation $y = x + 2$ est asymptote à la courbe C .
- c. Étudier la position de C par rapport à D_1 .
2. a. On note f' la fonction dérivée de f . Calculer $f'(x)$ et montrer que, pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3} \right)^2.$$

- b. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser le tableau de variations de la fonction f .

3. a. Que peut-on dire de la tangente D_2 à la courbe C au point I d'abscisse $\ln 3$?

- b. En utilisant les variations de la fonction f , étudier la position de la courbe C par rapport à D_2 .

4. a. Montrer que la tangente D_3 à la courbe C au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \frac{1}{4}x + 1$.

- b. Étudier la position de la courbe C par rapport à la tangente D_3 sur l'intervalle $] -\infty; \ln 3]$. On pourra utiliser la dérivée seconde de f notée f'' définie pour tout x de $\mathbb{R}$ par : $f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}$.

5. On admet que le point I est centre de symétrie de la courbe C . Tracer la courbe C , les tangentes D_2 , D_3 et les asymptotes à la courbe C . On rappelle que l'unité graphique choisie est 2 cm.

6. a. Déterminer une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{e^x}{e^x + 3}$.

- b. Soit λ un réel strictement négatif.

On note $A(\lambda)$ l'aire, en unités d'aire, du domaine limité par D_1 , C et les droites d'équations $x = \lambda$ et $x = 0$. Montrer que $A(\lambda) = 4\ln 4 - 4\ln(e^\lambda + 3)$.

- c. Calculer $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$.

Correction

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}.$$

1. a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty + 2 - \frac{4 \times 0}{0 + 3} = -\infty$.

- b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = 0$.

- c. $f(x) - (x + 2) = -\frac{4e^x}{e^x + 3} < 0$ car $e^x > 0$. C est au-dessus de D_1 .

$$2. a. f'(x) = 1 - 4 \frac{e^x(e^x + 3) - e^x(e^x)}{(e^x + 3)^2} = 1 - \frac{12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x + 3)^2 - 12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{e^{2x} + 6e^x + 9 - 12e^x}{(e^x + 3)^2} = \frac{(e^x - 3)^2}{(e^x + 3)^2}.$$

b. f' est positive sur $\mathbb{R}$, f est croissante. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 2 - 4 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+3e^{-x}} = +\infty - 4 = +\infty$.

(Remarque : comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4e^x}{e^x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{1+3e^{-x}} = 4$, la droite $y = x + 2 - 4 = x - 2$ est asymptote en $+\infty$.)

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

3. a. $D_2 : f'(\ln 3) = \left(\frac{e^{\ln 3} - 3}{e^{\ln 3} + 3} \right)^2 = 0$ donc tangente horizontale.

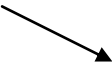
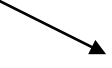
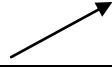
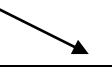
b. Comme f est croissante, C est en-dessous de D_2 lorsque $x < \ln 3$ et au-dessus lorsque $x > \ln 3$.

4. a. $f'(0) = \left(\frac{e^0 - 3}{e^0 + 3} \right)^2 = \left(\frac{-2}{4} \right)^2 = \frac{1}{4}$, $f(0) = 2 - \frac{4}{1+3} = 1$, $y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{4}x + 1$.

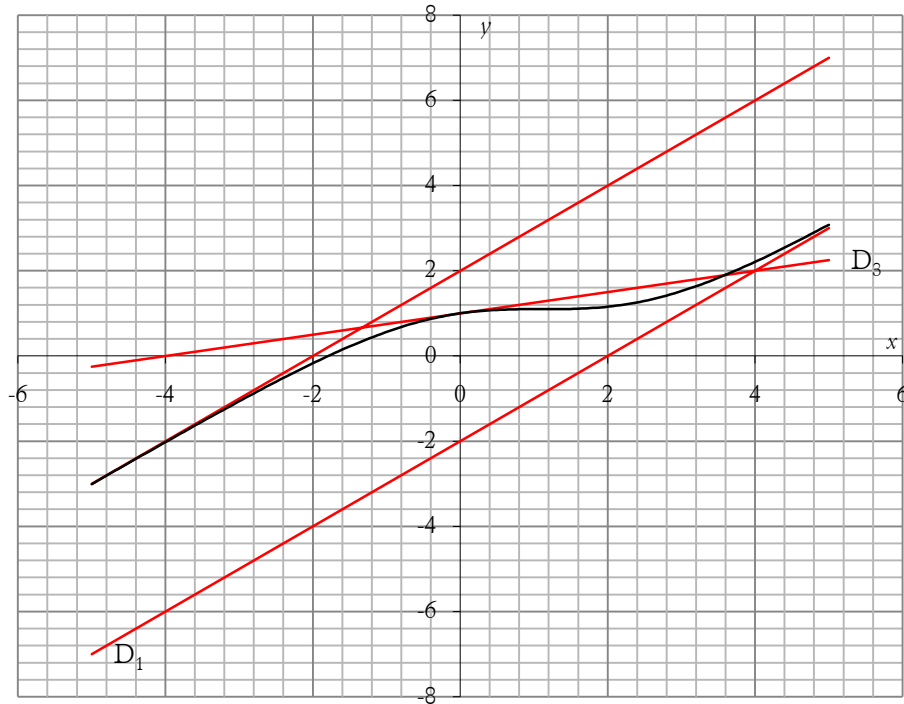
b. Posons $g(x) = f(x) - \left(\frac{1}{4}x + 1 \right) \Rightarrow g'(x) = f'(x) - \frac{1}{4} \Rightarrow g''(x) = f''(x)$.

Sur l'intervalle $]-\infty; \ln 3]$, $f''(x) = \frac{12e^x(e^x - 3)}{(e^x + 3)^3}$ est < 0 , de même que g'' . g' est décroissante et vaut 0

lorsque $x = 0$; g' est donc positive avant 0, négative après 0; g est croissante avant 0, décroissante après 0; comme $g(0) = 0$, g est toujours négative donc C est en dessous de D_3 .

x	$-\infty$	0	$\ln 3$
g''	-	-	-
g'		0	
signe g'	+	0	-
g		0	
signe g	-	0	-

5.



6. a. La dérivée de $e^x + 3$ est e^x , g est de la forme $\frac{u'}{u}$, une primitive de g est $\ln(e^x + 3)$.

b. $A(\lambda) = \int_{\lambda}^0 f(x) - (x+2) dx = \int_{\lambda}^0 -4 - \frac{e^x}{e^x + 3} dx = -4 \left[\ln(e^x + 3) \right]_{\lambda}^0 = -4 \ln(e^{\lambda} + 3) + 4 \ln(e^0 + 3)$, soit

$$A(\lambda) = 4 \ln 4 - 4 \ln(e^{\lambda} + 3).$$

c. $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 4 \ln 4 - 4 \ln(0 + 3) = 4 \ln 4 - 4 \ln 3.$

1. 14. Antilles 09/2008 4 points

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 .

L'urne U_1 contient 2 billes vertes et 8 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

L'urne U_2 contient 3 billes vertes et 7 billes rouges toutes indiscernables au toucher.

Une partie consiste, pour un joueur, à tirer au hasard une bille de l'urne U_1 , noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_1 puis de tirer au hasard une bille de l'urne U_2 , noter sa couleur et remettre la bille dans l'urne U_2 .

À la fin de la partie, si le joueur a tiré deux billes vertes il gagne un lecteur MP3. S'il a tiré une bille verte, il gagne un ours en peluche. Sinon il ne gagne rien.

On note

V_1 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_1 »

V_2 l'évènement : « le joueur tire une boule verte dans U_2 ».

Les évènements V_1 et V_2 sont indépendants.

1. Montrer, à l'aide d'un arbre pondéré, que la probabilité de gagner un lecteur MP3 est $p = 0,06$.

2. Quelle est la probabilité de gagner un ours en peluche ?

3. Vingt personnes jouent chacune une partie. Déterminer la probabilité que deux d'entre elles exactement gagnent un lecteur MP3.

On justifiera la réponse et on donnera une valeur approchée du résultat à 10^{-4} près.

4. On appelle n le nombre de personnes participant à la loterie un jour donné et jouant une seule fois.

On note p_n la probabilité que l'une au moins de ces personnes gagne un lecteur MP3.

Déterminer la plus petite valeur de n vérifiant $p_n > 0,99$.

1. 4. Nouvelle-Calédonie 11/2008

1. 15. N. Calédonie 11/2008 3 points (c)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : $A(3; -2; 1)$, $B(5; 2; -3)$, $C(6; -2; -2)$, $D(4; 3; 2)$.

1. Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés, puis que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

2. a. Montrer que le vecteur $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

b. En déduire une équation du plan (ABC) .

c. Montrer que la distance du point D au plan (ABC) est égale à 3.

3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$ en unités de volume.

Correction

1. $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, les points ne sont pas alignés car les vecteurs sont

orthogonaux et $AB = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$, $BC = \sqrt{1+16+1} = 3\sqrt{2}$.

2. a. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 + 0 - 6 = 0$, $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 - 4 + 2 = 0$.

b. $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2(x-3) + 1(y+2) + 2(z-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z - 6 = 0$.

c. $d(D, ABC) = \frac{|2x_D + y_D + 2z_D - 6|}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{9}{3} = 3$.

3. $V = \frac{1}{3} \times d(D, ABC) \times \text{Aire}(ABDC) = \frac{1}{3} \times 3 \times \frac{3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}}{2} = 9$.

1. 16. N. Calédonie 11/2008 5 points (c)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère les points A , B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 2i$, $z_B = 2i$ et $z_C = 2$ ainsi que le cercle Γ de centre A et de rayon 2.

La droite (OA) coupe le cercle Γ en deux points H et K tels que $OH < OK$. On note z_H et z_K les affixes respectives des points H et K .

a. Faire une figure en prenant 1 cm comme unité graphique.

b. Calculer la longueur OA . En déduire les longueurs OK et OH .

c. Justifier, à l'aide des notions de module et d'argument d'un nombre complexe, que $z_K = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_H = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-4}{z}$.

2. a. Déterminer et placer les points images de B et C par f .

b. On dit qu'un point est invariant par f s'il est confondu avec son image. Déterminer les points invariants par f .

3. a. Montrer que pour tout point M distinct de O , on a : $OM \times OM' = 4$.

b. Déterminer $\arg(z')$ en fonction de $\arg(z)$.

4. Soient K' et H' les images respectives de K et H par f .

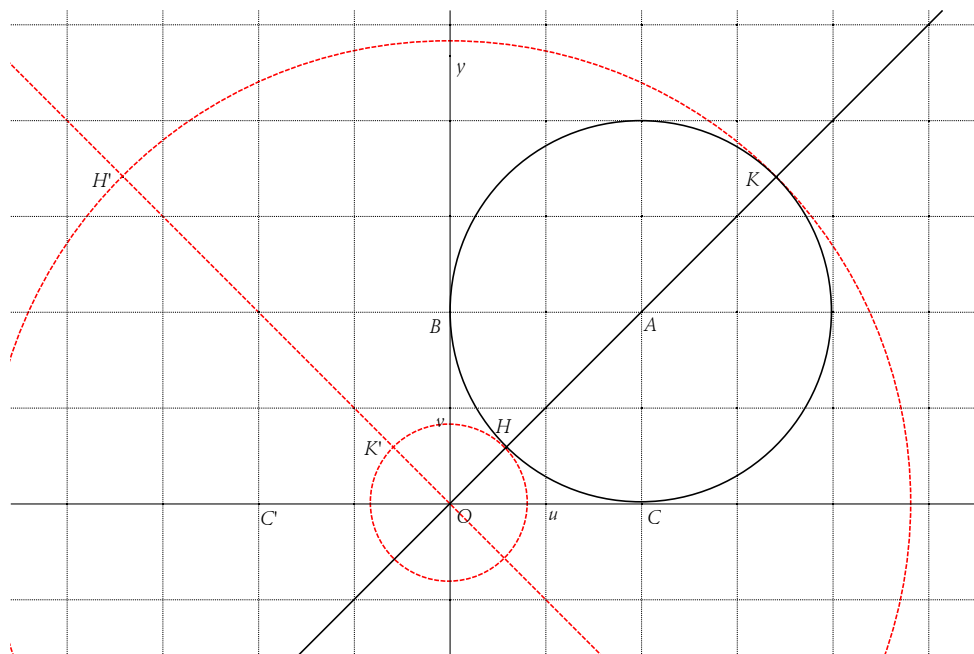
a. Calculer OK' et OH' .

b. Démontrer que $z_{K'} = (2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = (2\sqrt{2}+2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

c. Expliquer comment construire les points K' et H' en utilisant uniquement la règle et le compas à partir des points K et H . Réaliser la construction.

Correction

1. a.



b. $OA = 2\sqrt{2}$; $OK = OA + r = 2\sqrt{2} + 2$, $OH = OA - r = 2\sqrt{2} - 2$.

c. $z_K = OK \cdot e^{i(\vec{u}, \overrightarrow{OA})} = (2\sqrt{2} + 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$; $z_H = OH \cdot e^{i(\vec{u}, \overrightarrow{OA})} = (2\sqrt{2} - 2)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Dans toute la suite, on considère l'application f du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 0$ associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{-4}{z}$.

2. a. $z_{B'} = \frac{-4}{z_B} = -\frac{4}{2i} = 2i = z_B$, $z_{C'} = \frac{-4}{z_C} = -\frac{4}{2} = -2$.

b. $z = \frac{-4}{z} \Leftrightarrow z^2 = -4 \Leftrightarrow z = \pm 2i$.

3. a. $OM \times OM' = |z| \times |z'| = |zz'| = |-4| = 4$.

Montrer que pour tout point M distinct de O , on a :

b. $\arg(z') = \arg(-4) - \arg(z) = \pi - \arg(z)$

4. a. $OK' \times OK = 4 \Rightarrow OK' = \frac{4}{2\sqrt{2}+2} = \frac{4(2\sqrt{2}-2)}{(2\sqrt{2})^2 - 4} = 2\sqrt{2}-2$, $OH' \times OH = 4 \Rightarrow OH' = \frac{4}{2\sqrt{2}-2} = 2\sqrt{2}+2$.

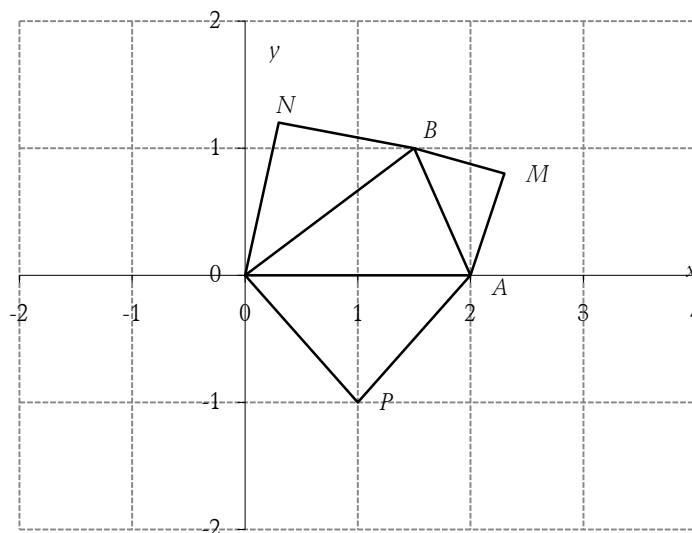
b. $\arg(z_{K'}) = \pi - \arg(z_K) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$ et pareil pour H . $z_{K'} = (2\sqrt{2}-2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $z_{H'} = (2\sqrt{2}+2)e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

c. $OK' = OH$ et $OH' = OK$; K' et H' sont sur la droite $y = -x$.

1. 17. N. Calédonie 11/2008 5 points (spé)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OJ})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = \frac{3}{2} + i$.

On considère les points M , N et P tels que les triangles AMB , BNO et OPA soient des triangles rectangles isocèles de sens direct comme le montre la figure ci-dessous.



On note s_1 la similitude directe de centre A qui transforme M en B .

On note s_2 la similitude directe de centre O qui transforme B en N .

On considère la transformation $r = s_2 \circ s_1$.

Le but de l'exercice est de démontrer de deux façons différentes que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. À l'aide des transformations.

a. Donner l'angle et le rapport de s_1 et de s_2 .

b. Déterminer l'image du point M puis celle du point I par la transformation r .

c. Justifier que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dont on précisera le centre.

d. Quelle est l'image du point O par r ?

e. En déduire que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

2. En utilisant les nombres complexes.

a. Donner les écritures complexes de s_1 et s_2 . On utilisera les résultats de la question 1. a.

b. En déduire les affixes z_M et z_N des points M et N .

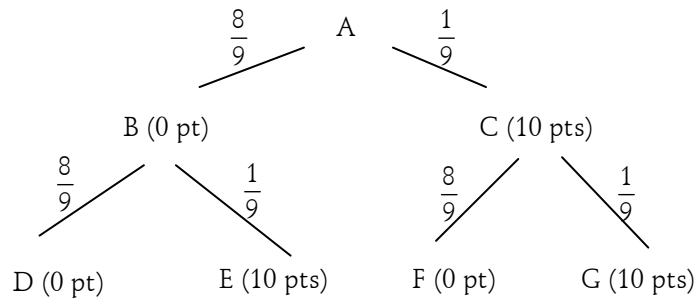
c. Donner, sans justification, l'affixe z_P du point P puis démontrer que les droites (OM) et (PN) sont perpendiculaires.

1. 18. N. Calédonie 11/2008 4 points

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D , E , F et G .

On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passée par un noeud.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D , E , F ou G .



1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance de X.

c. Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.

2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes.

On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.

a. Calculer la probabilité qu'il gagne exactement 2 parties. On donnera le résultat arrondi au millième.

b. Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

1. 19. N. Calédonie 11/2008 5 points

Partie A

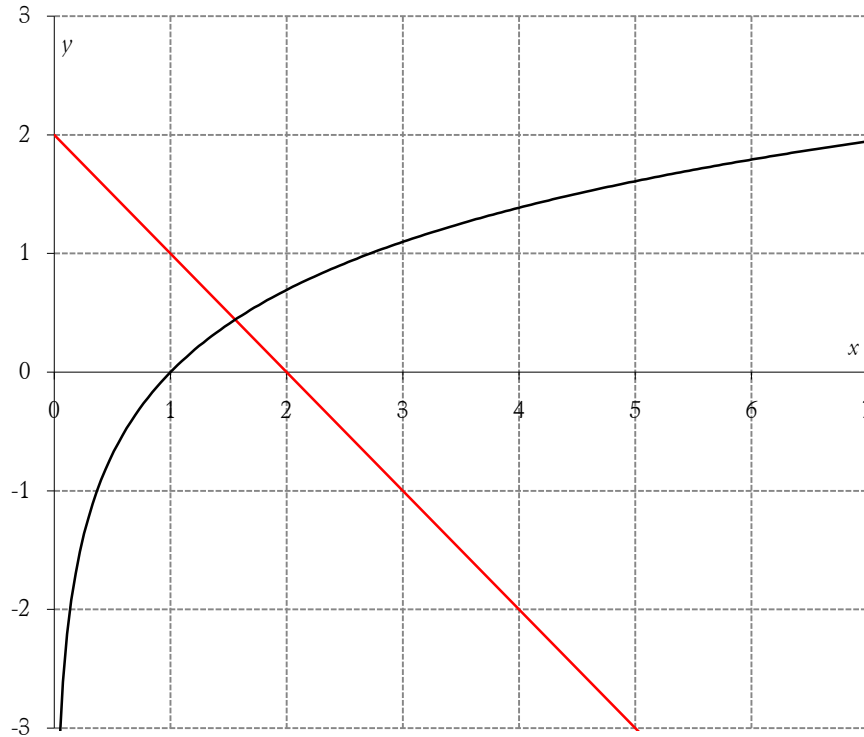
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - 2 + x$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f puis dresser son tableau de variations.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Donner un encadrement du nombre α à 10^{-2} près.



Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On considère sur le graphique ci-dessus, la courbe représentative C de la fonction $\ln$, ainsi que la droite D d'équation $y = 2 - x$. On note E le point d'intersection de la courbe C et de la droite D.

On considère l'aire en unités d'aire, notée **A**, de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et au dessous de la courbe C et de la droite D.

1. Déterminer les coordonnées du point E.

2. Soit $I = \int_1^{\alpha} \ln x dx$.

a. Donner une interprétation géométrique de I.

b. Calculer I, en fonction de α , à l'aide d'une intégration par parties.

c. Montrer que I peut aussi s'écrire $I = -\alpha^2 + \alpha + 1$ sachant que $f(\alpha) = 0$.

3. Calculer l'aire **A** en fonction de α .

1. 20. N. Calédonie 11/2008 3 points

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.

1. Restitution organisée de connaissances :

La fonction exponentielle est l'unique fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} g'(x) = g(x) \\ g(0) = 1 \end{cases}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démontrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

2. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie pour n entier supérieur ou égal à 1 par : $u_n = \frac{1}{n} \left[1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right]$.

1. Démontrer que $1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{n}}}$ puis en déduire que $u_n = (e-1)f\left(\frac{1}{n}\right)$.

2. En déduire, en utilisant aussi la partie A, que la suite (u_n) converge vers $e-1$.

1. 5. Amérique du Sud 11/2008

1. 21. Amérique du Sud 11/2008 5 points

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = -1+2i, b = 1+3i, c = 4i$.

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle en A .

2. Soit I le milieu de $[BC]$ et z_I son affixe.

a. Quel est l'ensemble des points M du plan distincts de A dont l'affixe z est telle que $\frac{z-z_I}{z-z_A}$ soit un réel ?

b. Déterminer l'unique réel x tel que $\frac{x-z_I}{x-z_A}$ soit un réel.

c. Soit $z_{\overrightarrow{AI}}$ l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$; donner une forme trigonométrique de $z_{\overrightarrow{AI}}$.

3. a. Soit G le point d'affixe -3 . Montrer qu'il existe deux rotations de centre G , dont on déterminera les angles, telles que les images de A et I par ces rotations soient toutes deux sur l'axe des réels.

b. Soit r_1 la rotation de centre G et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{4}$. Déterminer l'écriture complexe de r_1 .

4. Soit A', B' et C' les images respectives de A, B , et C par la rotation r_1 ; soient a', b' et c' leurs affixes.

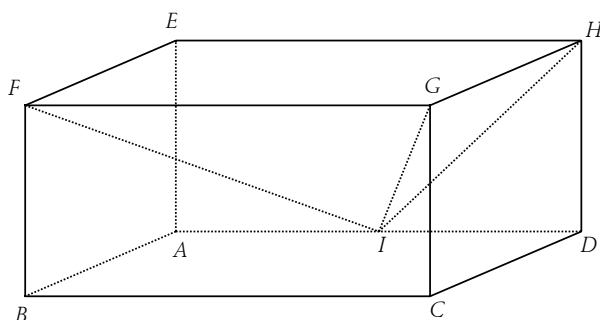
Quelle est l'image par r_1 de l'axe de symétrie du triangle ABC ? En déduire que $b' = \overline{c'}$.

1. 22. Amérique du Sud 11/2008 5 points

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, on considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que :

$$AB = 1, AD = 2 \text{ et } AE = 1.$$

On appelle I le milieu de $[AD]$. L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE})$.



1. Déterminer, dans le repère choisi, les coordonnées des points F, G, H .

2. a. Montrer que le volume V du tétraèdre $GFIH$ est égal à $\frac{1}{3}$.

b. Montrer que le triangle FIH est rectangle en I .

En exprimant V d'une autre façon, calculer la distance d du point G au plan (FIH) .

3. Soit le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(2 ; 1 ; -1)$.

a. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est normal au plan (FIH) .

b. En déduire une équation cartésienne du plan (FIH) .

c. Retrouver par une autre méthode la distance d du point G au plan (FIH) .

4. a. La droite (AG) est-elle perpendiculaire au plan (FIH) ?

b. Donner un système d'équations paramétriques de cette droite.

c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection K de (AG) et de (FIH) .

5. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.

Soit Γ la sphère de centre G passant par K . Quelle est la nature de l'intersection de Γ et du plan (FIH) ?
(On ne demande pas de préciser les éléments caractérisant cette intersection).

1. 23. Amérique du Sud 11/2008 5 points (spé)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit D la droite passant par le point A de coordonnées $(0 ; 0 ; 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u}$ de coordonnées $(1 ; 1 ; 0)$ et soit D' la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = t' \\ x = 1 - t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'ensemble S des points de l'espace équidistants de D et de D' .

1. Une équation de S

a. Montrer que D et D' sont orthogonales et non coplanaires.

b. Donner une représentation paramétrique de la droite D .

Soit M un point de l'espace de coordonnées $(x ; y ; z)$ et H le projeté orthogonal de M sur D .

Montrer que $\overrightarrow{MH}$ a pour coordonnées $\left(\frac{-x+y}{2} ; \frac{x-y}{2} ; 2-z \right)$.

En déduire MH^2 en fonction de x , y et z .

Soit K le projeté orthogonal de M sur D' . Un calcul analogue au précédent permet d'établir que :

$$MK^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2 + (2+z)^2,$$

relation que l'on ne demande pas de vérifier.

c. Montrer qu'un point M de coordonnées $(x ; y ; z)$ appartient à S si et seulement si $z = -\frac{1}{4}xy$.

2. Étude de la surface S

a. On coupe S par le plan (xOy) . Déterminer la section obtenue.

b. On coupe S par un plan P parallèle au plan (xOy) . Quelle est la nature de la section obtenue ?

c. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même infructueuse sera prise en considération dans l'évaluation.

On coupe S par le plan d'équation $x + y = 0$. Quelle est la nature de la section obtenue ?

1. 24. Amérique du Sud 11/2008 3 points

Dans cet exercice, on demande aux candidats d'établir, en suivant la démarche proposée, deux résultats de cours.

On rappelle que la fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $]0 ; +\infty[$, positive sur $[1 ; +\infty[$, et vérifie :

* $\ln 1 = 0$;

* pour tous réels strictement positifs x et y , $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;

* pour tout réel strictement positif x , $[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$;

* $\ln(2) \approx 0,69$ à 10^{-2} près.

1. On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

a. Étudier les variations de f et en déduire que f admet un minimum sur $]0; +\infty[$.

b. En déduire le signe de f puis que, pour tout $x > 1$, $0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{\sqrt{x}}{x}$.

c. En déduire que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie sur $]0; +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$.

En utilisant la question 1., déterminer, si elle existe, la limite en $+\infty$ de la fonction f_n .

1. 25. Amérique du Sud 11/2008 7 points

1. Résoudre l'équation différentielle : $2y' + y = 0$ (E), dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. On considère l'équation différentielle : $2y' + y = e^{-\frac{x}{2}}(x+1)$ (E')

a. Déterminer deux réels m et p tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}(mx^2 + px)$ soit solution de (E').

b. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Montrer que g est solution de l'équation (E') si et seulement si $g - f$ est solution de l'équation (E).

Résoudre l'équation (E').

3. Étudier les variations de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{4}e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + 2x)$.

4. Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction h .

5. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note C la courbe représentative de h et Γ

celle de la fonction : $x \rightarrow e^{-\frac{x}{2}}$.

a. Étudier les positions relatives de C et Γ .

b. Tracer ces deux courbes sur un même graphique.

1. 6. Pondicherry 06/2008

1. 26. Pondicherry 06/2008 (c) 4 points

1. Soit f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$ et soit H la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par

$$H(x) = \int_1^x f(t) dt.$$

a. Justifier que f et H sont bien définies sur $[1; +\infty[$.

b. Quelle relation existe-t-il entre H et f ?

c. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. Interpréter en termes d'aire le nombre $H(3)$.

2. On se propose, dans cette question, de donner un encadrement du nombre $H(3)$.

a. Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\frac{x}{e^x - 1} = x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$.

b. En déduire que $\int_1^3 f(x) dx = 3 \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$.

c. Montrer que si $1 \leq x \leq 3$, alors $\ln\left(1 - \frac{1}{e}\right) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln\left(1 - \frac{1}{e^3}\right)$.

d. En déduire un encadrement de $\int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx$, puis de $\int_1^3 f(x) dx$.

Correction

1. a. $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$, $H(x) = \int_1^x f(t) dt$: comme $e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$, $e^x - 1 \neq 0$ donc f existe et est continue sur $\mathbb{R}$; f a donc une primitive F et $H(x) = F(x) - F(1)$ existe sur $\mathbb{R}$.

b. Grâce au cours nous savons que $H'(x) = F'(x) - 0 = f(x)$.

c. $H(3)$ est l'aire, exprimée en unités d'aire, de f , l'axe (Ox) les droites $x=1$ et $x=3$.

2. a. Multiplions $f(x)$ par e^{-x} au numérateur et au dénominateur :

$$f(x) = \frac{x e^{-x}}{(e^x - 1) e^{-x}} = x \frac{e^{-x}}{e^x e^{-x} - e^{-x}} = x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}.$$

b. On reconnaît dans $\frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$ la dérivée de $\ln|1 - e^{-x}|$; il faut donc intégrer par parties en posant :

$$u = x, \quad v' = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}, \quad \text{soit } u' = 1, \quad v = \ln|1 - e^{-x}| ;$$

par ailleurs $1 - e^{-x} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-x} \Leftrightarrow 0 \geq -x \Leftrightarrow x \geq 0$ donc $v = \ln(1 - e^{-x})$:

$$\int_1^3 f(x) dx = \left[x \ln(1 - e^{-x}) \right]_1^3 - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx = 3 \ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx.$$

c. La fonction $(1 - e^{-x})$ est strictement positive si $1 \leq x \leq 3$; $(\ln(1 - e^{-x}))' = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}} > 0$ donc $\ln(1 - e^{-x})$ est croissante sur $[1; 3]$ d'où $\ln(1 - e^{-1}) \leq \ln(1 - e^{-x}) \leq \ln(1 - e^{-3})$.

d. On intègre : $(3 - 1) \ln(1 - e^{-1}) \leq \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq (3 - 1) \ln(1 - e^{-3})$, soit

$$-2 \ln(1 - e^{-3}) \leq - \int_1^3 \ln(1 - e^{-x}) dx \leq -2 \ln(1 - e^{-1}),$$

d'où $3 \ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) - 2 \ln(1 - e^{-3}) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \ln(1 - e^{-3}) - \ln(1 - e^{-1}) - 2 \ln(1 - e^{-1})$ et

$$\text{enfin } \ln\left(\frac{1 - e^{-3}}{1 - e^{-1}}\right) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \ln\left(\frac{1 - e^{-3}}{1 - e^{-1}}\right) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^3 - 1}{e^3 - e^2}\right) \leq \int_1^3 f(x) dx \leq 3 \ln\ln\left(\frac{e^3 - 1}{e^3 - e^2}\right).$$

1. 27. Pondicherry 06/2008 (c) 5 points non spécialistes

Cet exercice contient une restitution organisée de connaissances.

Partie A

On suppose connus les résultats suivants :

1. Dans le plan complexe, on donne par leurs affixes z_A, z_B et z_C trois points A, B et C . Alors

$$\left| \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right| = \frac{CB}{CA} \text{ et } \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} \right) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})(2\pi).$$

2. Soit z un nombre complexe et soit θ un réel : $z = e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = 1$ et $\arg(z) = \theta + k2\pi$, où k est un entier relatif.

Démonstration de cours : démontrer que la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω est la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

Partie B

Dans un repère orthonormal direct du plan complexe $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

- Donner le module et un argument pour, chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D .
- Comment construire à la règle et au compas les points A, B, C et D dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$?
- Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

2. On considère la rotation r de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Soient E et F les points du plan définis par :

$$E = r(A) \text{ et } F = r(C).$$

- Comment construire à la règle et au compas les points F et E dans le repère précédent ?
- Donner l'écriture complexe de r .
- Déterminer l'affixe du point E .

Correction

Partie A

Démonstration de cours : la rotation r d'angle α et de centre Ω d'affixe ω envoie $M(z)$ sur $M'(z')$ de sorte

$$\text{que } \begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \frac{z' - \omega}{z - \omega} = 1.e^{i\alpha} \Leftrightarrow z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega).$$

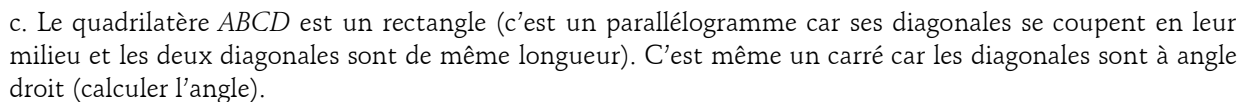
Partie B

$$z_A = -\sqrt{3} - i, z_B = 1 - i\sqrt{3}, z_C = \sqrt{3} + i \text{ et } z_D = -1 + i\sqrt{3}.$$

$$1. a. z_A = -\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}; z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}};$$

$$z_C = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}; z_D = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

b. Les points sont sur le cercle de centre O , de rayon 2 (cercle de diamètre $[PQ]$) ; B est un sommet de triangle équilatéral, D est diamétralement opposé à B , A' est sur la bissectrice de QOD et A est tel que l'arc $AQ = QA'$; C est diamétralement opposé à A (traits pointillés noirs sur la figure).


$$\text{b. } z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z - z_B) \Leftrightarrow z' - 1 + i\sqrt{3} = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - 1 + i\sqrt{3}).$$

$$z_E = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{3}{2} - i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} + 1 - i\sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} + i.$$

Dans la suite de l'exercice on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équi-facial car ses faces sont isométriques).

2. a. Quelle est la nature du quadrilatère $IKJL$? Préciser également la nature des quadrilatères $IMJN$ et $KNLM$.

b. En déduire que (IJ) et (KL) sont orthogonales. On admettra que, de même, les droites (IJ) et (MN) sont orthogonales et les droites (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. a. Montrer que la droite (IJ) est orthogonale au plan (MKN) .

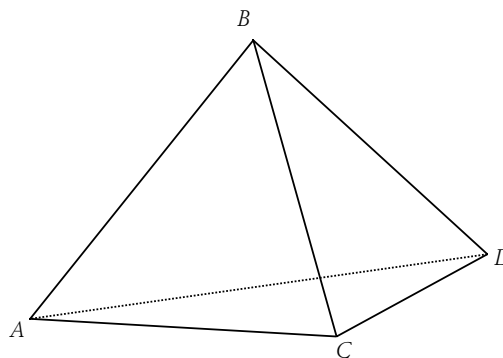
b. Quelle est la valeur du produit scalaire $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK}$? En déduire que (IJ) est orthogonale à la droite (AB) .

Montrer de même que (IJ) est orthogonale à la droite (CD) .

c. Montrer que G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$.

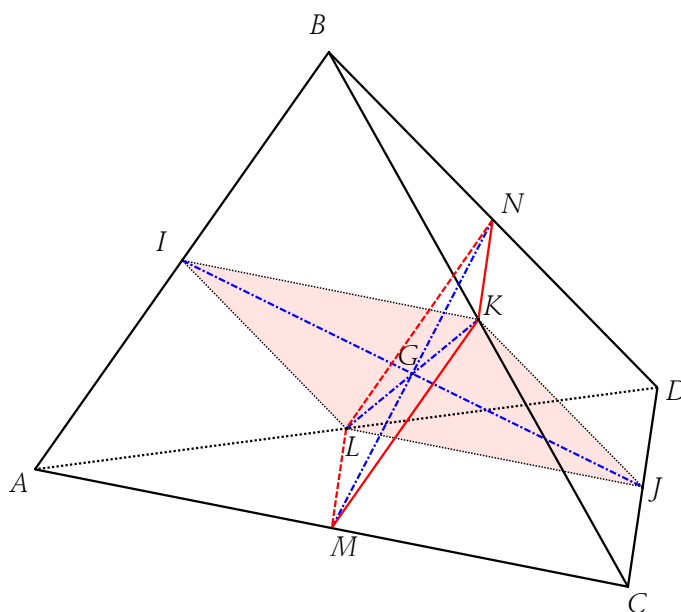
d. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Comment démontrerait-on que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$?



Correction

1. G est le barycentre de $\{(A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$; c'est donc celui de $\{(I, 2), (J, 2)\}$, de $\{(K, 2), (L, 2)\}$ et de $\{(M, 2), (N, 2)\}$ en utilisant les barycentres partiels. Donc G est sur chacune des droites (IJ) , (KL) et (MN) qui sont bien sécantes en G .



Dans la suite de l'exercice on suppose que $AB = CD$, $BC = AD$ et $AC = BD$. (On dit que le tétraèdre $ABCD$ est équi-facial car ses faces sont isométriques).

2. a. On a (IK) et (LJ) parallèles à (AC) par Thalès ainsi que $IK = LJ = \frac{1}{2} AC$; de même (JK) et (LI) sont parallèles à (BD) et $JK = LI = \frac{1}{2} BD$; c'est donc un parallélogramme et comme $AC = BD$ les quatre côtés ont même longueur, c'est un losange. Le même raisonnement est valable pour les losanges $IMJN$ et $KNLM$.

b. Dans un losange les diagonales sont orthogonales donc (IJ) et (KL) sont orthogonales. De même (IJ) et (MN) sont orthogonales et (KL) et (MN) sont orthogonales.

3. a. La droite (IJ) est orthogonale à (MN) et (KL) , soit deux droites distinctes du plan (MKN) . (IJ) est orthogonale au plan (MKN) .

b. Évidemment $\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0 \dots$ et comme (MK) est parallèle à (AB) , (IJ) est orthogonale à la droite (AB) .

On rappelle qu'une droite orthogonale à un plan est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

(IJ) est orthogonale au plan (MKN) , aux droites (ML) et (NK) et donc à la droite (CD) .

c. G appartient aux plans médiateurs de $[AB]$ et $[CD]$ si on a $GA = GB$ et $GC = GD$.

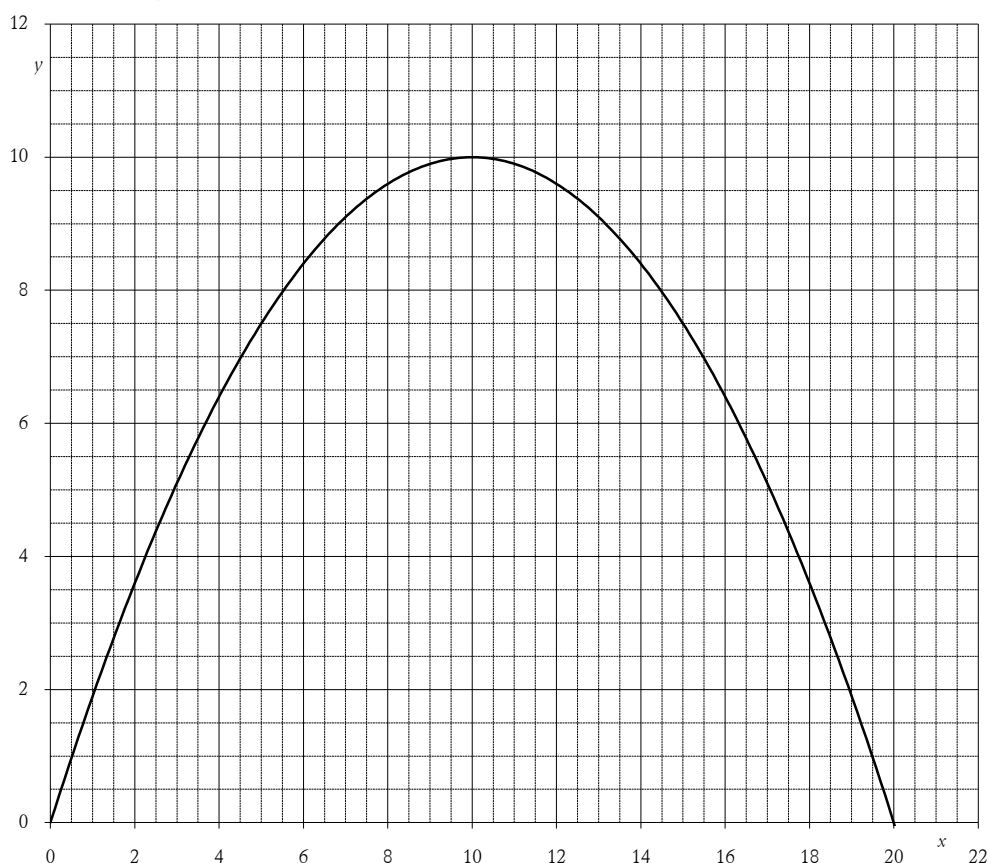
Par exemple on a $GA^2 = GI^2 + AI^2 = GI^2 + BI^2 = GB^2$ car (GI) est orthogonale à (AB) .

d. Pour démontrer que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, il faut montrer que $GA = GB = GC = GD$; on a déjà $GA = GB$ et $GC = GD$, il reste à montrer que $GB = GC$, ou encore que (GK) est orthogonale à (BC) , ce qui s'obtient comme précédemment.

1. 29. Pondicherry 06/2008 (c) 7 points

On cherche à modéliser de deux façons différentes l'évolution du nombre, exprimé en millions, de foyers français possédant un téléviseur à écran plat en fonction de l'année.

Les parties A et B sont indépendantes



Partie A : un modèle discret

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n .

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10} u_n (20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur $[0 ; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10} x(20 - x)$.

a. Étudier les variations de f sur $[0 ; 20]$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0 ; 20]$, $f(x) \in [0 ; 10]$.

c. On donne ci-dessus la courbe représentative C de la fonction f dans un repère orthonormal. Représenter à l'aide de ce graphique les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ sur l'axe des abscisses.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente et déterminer sa limite.

Partie B : un modèle continu

Soit $g(x)$ le nombre, exprimé en millions, de tels foyers l'année x . On pose $x = 0$ en 2005, $g(0) = 1$ et g est une solution qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (E) : $y' = \frac{1}{20}y(10 - y)$.

1. On considère une fonction y qui ne s'annule pas sur $[0 ; +\infty[$ et on pose $z = \frac{1}{y}$.

a. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si z est solution de l'équation différentielle : (E₁) :

$$z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. Résoudre l'équation (E₁) et en déduire les solutions de l'équation (E).

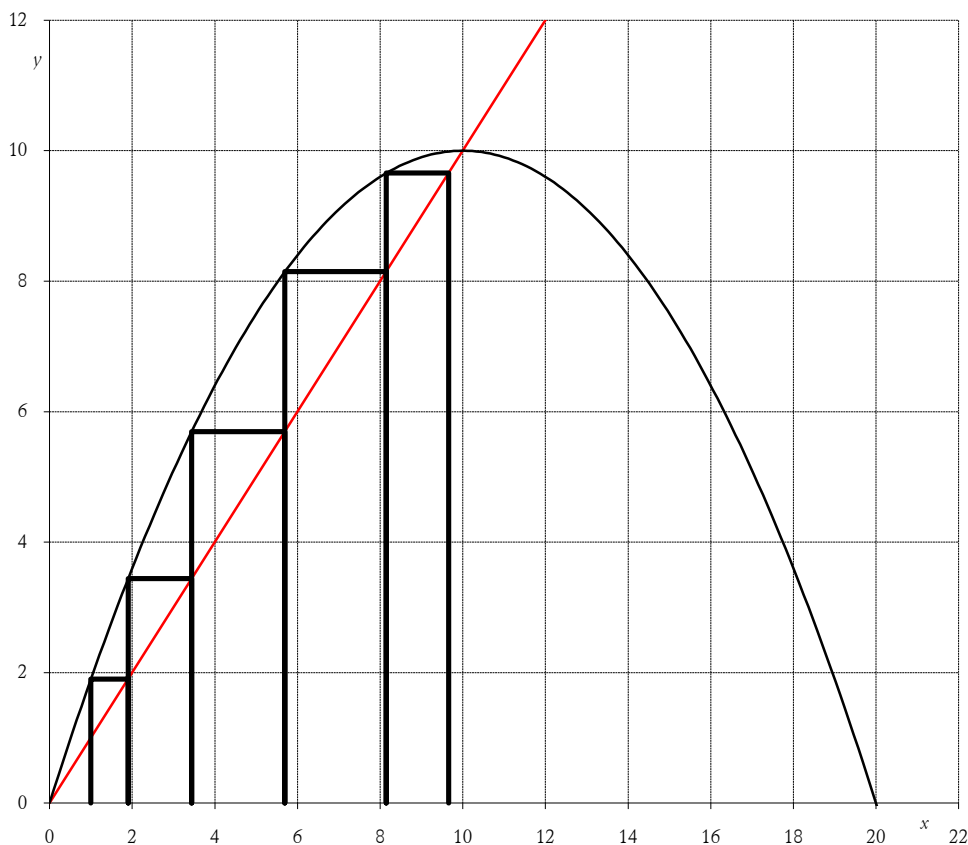
2. Montrer que g est définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

3. Étudier les variations de g sur $[0 ; +\infty[$.

4. Calculer la limite de g en $+\infty$ et interpréter le résultat.

5. En quelle année le nombre de foyers possédant un tel équipement dépassera-t-il 5 millions ?

Correction



Partie A : un modèle discret

$$u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n) = f(u_n).$$

1. a. $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x) = -0,1x^2 + 2x \Rightarrow f'(x) = -0,2x + 2$, positive lorsque $x < 10$, donc f est croissante jusqu'à 10, décroissante après.

b. On a $f(0) = f(20) = 0$ et $f(10) = 10$ donc $0 \leq f(x) \leq 10$ lorsque $x \in [0; 20]$.

c. Voir figure.

2. $u_1 = 0,1 \times 1 \times 19 = 1,9$ donc $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10$.

Par ailleurs si $0 \leq u_n \leq 10$, alors comme f est croissante, $f(0) \leq f(u_n) \leq f(10) \Leftrightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 10$. Il reste à montrer que u_n est croissante : si $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \Leftrightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

3. u_n est croissante et majorée, elle converge vers le point d'intersection entre la courbe de f et la droite $y = x$, soit 10.

Partie B : un modèle continu

1. a. $z = \frac{1}{y} \Leftrightarrow y = \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2}$, remplaçons dans (E) :

$$y' = \frac{1}{20}y(10 - y) \Leftrightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{1}{20z}\left(10 - \frac{1}{z}\right) = \frac{z}{2z^2} - \frac{1}{20z^2} \Leftrightarrow z' = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{20}.$$

b. (E_1) a comme solutions les fonctions $z = Ce^{-\frac{1}{2}x} - \frac{1/20}{-1/2} = Ce^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}$ et donc les solutions de l'équation

$$(E) \text{ sont } y = \frac{1}{z} = \frac{1}{Ce^{-\frac{1}{2}x} + \frac{1}{10}} = \frac{10}{10Ce^{-\frac{1}{2}x} + 1}.$$

2. Comme $g(0) = 1$, on a $\frac{10}{10Ce^0 + 1} = 1 \Leftrightarrow 10 = 10C + 1 \Leftrightarrow 10C = 9$ et donc $g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1}$.

$$3. g'(x) = -\frac{10\left(9 \times -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}\right)}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} = \frac{45e^{-\frac{1}{2}x}}{\left(9e^{-\frac{1}{2}x} + 1\right)^2} > 0 \text{ donc } g \text{ croît...}$$

4. En $+\infty$ $e^{-\frac{1}{2}x}$ tend vers 0 et g tend vers 10.

Il y a saturation du marché qui ne peut dépasser plus de 10 millions de foyers équipés.

$$5. g(x) = \frac{10}{9e^{-\frac{1}{2}x} + 1} \geq 5 \Leftrightarrow 45e^{-\frac{1}{2}x} + 5 \leq 10 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}x} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x \leq -\ln 9 \Leftrightarrow x \geq 2\ln 9 \approx 4,39, \text{ donc en 2010.}$$

1. 30. Pondicherry 06/2008 (c) 5 points spécialistes

Partie A

On suppose connu le résultat suivant :

Une application f du plan muni d'un repère orthonormal direct dans lui-même est une similitude directe si et seulement si f admet une écriture complexe de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration de cours : on se place dans le plan complexe.

Démontrer que si A, B, A' et B' sont quatre points tels que A est distinct de B et A' est distinct de B' , alors il existe une unique similitude directe transformant A en A' et B en B' .

Partie B

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

- Donner le module et un argument de chacun des quatre nombres complexes z_A, z_B, z_C et z_D .
- Construire à la règle et au compas les points A, B, C et D (on prendra pour unité graphique 2 cm).
- Déterminer le milieu du segment $[AC]$, celui du segment $[BD]$. Calculer le quotient $\frac{z_B}{z_A}$. En déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

- Déterminer les éléments caractéristiques de g .
- Construire à la règle et au compas les images respectives E, F et J par g des points A, C et O .
- Que constate-t-on concernant ces points E, F et J ? Le démontrer.

Correction

Partie A

Démonstration de cours : On a les affixes a, a', b et b' . Si on a une similitude directe, celle-ci s'écrit $z' = \alpha z + \beta$; il suffit donc de trouver α et β en fonction de a, a', b et b' .

$$\begin{cases} A \rightarrow A' \\ B \rightarrow B' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \alpha a + \beta \\ b' = \alpha b + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = \alpha a + \beta \\ b' - a' = \alpha(b - a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{b' - a'}{b - a} \\ \beta = a' - \alpha a \end{cases} ; \text{valable si } a \neq b, \text{ soit } A \text{ et } B \text{ distincts.}$$

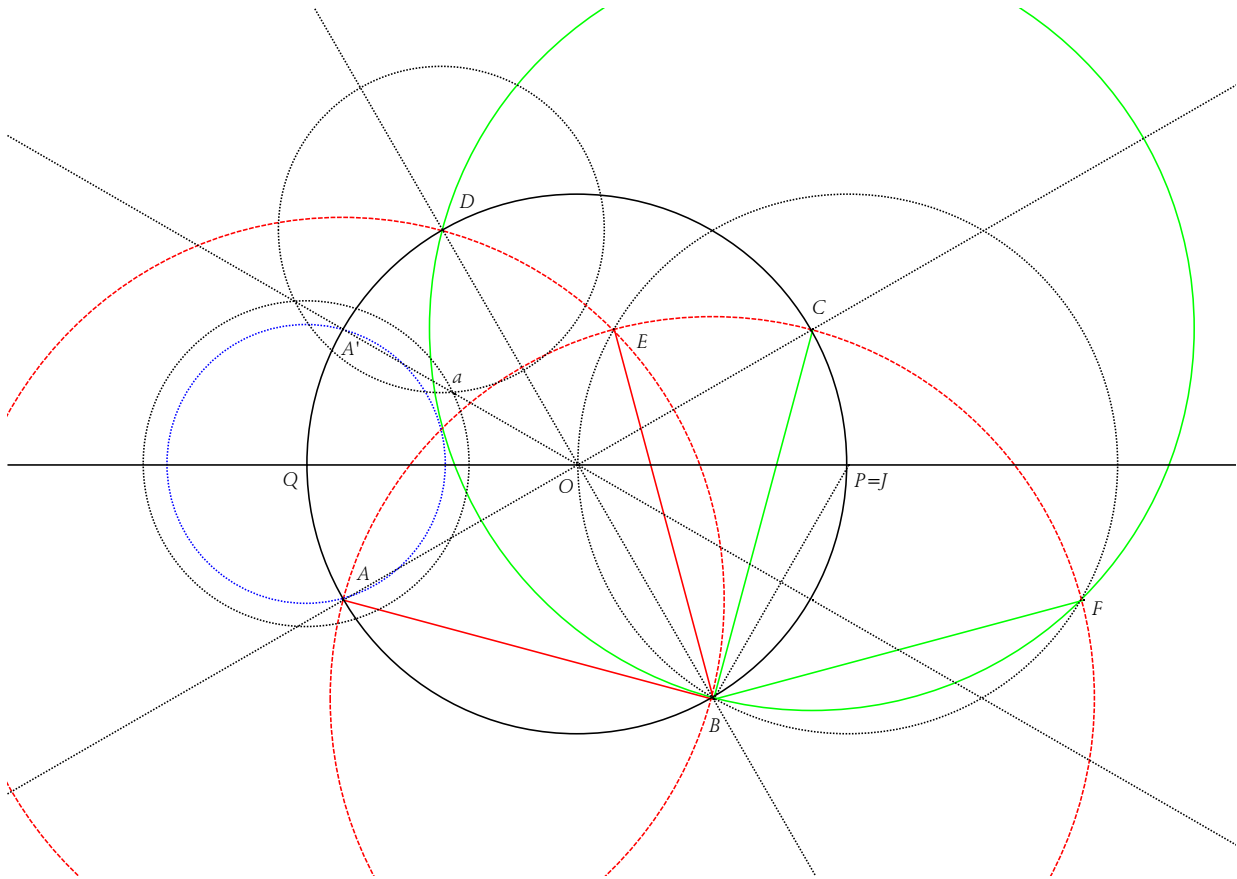
Partie B

$z_A = -\sqrt{3} - i$, $z_B = 1 - i\sqrt{3}$, $z_C = \sqrt{3} + i$ et $z_D = -1 + i\sqrt{3}$.

$$1. a. z_A = -\sqrt{3} - i = 2 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}} ; z_B = 1 - i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} ;$$

$$z_C = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} ; z_D = -1 + i\sqrt{3} = 2 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} .$$

- Les points sont sur le cercle de centre O , de rayon 2 (cercle de diamètre $[PQ]$); B est un sommet de triangle équilatéral, D est diamétralement opposé à B , A' est sur la bissectrice de QOD et A est tel que l'arc $AQ = QA'$; C est diamétralement opposé à A (traits pointillés noirs sur la figure).



c. $z_A + z_C = 0$, $z_B + z_D = 0$, le milieu est O . $\frac{z_B}{z_A} = \frac{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2e^{-i\frac{5\pi}{6}}} = e^{-i\frac{\pi}{3} + i\frac{5\pi}{6}} = e^{-i\frac{3\pi}{6}} = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ donc (OA) et (OB) sont orthogonales de même que (AC) et (BD) . $ABCD$ est un carré : diagonales se coupant à angle droit en leur milieu et de même longueur.

2. On considère la similitude directe g dont l'écriture complexe est $z' = e^{-i\frac{\pi}{3}}z + 2$.

a. $\omega = e^{-i\frac{\pi}{3}}\omega + 2 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\omega = 2 \Leftrightarrow \omega = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$: g est la rotation de centre B , d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

b. J est déjà construit puisqu'il s'agit de P . Par ailleurs il s'agit de triangles équilatéraux : on construit les deux cercles de rayon AB , de centre A et de centre B ; une des deux intersections est E ; même chose avec les cercles de rayon BC , de centres B et C (en rouge et vert sur la figure).

c. E, J et F sont alignés : $z_{\overline{JE}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A + 2 - 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_A$; $z_{\overline{JF}} = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_C + 2 - 2 = e^{-i\frac{\pi}{3}}z_C$ et $z_C = -z_A$ donc $\overline{JE} = -\overline{JF} \Leftrightarrow \overline{JE} = \overline{FJ}$: J est le milieu de $[EF]$.

On aurait pu utiliser le fait que O est le milieu de A et C , soit en faisant la rotation on garde l'alignement et le milieu.

1. 7. Amérique du Nord 06/2008

1. 31. Amérique du Nord 06/2008 (c) 5 points

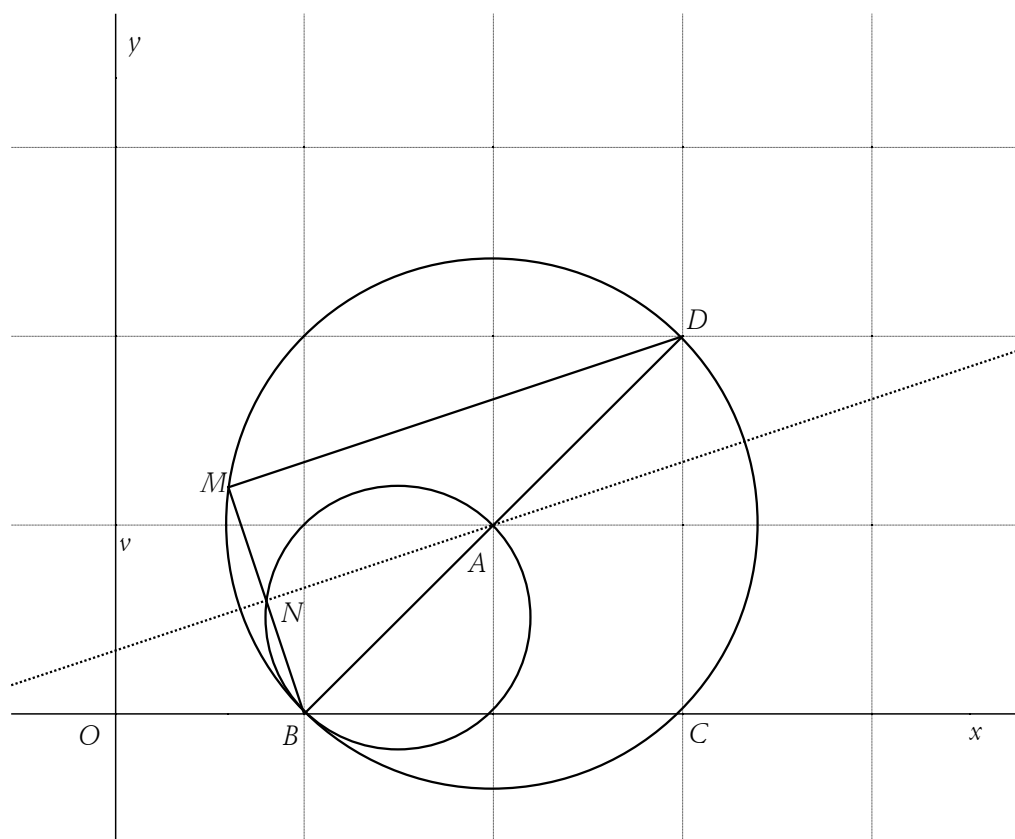
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique : 4 cm.

On considère le point A d'affixe $z_A = 2 + i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

1. Faire une figure qui sera complétée tout au long de l'exercice.
2. a. Déterminer les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O; \vec{u})$.
b. On désigne par B et C les points d'affixes respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$.
Déterminer l'affixe z_D du point D diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ) .
3. Soit M le point d'affixe $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.
a. Calculer le nombre complexe $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$.
b. Interpréter géométriquement un argument du nombre $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$; en déduire que le point M appartient au cercle (Γ) .
4. On note (Γ') le cercle de diamètre $[AB]$. La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N .
a. Montrer que les droites (DM) et (AN) sont parallèles.
b. Déterminer l'affixe du point N .
5. On désigne par M' l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
a. Déterminer l'affixe du point M' .
b. Montrer que le point M' appartient au cercle (Γ') .

Correction

1.



2. a. (Γ) a une équation de la forme $(x-2)^2 + (y-1)^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$.

$$M(x; y) \in (\Gamma) \cap (O; \vec{u}) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 1 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Par conséquent, les affixes des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O; \vec{u})$ sont respectivement 1 et 3.

b. D est diamétralement opposé à B sur (Γ) donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$, d'où $z_D - z_A = z_A - z_B$, soit $z_D = 2z_A - z_B = 2(2+i) - 1 = 3+2i$.

D a pour affixe $3+2i$.

$$3. a. \frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \frac{(3+2i) - \left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i\right)}{1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i\right)} = \frac{\frac{2}{5}(6+2i)}{\frac{2}{5}(1-3i)} = \frac{(6+2i)(1+3i)}{1^2+3^2} = \frac{20i}{10} = 2i, \text{ d'où } \frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = 2i.$$

b. Un argument de $\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}$ est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD})$.

$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD}) = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$; le triangle BMD est rectangle en M ; M appartient alors au cercle de diamètre $[BD]$, le point M appartient au cercle (Γ) .

4. a. Comme N appartient au cercle (Γ') , le triangle ANB est rectangle en N , les droites (AN) et (BM) sont donc orthogonales.

De plus les droites (MD) et (BM) sont orthogonales d'après la question précédente.

Par conséquent, les droites (AN) et (MD) , orthogonales à la même droite, sont parallèles entre elles.

b. Dans le triangle BMD les droites (AN) et (MD) sont parallèles et A est le milieu de $[BD]$; d'après le théorème des milieux la droite (AN) coupe le segment $[MB]$ en son milieu. Donc N est le milieu de

$$[MB], \quad z_N = \frac{z_B + z_M}{2} = \frac{1 + \left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i\right)}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i.$$

5. a. L'écriture complexe de la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ est : $z' - z_B = e^{-i\frac{\pi}{2}}(z - z_B)$, c'est-à-dire

$$z' = -iz + 1 + i. \text{ Alors } z_{M'} = -i\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i\right) + 1 + i = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i.$$

$$b. \overrightarrow{AM'} \cdot \overrightarrow{BM'} = \left(\frac{11}{5} - 2\right)\left(\frac{11}{5} - 1\right) + \left(\frac{2}{5} - 1\right)\left(\frac{2}{5} - 0\right) = \frac{1}{5} \times \frac{6}{5} + \left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} - \frac{6}{25} = 0.$$

Le triangle ABM' est rectangle en M' et est inscrit dans le cercle de diamètre $[AB]$. Par conséquent, le point M' appartient au cercle (Γ') .

1. 32. Amérique du Nord 06/2008 (c) 5 points non spécialistes

Partie A

On considère deux points A et D de l'espace et on désigne par I le milieu du segment $[AD]$.

1. Démontrer que, pour tout point M de l'espace, $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = MI^2 - AI^2$.

2. En déduire l'ensemble (E) des points M de l'espace, tels que $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$.

Partie B

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives : $A(3; 0; 0), B(0; 6; 0), C(0; 0; 4)$ et $D(-5; 0; 1)$.

1. a. Vérifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) .

b. Déterminer une équation du plan (ABC) .

2. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , orthogonale au plan (ABC) et passant par D .

b. En déduire les coordonnées du point H , projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .

c. Calculer la distance du point D au plan (ABC) .

d. Démontrer que le point H appartient à l'ensemble (E) défini dans la partie A.

Correction

Partie A

1. $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = MI^2 - IA^2$ car I est le milieu de $[AD]$.

2. M appartient à (E) équivaut à $\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{MA} = 0$, c'est-à-dire à $MI^2 - IA^2 = 0$, ou encore à $MI = IA$. Par conséquent (E) est la sphère de centre I et de rayon IA .

Partie B

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ont pour coordonnées respectives $(-3; 6; 0)$ et $(-3; 0; 4)$.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times (-3) + 2 \times 6 + 3 \times 0 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times (-3) + 2 \times 0 + 3 \times 4 = 0$; $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires du plan (ABC) . $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

b. M un point de (ABC) : $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x-3) \times 4 + y \times 2 + z \times 3 = 0 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3z - 12 = 0$.

2. a. Comme Δ est orthogonale au plan (ABC) , elle a pour vecteur directeur $\vec{n}$.

$$M(x; y; z) \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{DM} = k \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5=4k \\ y-0=2k \\ z-1=3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4k-5 \\ y=2k \\ z=3k+1 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

b. Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) . H est donc le point d'intersection de la droite Δ et du plan (ABC) . On remplace x , y et z dans l'équation de (ABC) :

$$4(4k-5) + 2 \times 2k + 3(3k+1) - 12 = 0 \Leftrightarrow 29k - 29 = 0 \Leftrightarrow k = 1; H \text{ a pour coordonnées } (-1; 2; 4).$$

$$c. d(D, (ABC)) = \frac{|4x_D + 2y_D + 3z_D - 12|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{|-20 + 0 + 3 - 12|}{\sqrt{29}} = \frac{29}{\sqrt{29}} = \sqrt{29}.$$

d. $\overrightarrow{HD} = (-4; -2; -3)$ et $\overrightarrow{HA} = (4; -2; -4)$: $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HA} = -16 + 4 + 12 = 0$, H appartient à (E) .

1. 33. Amérique du Nord 06/2008 (c) 5 points spécialistes

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On nomme (S) la surface d'équation $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

1. Montrer que la surface (S) est symétrique par rapport au plan (xOy) .

2. On nomme A et B les points de coordonnées respectives $(3; 1; -3)$ et $(-1; 1; 1)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par les points A et B .

b. Démontrer que la droite (D) est incluse dans la surface (S) .

3. Déterminer la nature de la section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy) .

4. a. On considère la courbe (C) , intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$. Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe.

b. M étant un point de (C) , on désigne par a son abscisse et par b son ordonnée.

On se propose de montrer qu'il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a; b) = 440$, c'est-à-dire tel que (a, b) soit solution du système

$$(1) : \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a; b) = 440 \end{cases}.$$

Montrer que si (a, b) est solution de (1) alors $\text{pgcd}(a; b)$ est égal à 1 ou 5.

Conclure.

Dans cette question toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative, même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.

Correction

1. Si $M(x; y; z)$ appartient à (S) , alors on a $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, soit $x^2 + y^2 - (-z)^2 = x^2 + y^2 - z^2 = 1$, c'est-à-dire que le point M' de coordonnées $(x; y; -z)$ appartient également à (S) et réciproquement.

Par conséquent, le plan d'équation $z = 0$, c'est-à-dire le plan (xOy) , est un plan de symétrie de la surface (S) .

$$2. a. M \in (D) \Leftrightarrow \overline{AM} = k\overline{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = -4k \\ y-1 = 0k \\ z+3 = 4k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4k+3 \\ y = 1 \\ z = 4k-3 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

b. On remplace x, y et z dans l'équation de (S) :

$$x^2 + y^2 - z^2 = (-4k+3)^2 + 1^2 - (4k-3)^2 = 16k^2 - 24k + 9 + 1 - 16k^2 + 24k - 9 = 1, \text{ ce qui est toujours vrai.}$$

On en déduit que tout point de (D) appartient à (S) , la droite est incluse dans la surface (S) .

3. Soit (P) un plan parallèle au plan (xOy) . (P) a alors une équation de la forme $z = c$ où c est un réel, soit $x^2 + y^2 = c^2 + 1$ qui est l'équation d'un cercle de centre $\Omega(0; 0; c)$ et de rayon $\sqrt{1+c^2}$, tracé dans (P) . La section de la surface (S) par un plan parallèle au plan (xOy) est un cercle.

4. a. Soit (C) la courbe d'intersection de la surface (S) et du plan d'équation $z = 68$.

D'après la question précédente (C) est le cercle de centre $\Omega(0; 0; 68)$ et de rayon $\sqrt{1+68^2} = 5\sqrt{185}$, tracé dans le plan d'équation $z = 68$.

$$b. \text{ Soit } (a; b) \text{ une solution de (1). Alors : } \begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a; b) = 440 \end{cases}.$$

d le PGCD de a et b divise a (et aussi a^2) et divise b (et aussi b^2), d'où d divise $a^2 + b^2$; d divise 4625.

De plus, d divise le PPCM de a et b . Donc d divise 440, d est un diviseur commun de 440 et de 4625.

Or les diviseurs de 4625 sont : 1 ; 5 ; 25 ; 37 ; 125 ; 185 ; 925 et 4625.

Les diviseurs de 440 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 11 ; 20 ; 22 ; 40 ; 44 ; 55 ; 88 ; 110 ; 220 et 440.

d ne peut être égal qu'à 1 ou à 5.

* $d = 1$, $ab = \text{pgcd}(a; b) \times \text{ppcm}(a; b)$, c'est-à-dire $ab = 1 \times 440 = 440$.

a et b sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 440.

Or $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 880 = 5505$; ce qui est impossible car $a+b$ est un entier naturel (en tant que somme de deux entiers naturels). Il n'y a dans ce cas aucun couple solution de ce système.

* Supposons que $d = 5$; alors $ab = \text{pgcd}(a; b) \times \text{ppcm}(a; b)$, c'est-à-dire $ab = 5 \times 440 = 2200$.

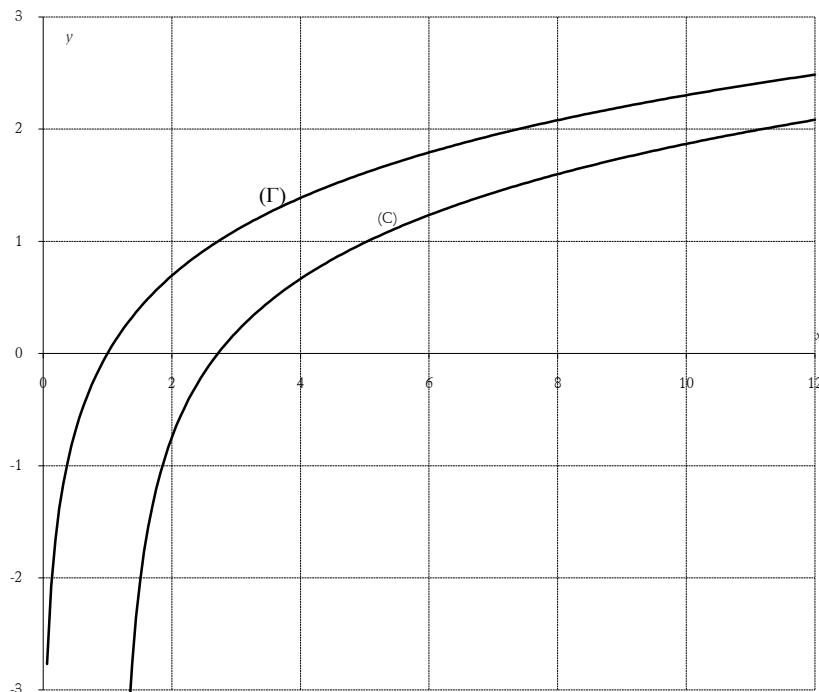
a et b sont donc des diviseurs de 440 dont la somme des carrés est égale à 4625 et le produit à 2200.

Or $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 4625 + 4400 = 9025$, soit $a+b = 95$.

Seul le couple $(40 ; 55)$ est solution de ce système dans ce cas.

Il existe un seul point M de (C) tel que a et b soient des entiers naturels vérifiant $a < b$ et $\text{ppcm}(a ; b) = 440$.

1. 34. Amérique du Nord 06/2008 (c) 6 points



Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$.

On nomme (C) la courbe représentative de f et (Γ) la courbe d'équation $y = \ln x$ dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les variations de la fonction f et préciser les limites en 1 et en $+\infty$.

2. a. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln x]$. Interpréter graphiquement cette limite.

b. Préciser les positions relatives de (C) et de (Γ) .

3. On se propose de chercher les tangentes à la courbe (C) passant par le point O .

a. Soit a un réel appartenant à l'intervalle $]1 ; +\infty[$. Démontrer que la tangente T_a à (C) au point d'abscisse a passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - xf'(x)$.

b. Montrer que sur $]1 ; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

c. Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, montrer que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

d. En déduire l'existence d'une tangente unique à la courbe (C) passant par le point O .

La courbe (C) et la courbe (Γ) sont données ci-dessus. Tracer cette tangente le plus précisément possible sur cette figure.

4. On considère un réel m et l'équation $f(x) = mx$ d'inconnue x .

Par lecture graphique et sans justification, donner, suivant les valeurs du réel m , le nombre de solutions de cette équation appartenant à l'intervalle $]1; 10]$.

Correction

1. On a $f = u - \frac{1}{u}$, avec $u(x) = \ln x$, dérivable et qui ne s'annule pas sur $]1; +\infty[$. Donc f est dérivable sur $]1; +\infty[$ en tant que différence de deux fonctions dérivables sur $]1; +\infty[$.

$$f' = u' - \left(\frac{1}{u}\right)' = u' - \frac{-u'}{u^2} = u' + \frac{u'}{u^2} \text{ avec } u'(x) = \frac{1}{x}. \text{ Donc } f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{(\ln x)^2}\right).$$

Comme $x > 1$, $\frac{1}{x} > 0$ et $1 + \frac{1}{(\ln x)^2} > 0$, c'est-à-dire $f'(x) > 0$. f est strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (\ln x) = 0^+ \text{ d'où } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{(\ln x)} = +\infty, \text{ donc } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = -\infty \text{ (par somme des limites).}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\ln x)} = 0, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ (par somme des limites).}$$

2. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x}\right) = 0$. Les courbes (C) et (Γ) sont asymptotes en $+\infty$.

b. $f(x) - \ln x = -\frac{1}{\ln x}$; or, pour $x > 1$, $\ln x > 0$; donc $f(x) - \ln x < 0$, (C) est en dessous de (Γ) .

3. a. T_a a pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a) = f'(a)x + (f(a) - af'(a))$; T_a passe par l'origine du repère si $0 = f'(a) \times 0 + f(a) - af'(a) \Leftrightarrow f(a) - af'(a) = 0$.

b. $g(x) = 0$ équivaut à $f(x) - xf'(x) = 0$; or $f'(x) = \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{(\ln x)^2}\right)$ et $f(x) = \ln x - \frac{1}{\ln x}$, soit :

$$\ln x - \frac{1}{\ln x} - x \times \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{(\ln x)^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{\ln x} - 1 - \frac{1}{(\ln x)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1}{(\ln x)^2} = 0.$$

Par conséquent les équations $g(x) = 0$ et $(\ln x)^3 - (\ln x)^2 - \ln x - 1 = 0$ ont les mêmes solutions.

c. $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (t-1)(3t+1)$. $u'(t) \geq 0$ pour t appartenant à $\left]-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup [1; +\infty[$ et $u'(t) \leq 0$ pour t appartenant à $\left[-\frac{1}{3}; 1\right]$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$u'(t)$		+	0	-	0	+
u	$-\infty$	$\nearrow$ $-\frac{22}{27}$ $\searrow$		-2	$\nearrow$ $+\infty$	

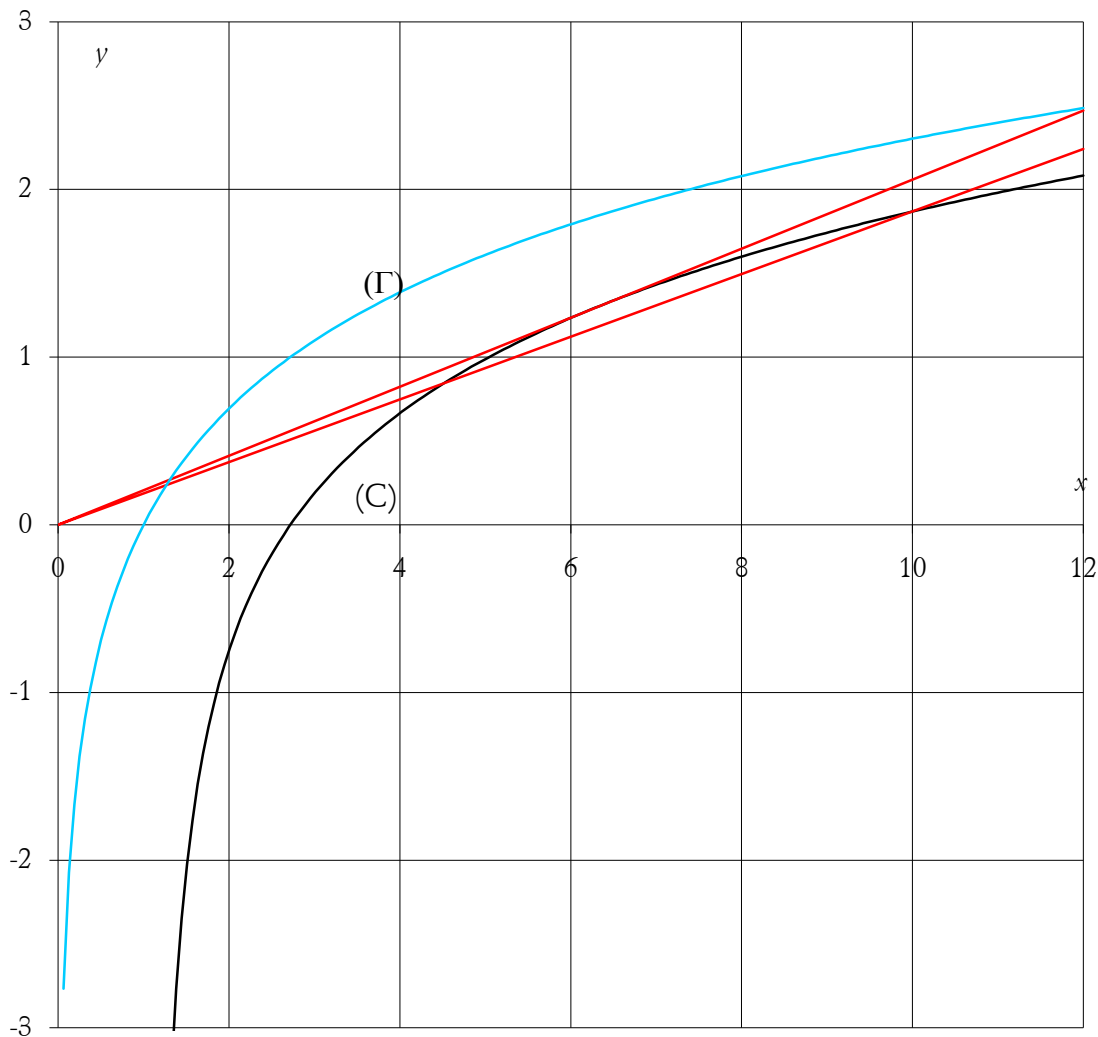
Avant 1 le maximum de u est négatif; après 1, u passe de -2 à $+\infty$, on en déduit que la fonction u s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.

d. T_a passe par l'origine du repère si $(\ln x)^3 - \ln x - (\ln x)^2 - 1 = 0$, c'est-à-dire si $u(\ln x) = 0$. Or la question 3. c. prouve que cette équation n'admet qu'une solution, que l'on notera a_0 , sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de la calculatrice, on trouve $a_0 \approx 6,29$: il n'existe qu'une seule tangente à (C) passant par l'origine du repère.

4. Par lecture graphique : résoudre $f(x) = mx$ revient à chercher l'intersection entre (C) et les droites passant par l'origine et de pente m ; on a donc pour $1 \leq x \leq 10$ et $m_0 = \frac{f(10)}{10}$:

- si $m \leq m_0$ l'équation $f(x) = mx$ admet une seule solution ;
- si $m_0 \approx 0,187 \leq m \leq f'(a_0) \approx 0,2$ l'équation $f(x) = mx$ admet deux solutions ;
- si $m > f'(a_0)$ l'équation $f(x) = mx$ n'admet aucune solution.



1. 35. Amérique du Nord 06/2008 (c) 4 points

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies pour tout entier naturel n non nul par : $x_n = \int_0^1 t^n \cos t dt$ et

$$y_n = \int_0^1 t^n \sin t dt.$$

1. a. Montrer que la suite (x_n) est à termes positifs.

b. Étudier les variations de la suite (x_n) .

c. Que peut-on en déduire quant à la convergence de la suite (x_n) ?

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b. En déduire la limite de la suite (x_n) .

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

b. En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$. Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n$.

Correction

1. a. Pour tout réel t de $[0; 1]$, $\cos t > 0$ et $t^n \geq 0$; la fonction $t \mapsto t^n \cos t$ est positive sur l'intervalle $[0; 1]$. De plus, cette fonction est continue sur $[0; 1]$, par conséquent $\int_0^1 t^n \cos t \, dt \geq 0$, c'est-à-dire que $x_n \geq 0$ pour tout entier naturel n non nul.

b.

$$x_{n+1} - x_n = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt - \int_0^1 t^n \cos t \, dt = \int_0^1 (t^{n+1} \cos t - t^n \cos t) \, dt = \int_0^1 (t^{n+1} - t^n) \cos t \, dt = \int_0^1 t^n (t-1) \cos t \, dt$$

Sur $[0; 1]$, $t-1 \leq 0$, $t^n \geq 0$, $\cos t \geq 0$, la fonction $t \mapsto (t-1)t^n \cos t$ est négative et $\int_0^1 (t-1)t^n \cos t \, dt \leq 0$, $x_{n+1} - x_n \leq 0$: (x_n) est décroissante.

c. Comme (x_n) est décroissante et minorée par 0, (x_n) est convergente.

2. a. $0 < \cos t \leq 1$, soit $0 < t^n \cos t \leq t^n$ et $0 < \int_0^1 t^n \cos t \, dt \leq \int_0^1 t^n \, dt$. $\int_0^1 t^n \, dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \Rightarrow x_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b. Comme $0 < x_n \leq \frac{1}{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$.

3. a. $x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt$. Posons $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t^{n+1}$, alors $u(t) = \sin t$ et $v'(t) = (n+1)t^n$:

$$x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos t \, dt = \left[t^{n+1} \sin t \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)t^{n+1} \sin t \, dt = (\sin(1) - 0) - (n+1) \int_0^1 t^{n+1} \sin t \, dt$$

donc $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

b. On a $y_n = \frac{\sin(1) - x_{n+1}}{n+1}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{n+1} = 0$ (d'après la question 2. b.) d'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin(1) - x_{n+1}) = \sin(1)$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) = +\infty$; donc, par quotient des limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$.

4. $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$.

Alors $nx_n = y_{n+1} - x_n + \cos(1)$; or $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{n+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} nx_n = \cos(1)$.

On sait que $y_n = \frac{\sin(1) - x_{n+1}}{n+1}$, soit $ny_n = \frac{n}{n+1}(\sin(1) - x_{n+1})$; comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sin(1) - x_{n+1}) = \sin(1)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$ (car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$), on a par conséquent, $\lim_{n \rightarrow +\infty} ny_n = \sin(1)$.

1. 8. Antilles – Guyane 06/2008

1. 36. Antilles - Guyane 06/2008 6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x} - 3e^{-3x}$.

Partie A

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 3e^{-3x}$.

- Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
- En déduire que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{9}{2}e^{-2x}$ est solution de (E').
- Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3e^{-3x}$ est solution de l'équation (E).
- En remarquant que $f = g + h$, montrer que f est une solution de (E).

Partie B

On nomme C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm.

- Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$ on a : $f(x) = 3e^{-2x} \left(\frac{3}{2} - e^{-x} \right)$.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis la limite de f en $-\infty$.
- Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f .
- Calculer les coordonnées des points d'intersection de la courbe C_f avec les axes du repère.
- Calculer $f(1)$ et tracer l'allure de la courbe C_f .
- Déterminer l'aire A de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe C_f , l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. On exprimera cette aire en cm^2 .

1. 37. Antilles - Guyane juin 2008 5 points

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boule blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.

U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2 . On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2 . L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».

On note B_2 (respectivement N_2) l'événement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

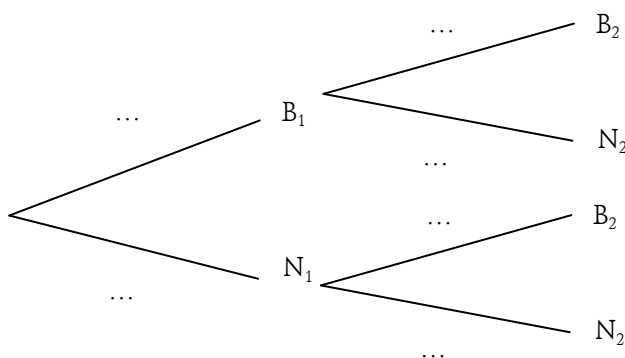
- a. Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-contre.

- b. Montrer que la probabilité de l'événement B_2 est égale à $\frac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.

Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

- Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve. Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur



reçoit 12 euros. Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise.

Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.

a. Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8 .

b. Déterminer la loi de probabilité de la variable X .

c. Calculer l'espérance mathématique de X .

d. Le jeu est-il favorable au joueur ?

3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.

Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire. Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.

Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'événement B_2 soit supérieure ou égale à 0,99.

1. 38. Antilles - Guyane 06/2008 4 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :
$$\begin{cases} 2x - 6y + 2z - 7 = 0 \\ -x + 3y - z + 5 = 0 \end{cases}$$
 est :

Réponse A : l'ensemble vide	Réponse B : une droite
Réponse C : un plan	Réponse D : réduit à un point.

2. Les droites de représentations paramétriques respectives :
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + t, t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - 3t \end{cases}$$
 et
$$\begin{cases} x = 2 + t' \\ y = -2 - t', t' \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 2t' \end{cases}$$
 sont :

Réponse A : parallèles et distinctes	Réponse B : confondues
Réponse C : sécantes	Réponse D : non coplanaires

3. La distance du point $A(1; -2; 1)$ au plan d'équation $-x + 3y - z + 5 = 0$ est égale à :

Réponse A : $\frac{3}{11}$	Réponse B : $\frac{3}{\sqrt{11}}$
Réponse C : $\frac{1}{2}$	Réponse D : $\frac{8}{\sqrt{11}}$.

4. Le projeté orthogonal du point $B(1; 6; 0)$ sur le plan d'équation $-x + 3y - z + 5 = 0$ a pour coordonnées :

Réponse A : $(3; 1; 5)$	Réponse B : $(2; 3; 1)$
Réponse C : $(3; 0; 2)$	Réponse D : $(-2; 3; -6)$

1. 39. Antilles - Guyane 06/2008 5 points

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le point A a pour affixe i .

On nomme f l'application qui, à tout point M d'affixe z avec $z \neq i$ associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{-z^2}{z-i}.$$

Le but de l'exercice est de construire géométriquement le point M' connaissant le point M .

1. Un exemple : on considère le point K d'affixe $1 + i$.

a. Placer le point K .

b. Déterminer l'affixe du point K' image de K par f .

c. Placer le point K' .

2. Des points pour lesquels le problème ne se pose pas

a. On considère le point L d'affixe $\frac{i}{2}$. Déterminer son image L' par f . Que remarque t-on ?

b. Un point est dit invariant par f s'il est confondu avec son image.

Démontrer qu'il existe deux points invariants par f dont on déterminera les affixes.

3. Un procédé de construction

On nomme G l'isobarycentre des points A , M , et M' , et g l'affixe de G .

a. Vérifier l'égalité $g = \frac{1}{3(z-i)}$.

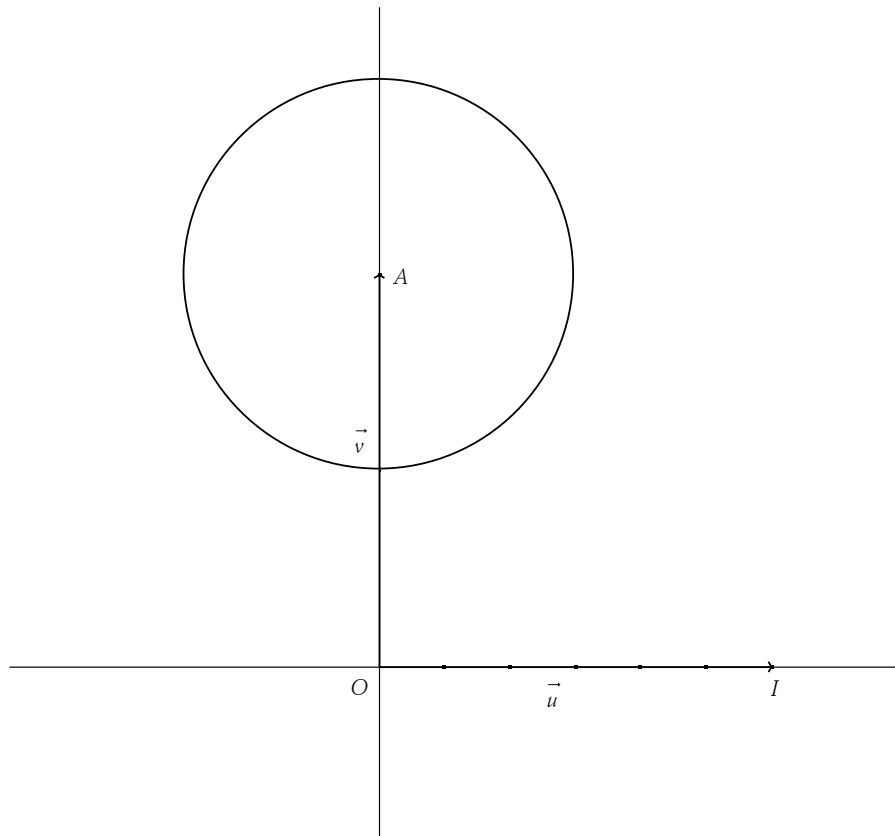
b. En déduire que : si M est un point du cercle de centre A de rayon r , alors G est un point du cercle de centre O de rayon $\frac{1}{3r}$.

c. Démontrer que $\arg(g) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AM})$.

d. Sur la feuille annexe, on a marqué un point D sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$.

On nomme D' l'image de D par f . Déduire des questions précédentes la construction du point D' et la réaliser sur la figure.

Sur la figure ci-dessous le segment $[OI]$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$ est partagé en six segments d'égale longueur.



1. 9. Asie 06/2008

1. 40. Asie 06/2008 4 points

A. Vrai ou faux ?

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fautive et donner une démonstration de la réponse choisie. Dans le cas d'une proposition fautive la démonstration consistera à proposer un contre-exemple ; une figure pourra constituer ce contre-exemple.

Rappel des notations :

* $P_1 \cap P_2$ désigne l'ensemble des points communs aux plans P_1 et P_2 .

* L'écriture $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ signifie que les plans P_1 et P_2 n'ont aucun point commun.

1. Si P_1 , P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$, alors on peut conclure que P_1 et P_3 vérifient $P_1 \cap P_3 \neq \emptyset$.

2. Si P_1 , P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \emptyset$, alors on peut conclure que P_1 , P_2 et P_3 sont tels que $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 = \emptyset$.

3. Si P_1 , P_2 et P_3 sont trois plans distincts de l'espace vérifiant : $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ et $P_2 \cap P_3 = \emptyset$, alors on peut conclure que P_2 et P_3 vérifient $P_2 \cap P_3 \neq \emptyset$.

1. Si P_1 et P_2 sont deux plans distincts et D une droite de l'espace vérifiant : $P_1 \cap D \neq \emptyset$ et $P_1 \cap P_2 = \emptyset$, alors on peut conclure que $P_2 \cap D \neq \emptyset$.

B. Intersection de trois plans donnés

Dans un repère orthonormal de l'espace on considère les trois plans suivants :

* P_1 d'équation $x + y - z = 0$,

* P_2 d'équation $2x + y + z - 3 = 0$,

* P_3 d'équation

$x + 2y - 4z + 3 = 0$.

1. Justifier que les plans P_1 et P_2 sont sécants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection, notée Δ .

2. En déduire la nature de l'intersection $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

1. 41. Asie 06/2008 5 points

On considère plusieurs sacs de billes $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ tels que :

- le premier, S_1 , contient 3 billes jaunes et 2 vertes ;
- chacun des suivants, $S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ contient 2 billes jaunes et 2 vertes.

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille dans S_1 ;
- on place la bille tirée de S_1 dans S_2 , puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;
- on place la bille tirée de S_2 dans S_3 , puis on tire au hasard une bille dans S_3 ;
- etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'évènement : « la bille tirée dans S_n est verte » et on note $p(E_n)$ sa probabilité.

1. Mise en évidence d'une relation de récurrence

a. D'après l'énoncé, donner les valeurs de $p(E_1)$, $p_{E_1}(E_2)$, $p_{\overline{E_1}}(E_2)$. En déduire la valeur de $p(E_2)$.

b. À l'aide d'un arbre pondéré, exprimer $p(E_{n+1})$ en fonction de $p(E_n)$.

2. Étude d'une suite : on considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{2}{5} \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} \end{cases} \text{ pour tout } n \geq 1.$$

- Démontrer que la suite (u_n) est majorée par 1.
 - Démontrer que (u_n) est croissante.
 - Justifier que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.
3. Évolution des probabilités $p(E_n)$
- À l'aide des résultats précédents, déterminer l'évolution des probabilités $p(E_n)$.
 - Pour quelles valeurs de l'entier n a-t-on : $0,49999 \leq p(E_n) \leq 0,5$?

1. 42. Asie 06/2008 4 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour le dessin : $\|\vec{u}\| = 4 \text{ cm}$.

M est un point d'affixe z non nul. On désigne par M' le point d'affixe z' telle que $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$ où $\bar{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z .

A. Quelques propriétés

- Soit z un nombre complexe non nul.
Déterminer une relation entre les modules de z et z' puis une relation entre les arguments de z et z' .
- Démontrer que les points O, M et M' sont alignés.
- Démontrer que pour tout nombre complexe z non nul on a l'égalité : $\overline{z'+1} = \frac{1}{z}(z-1)$.

B. Construction de l'image d'un point

On désigne par A et B les deux points d'affixes respectives 1 et -1 .

On note (C) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z-1|=1$.

- Quelle est la nature de l'ensemble (C) ?
- Soit M un point de (C) d'affixe z , distinct du point O .
a. Démontrer que $|z'+1|=|z'|$. Interpréter géométriquement cette égalité.
b. Est-il vrai que si z' vérifie l'égalité : $|z'+1|=|z'|$, alors z vérifie l'égalité : $|z-1|=1$?
- Tracer l'ensemble (C) sur une figure. Si M est un point de (C), décrire et réaliser la construction du point M' .

1. 43. Asie 06/2008 7 points

A. Restitution organisée de connaissances

On suppose connu le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Démontrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$.

B. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-x}$. On note (C) sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On prendra 4 cm pour unité graphique.

1. Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes. La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Étudier les variations de la fonction f et les limites aux bornes de son ensemble de définition. Résumer ces éléments dans un tableau de variations le plus complet possible.

2. Tracer la courbe (C). On fera apparaître les résultats obtenus précédemment.

C. Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif k , on note f_k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = (x+1)e^{kx}$.

On note (C_k) la courbe représentative de la fonction f_k dans un repère orthonormal du plan.

On remarque que le cas $k = -1$ a été traité dans la partie B, car on a $f_{-1} = f$ et $(C_{-1}) = (C)$.

1. a. Quelle est la nature de la fonction f_0 ?

b. Déterminer les points d'intersection des courbes (C_0) et (C_1) .

Vérifier que, pour tout entier k , ces points appartiennent à la courbe (C_k) .

2. Étudier, suivant les valeurs du réel x , le signe de l'expression : $(x+1)(e^x - 1)$.

En déduire, pour k entier relatif donné, les positions relatives des courbes (C_k) et (C_{k+1}) .

3. Calculer $f'_k(x)$ pour tout réel x et pour tout entier k non nul.

En déduire le sens de variation de la fonction f_k suivant les valeurs de k . (On distinguera les cas : $k > 0$ et $k < 0$.)

4. Le graphique précédent représente quatre courbes (E), (F), (H), et (K), correspondant à quatre valeurs différentes du paramètre k , parmi les entiers $-1, -3, 1$ et 2 .

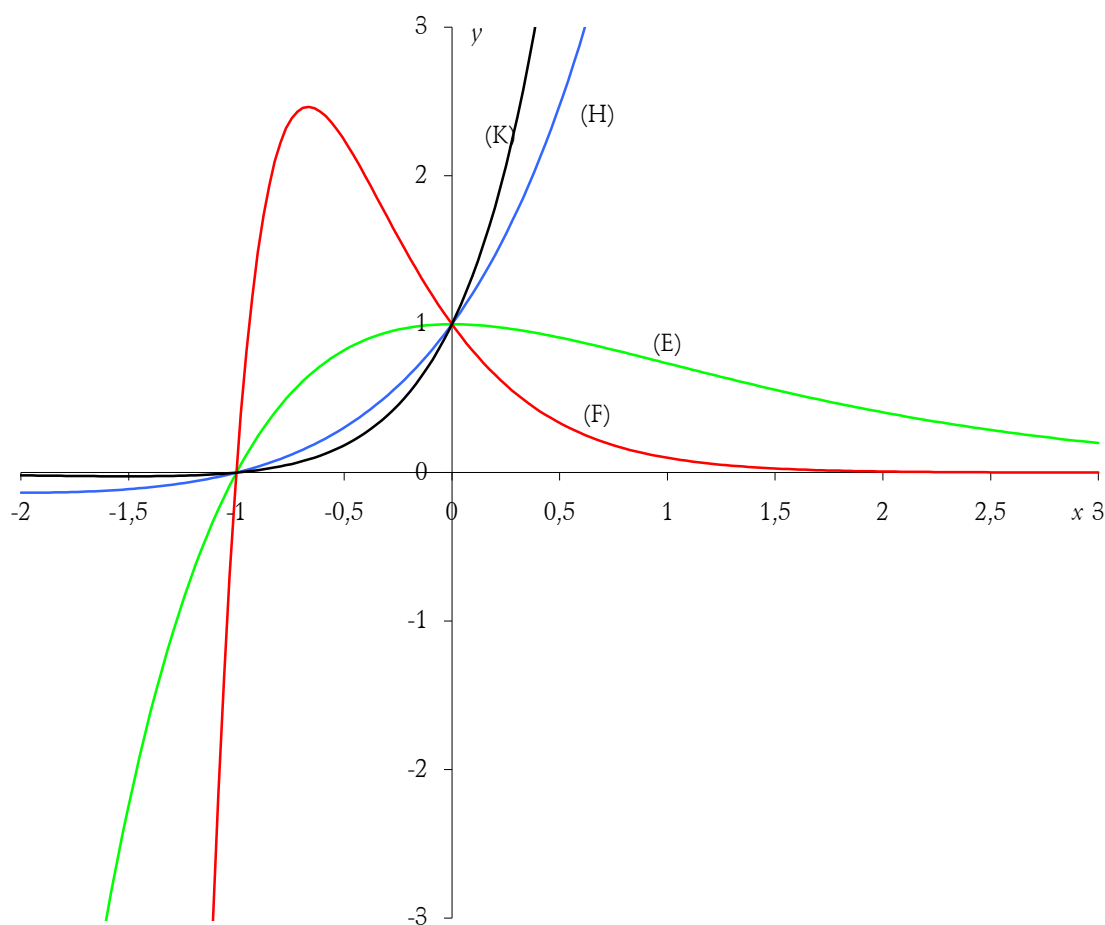
Identifier les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant la réponse.

D. Calcul d'une aire plane

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f est celle définie dans la partie B.

1. l'aide d'une intégration par parties, calculer le nombre : $A(\lambda) = \int_0^\lambda f(t) dt$.

2. Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$. Interpréter graphiquement le résultat.



1. 10. Centres étrangers 06/2008

1. 44. Centres étrangers 06/2008 4 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points : $A(2; 1; -1)$, $B(-1; 2; 4)$, $C(0; -2; 3)$, $D(1; 1; -2)$ et le plan (P) d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Pour chacune des huit affirmations suivantes, dire, sans justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et l'un des deux mots VRAI ou FAUX à la réponse choisie.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Affirmation 1 : les points A, B et C définissent un plan.

2. Affirmation 2 : la droite (AC) est incluse dans le plan (P).

3. Affirmation 3 : une équation cartésienne du plan (ABD) est : $x + 8y - z - 11 = 0$.

4. Affirmation 4 : une représentation paramétrique de la droite (AC) est :
$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 + 3k \\ z = 3 - 4k \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

5. Affirmation 5 : les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

6. Affirmation 6 : la distance du point C au plan (P) est égale à $4\sqrt{6}$.

7. Affirmation 7 : la sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan (P).

8. Affirmation 8 : le point $E\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point C sur le plan (P).

1. 45. Centres étrangers 06/2008 5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$; l'unité graphique est 1 cm.

1. Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 + 4z + 8 = 0$. On donnera les solutions sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.

2. On note A et B les points du plan d'affixes respectives : $a = 2 - 2i$ et $b = -a$. Placer ces points sur un graphique qui sera complété au fil de l'exercice.

a. Déterminer l'affixe c du point C, image du point B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b. On note D l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; démontrer que l'affixe d du point D est $d = 2 - 6i$.

c. Placer les points C et D sur le graphique. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

3. α étant un nombre réel non nul, on désigne par G_α le barycentre du système : $\{(A, 1); (B, -1); (C, \alpha)\}$.

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{CG_\alpha}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{BA}$.

b. En déduire l'ensemble des points G_α lorsque α décrit l'ensemble des réels non nuls. Construire cet ensemble.

c. Pour quelle valeur de α a-t-on $G_\alpha = D$?

4. On suppose dans cette question que $\alpha = 2$.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = 4\sqrt{2}$.

1. 46. Centres étrangers 06/2008 4 points

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- * les ingénieurs ;
- * les opérateurs de production ;
- * les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production.

Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise. On note :

- * M l'événement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
- * O l'événement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
- * I l'événement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
- * F l'événement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2. Calculer la probabilité d'interroger :

- a. un agent de maintenance ;
- b. une femme agent de maintenance ;
- c. une femme.

Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne. Pour cela une alarme est prévue. Des études ont montré que sur une journée :

- * la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002 ;
- * la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;
- * la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04 .

On note :

- * A l'événement : « l'alarme se déclenche » ;
- * B l'événement : « une panne se produit ».

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche.

1. 47. Centres étrangers 06/2008 7 points

I. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : on rappelle que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

II. Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variation de la fonction f .

3. Éléments graphiques et tracés.

a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe (C).

b. Déterminer la position de (C) par rapport à (Δ) .

c. Tracer la courbe (C) et la droite (Δ) .

III. Calculs d'aires

On note α un nombre réel strictement positif et on désigne par $A(\alpha)$ l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \alpha$.

1. On suppose dans cette question que $\alpha > 1$.

a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que : $A(\alpha) = 1 - \frac{\ln \alpha}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}$.

b. Déterminer la limite l de $A(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Démontrer que $l = A\left(\frac{1}{e}\right)$.

1. 11. La Réunion 06/2008

1. 48. La Réunion 06/2008 5 points

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à 0,1.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.

a. On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.

b. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « il n'y a aucun stylo avec un défaut » ;

B : « il y a au moins un stylo avec un défaut » ;

C : « il y a exactement deux stylos avec un défaut ».

2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 % des stylos avec défaut.

On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'événement « le stylo présente un défaut », et E l'événement « le stylo est accepté ».

a. Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

b. Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

c. Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à 0,022 à 10^{-3} près.

3. Après le contrôle on prélève successivement et avec remise huit stylos parmi les stylos acceptés.

Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos. Comparer ce résultat avec la probabilité de l'événement A calculée à la question 1. b. Quel commentaire peut-on faire ?

1. 49. La Réunion 06/2008 5 points

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

Sa courbe représentative (C), construite dans un repère orthonormal, et son tableau de variations sont donnés ci-dessous.

1. Le tableau de variations de f donne des propriétés sur les variations de la fonction, les limites aux bornes de l'ensemble de définition ainsi que l'extremum.

Enoncer puis démontrer ces propriétés.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Existe-t-il des tangentes à la courbe (C) qui contiennent le point O origine du repère ? Si oui donner leur équation.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $g(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t^2} dt$.

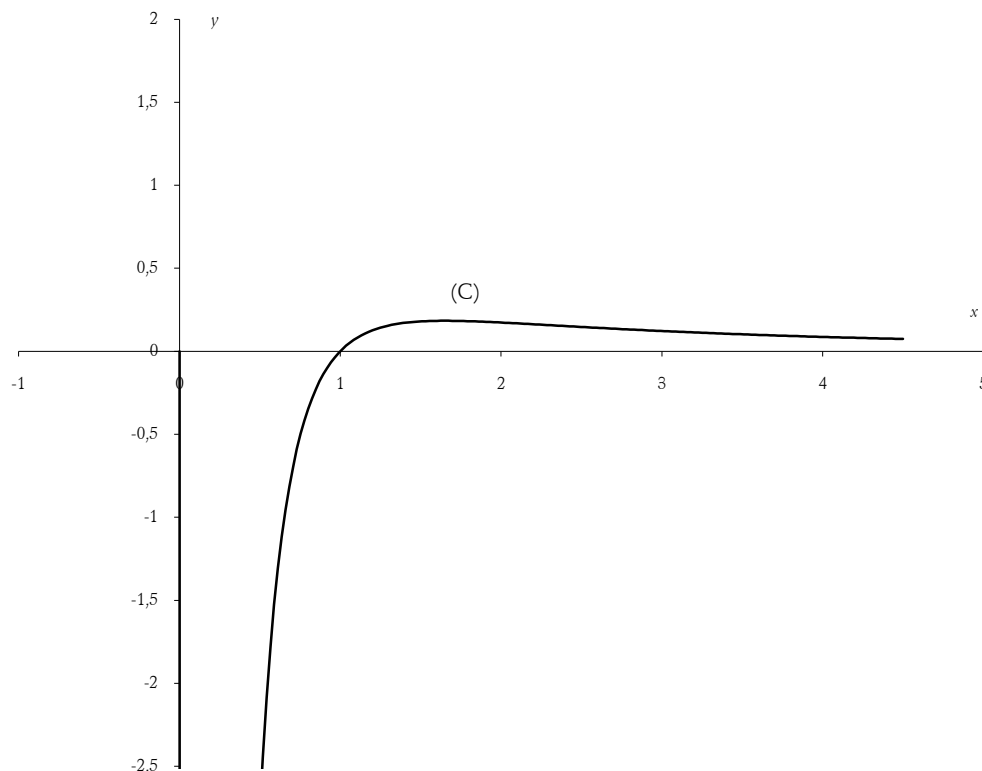
1. a. Que représente f pour la fonction g ?

b. En déduire le sens de variations de g sur $]0; +\infty[$.

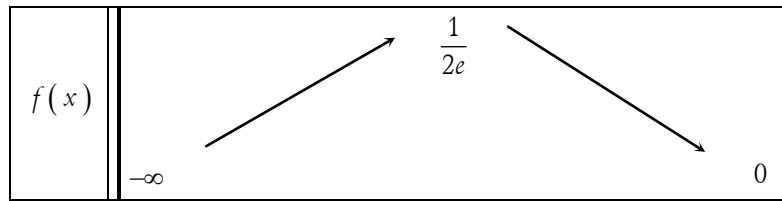
2. Interpréter géométriquement les réels $g(3)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right)$.

3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $g(x) = 1 - \frac{\ln x + 1}{x}$

b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.



x	0	$\frac{1}{e^2}$	$+\infty$
-----	---	-----------------	-----------



1. 50. La Réunion 06/2008 5 points

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right)u_{n-1} + \frac{6}{n}$.

1. a. Calculer u_1 .

b. Les premières valeurs de u_n sont données ci-dessous :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u_n	45	77	117	165	221	285	357	437	525	621

À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.

2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$. Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.

4. Valider la conjecture émise à la question 1. b.

1. 51. La Réunion 06/2008 5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

On considère le point A de (C) d'affixe $z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

1. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Déterminer

l'affixe z_C du point C image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

2. a. Justifier que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC . Construire les points A , B et C sur la feuille de papier millimétré.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

3. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2 .

a. Compléter la figure en plaçant les points P , Q et R images respectives des points A , B et C par h .

b. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier.

4. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

a. Donner l'écriture complexe de h .

b. Calculer $z_A + z_B + z_C$. En déduire que A est le milieu du segment $[QR]$.

c. Que peut-on dire de la droite (QR) par rapport au cercle (C) ?

1. 12. Liban 06/2008

1. 52. Liban 06/2008 4 points

Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires. Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois : s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A, sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'événement « le joueur obtient une boule rouge ». Montrer que $p(R) = 0,15$.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).

Soit x un entier naturel non nul.

Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.

On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x$, $x-1$ et -4 .

1. Déterminer la loi de probabilité de G .

2. Exprimer l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G en fonction de x .

3. Pour quelles valeurs de x a-t-on $E(G) > 0$?

1. 53. Liban 06/2008 5 points

Pour chacune des six propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Partie A

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soit z un nombre complexe d'argument $\frac{\pi}{3}$.

Proposition 1 : « z^{100} est un nombre réel ».

2. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z différente de 1 du plan telle que $\left| \frac{z}{1-z} \right| = 1$.

Proposition 2 : « l'ensemble (E) est une droite parallèle à l'axe des réels ».

3. Soit r la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et dont le centre K a pour affixe $1+i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : « l'image du point O par la rotation r a pour affixe $(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})$ ».

4. On considère l'équation (E) suivante : $z^2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)z + 1 = 0$.

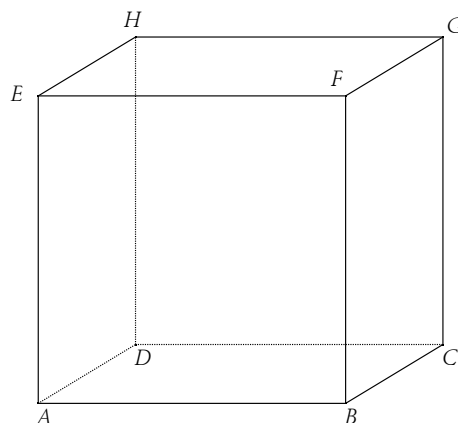
Proposition 4 : « l'équation (E) a deux solutions complexes de modules égaux à 1 ».

Partie B

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, représenté ci-contre.

Proposition 5 : « le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (BDE) ».

Proposition 6 : « les droites (EB) et (ED) sont perpendiculaires ».



1. 54. Liban 06/2008 6 points

Partie A. Démonstration de cours

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

« Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout réel A , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A »

Démontrer le théorème suivant : Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2$.

La courbe (C) représentative de la fonction f dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous. Cette courbe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

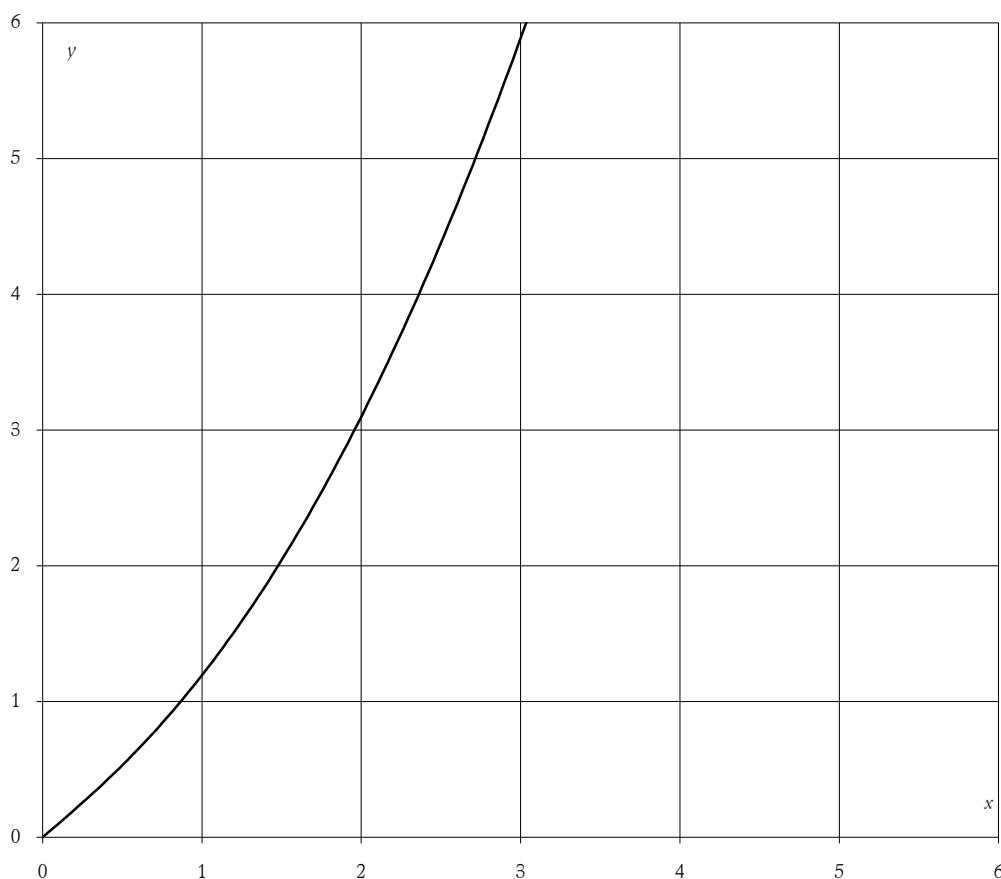
1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
3. Tracer la droite (T) sur le graphique.

Dans la suite de l'exercice, on admet que, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la courbe (C) est située au dessus de la droite (T).

Partie C

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Construire sur l'axe des abscisses les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparents les traits de construction (utiliser le graphique donné).
2. À partir de ce graphique, que peut-on conjecturer concernant le sens de variation de la suite (u_n) et son comportement lorsque n tend vers $+\infty$?
3. a. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 1$.
b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
c. Montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
d. En déduire la limite de la suite (u_n) .



1. 55. Liban 06/2008 5 points

On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$. On donne le tableau de ses variations :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		+	+	0	−
$f(x)$				$1+e^{-2}$	
	$-\infty$	0			1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$ par $g(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Partie A

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe (C) susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).

2. a. Interpréter graphiquement $g(2)$.

b. Montrer que $0 \leq g(2) \leq 2,5$.

3. a. Soit x un réel supérieur à 2. Montrer que $\int_2^x f(t) dt \geq x - 2$. En déduire que $g(x) \geq x - 2$.

b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.

4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $]-\infty; +\infty[$.

Partie B

On admet que pour tout réel t , $f(t) = (t-1)e^{-t} + 1$.

1. À l'aide d'une intégration par parties, exprimer en fonction du réel x l'intégrale $\int_0^x (t-1)e^{-t} dt$.

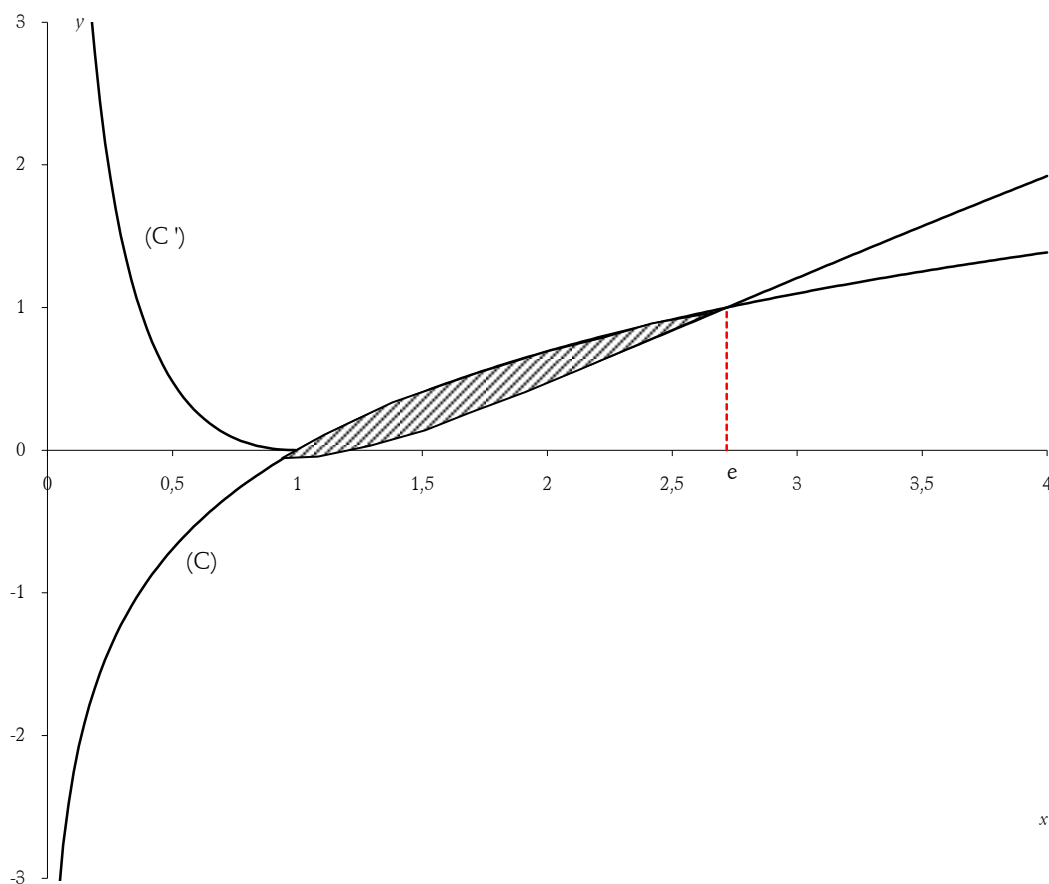
2. En déduire que pour tout réel x , $g(x) = x(1 - e^{-x})$.

3. Déterminer la limite de la fonction g en $-\infty$.

1. 13. France 06/2008

1. 56. France 06/2008 (c) 5 points

Les courbes (C) et (C') données ci-dessous représentent respectivement, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les fonctions f et g définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln x$ et $g(x) = (\ln x)^2$.



1. On cherche à déterminer l'aire A (en unités d'aire) de la partie du plan hachurée. On note $I = \int_1^e \ln x dx$

et $J = \int_1^e (\ln x)^2 dx$.

a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $F(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction logarithme népérien. En déduire I .

b. Démontrer à l'aide d'une intégration par parties que $J = e - 2I$.

c. En déduire J .

d. Donner la valeur de A .

2. Dans cette question le candidat est invité à porter sur sa copie les étapes de sa démarche même si elle n'aboutit pas.

Pour x appartenant à l'intervalle $[1; e]$, on note M le point de la courbe (C) d'abscisse x et N le point de la courbe (C') de même abscisse.

Pour quelle valeur de x la distance MN est maximale ? Calculer la valeur maximale de MN .

Correction

1. a. On dérive : $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$ donc F est une primitive de $\ln$.

$$I = \int_1^e \ln x dx = F(e) - F(1) = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = 1.$$

b & c. Posons $\begin{cases} u = \ln x \\ v' = \ln x \end{cases}$ d'où $\begin{cases} u' = \frac{1}{x} \\ v = x \ln x - x \end{cases}$ et

$$J = \int_1^e (\ln x)^2 dx = \left[x(\ln x)^2 - x \ln x \right]_1^e - \int_1^e (\ln x - 1) dx = 0 - 0 - I + [x]_1^e = e - 2 = e - 2I.$$

Remarque : on n'a pas besoin de passer par I pour calculer J ...

$$d. A = I - J = 1 - (e - 2) = 3 - e.$$

2. Comme a priori on ne sait pas qui est au-dessus, il faut prendre la valeur absolue :

$$MN = |g(x) - f(x)| = |(\ln x)^2 - \ln x| = |\ln x(\ln x - 1)|.$$

Sur $[1; e]$ $\ln x \geq 0$ et $\ln x - 1 \leq 0$ donc $MN = h(x) = \ln x - (\ln x)^2$. Sa dérivée vaut $\frac{1}{x} - 2\frac{1}{x}\ln x = \frac{1 - 2\ln x}{x}$

qui est nulle pour $x = e^{\frac{1}{2}}$, ce qui donne la distance maximale $h\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$.

1. 57. France 06/2008 (c) 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, 2, 1)$ et $C(3, -1, 2)$.

1. a. Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y - z - 3 = 0$.

2. On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives $x + 2y - z - 4 = 0$ et $2x + 3y - 2z - 5 = 0$.

Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (D) dont une représentation paramétrique

$$\text{est : } \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 3 \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. Quelle est l'intersection des trois plans (ABC) , (P) et (Q) ?

4. Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Déterminer la distance du point A à la droite (D).

Correction

1. a. $\overrightarrow{AB} = (0; 1; 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2; -2; 2)$, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A , B et C ne sont pas alignés.

b. Soit $\vec{n} = (2; 1; -1)$ un vecteur normal à $2x + y - z - 3 = 0$; on a alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 + 1 - 1 = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 - 2 - 2 = 0$; par ailleurs A vérifie $2x + y - z - 3 = 0$. Donc (ABC) a pour équation $2x + y - z - 3 = 0$.

$$2. \begin{cases} x+2y-t-4=0 \\ 2x+3y-2t-5=0 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=t+4 \\ 2x+3y=2t+5 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2y+t+4 \\ -4y+2t+8+3y=2t+5 \\ z=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2+t \\ y=3 \\ z=t \end{cases}.$$

3. Remplaçons : $2x+y-z-3=0 \Leftrightarrow 2(-2+t)+3-t-3=0 \Leftrightarrow t=4$; les plans se coupent en un point : $D(2;3;4)$.

4. On remarque que A est dans (Q) , mais ça n'avance pas à grand chose. Il faut trouver le plan passant par A et orthogonal à (D) puis le point d'intersection E entre ce plan et (D) :

$$\vec{u}_D = (1; 0; 1), \quad \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}_D = 0 \Leftrightarrow (x-1) \cdot 1 + (y-1) \cdot 0 + (z-0) \cdot 1 = 0 \Leftrightarrow x+z-1=0 ;$$

on coupe avec (D) : $(-2+t)+t-1=0 \Leftrightarrow t=\frac{3}{2}$ d'où $E\left(-\frac{1}{2}; 3; \frac{3}{2}\right)$ et

$$AE = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}-1\right)^2 + (3-1)^2 + \left(\frac{3}{2}-0\right)^2} = \sqrt{\frac{34}{4}}.$$

1. 58. France 06/2008 (c) 5 points

La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que pour tout $t \geq 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée de connaissances

a. Démontrer que pour tout $t \geq 0$ on a $R(t) = e^{-\lambda t}$.

b. Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t+s)$ ne dépend pas du nombre $t \geq 0$.

2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0,00026$.

a. Calculer $P(X \leq 1000)$ et $P(X > 1000)$.

b. Sachant que l'événement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'événement $(X > 2000)$.

c. Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Correction

$$1. a. R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \left[\frac{\lambda e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^t = 1 - (-e^{-\lambda t} + e^0) = e^{-\lambda t}.$$

$$b. P_{X>t}(X > t+s) = \frac{P([X > t] \cap [X > t+s])}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s).$$

$$2. a. P(X \leq 1000) = 1 - e^{-\lambda \times 1000} = 1 - e^{-0,26} \approx 0,23. \quad P(X > 1000) = e^{-0,26} \approx 0,77.$$

$$b. \text{ Avec la question 1, on a } P_{(X>1000)}(X > 2000) = P(X > 1000) = e^{-0,26}.$$

$$c. \text{ C'est encore la même chose... } P_{(X>2000)}(X > 3000) = P(X > 1000) = e^{-0,26}.$$

Puisqu'il n'y a pas de mémoire, si l'agenda fonctionne pendant T , il fonctionnera pendant $T+1000$ toujours avec la probabilité $e^{-0,26}$.

1. 59. France 06/2008 (c) 5 points

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Soient A, B et I les points d'affixes respectives $1 + i, 3 - i$ et 2 .

À tout point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = z^2 - 4z$. Le point M' est appelé l'image de M .

1. Faire une figure sur une feuille de papier millimétré et compléter cette figure tout au long de l'exercice.
2. Calculer les affixes des points A' et B' , images respectives des points A et B . Que remarque-t-on ?
3. Déterminer les points qui ont pour image le point d'affixe -5 .
4. a. Vérifier que pour tout nombre complexe z , on a : $z' + 4 = (z - 2)^2$.
b. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ et, lorsque z est différent de 2 , une relation entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.
c. Que peut-on dire du point M' lorsque M décrit le cercle (C) de centre I et de rayon 2 ?
5. Soient E le point d'affixe $2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, J le point d'affixe -4 et E' l'image de E .
a. Calculer la distance IE et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{IE})$.
b. Calculer la distance JE' et une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{JE'})$.
c. Construire à la règle et au compas le point E' ; on laissera apparents les traits de construction.

Correction

1. La figure est laissée au lecteur...
2. $z_{A'} = -4 - 2i$, $z_{B'} = -4 - 2i$, les points A' et B' sont confondus.
3. $z^2 - 4z = -5 \Leftrightarrow z^2 - 4z + 5 = 0 \Rightarrow \Delta = 16 - 20 = -4, z_1 = 2 + i, z_2 = 2 - i$.
4. a. $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$.
b. $|z' + 4| = |(z - 2)^2| = |z - 2|^2, \arg(z' + 4) = 2\arg(z - 2)$.
c. Lorsque M décrit le cercle (C) de centre I et de rayon 2 , on a $|z - 2| = 2 \Rightarrow |z' + 4| = 4$, le point M' parcourt le cercle (C') de centre J le point d'affixe -4 et de rayon 4 .
5. $IE = \left| 2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \right| = 2 \left| e^{i\frac{\pi}{3}} \right| = 2$ donc E est sur (C) et E' est sur (C').
 $(\vec{u}, \overrightarrow{IE}) = \arg\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{JE'}) = 2(\vec{u}, \overrightarrow{IE}) = \frac{2\pi}{3}$.
- c. La figure est laissée au lecteur... faut pas charrier...

1. 14. Polynésie 06/2008

1. 60. Polynésie 06/2008 4 points

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z^2 - 6z + 13 = 0$.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm . On considère les points A, B, C d'affixes respectives $a = 3 - 2i, b = 3 + 2i, c = 4i$.
2. Faire une figure et placer les points A, B, C .
3. Montrer que $OABC$ est un parallélogramme.
4. Déterminer l'affixe du point Ω , centre du parallélogramme $OABC$.
5. Déterminer et tracer l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 12$.

6. Soit M un point de la droite (AB) . On désigne par β la partie imaginaire de l'affixe du point M . On note N l'image du point M par la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Montrer que N a pour affixe $\frac{5}{2} - \beta + \frac{5}{2}i$.

b. Comment choisir β pour que N appartienne à la droite (BC) ?

1. 61. Polynésie 06/2008 4 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 4)$, $C(-1; -3; 2)$, $D(4; -2; 5)$ et le vecteur $\vec{n}(2; -1; 1)$.

1. a. Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

b. Démontrer que $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .

c. Déterminer une équation du plan (ABC) .

2. Soit (Δ) la droite dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Montrer que le point D appartient à la droite (Δ) et que cette droite est perpendiculaire au plan (ABC) .

3. Soit E le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) .

Montrer que le point E est le centre de gravité du triangle ABC .

1. 62. Polynésie 06/2008 5 points

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fautive et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Soit f la fonction solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.

Proposition 1 : « La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = 2x$ ».

2. Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle $[A; +\infty[$ où A est un réel strictement positif.

Proposition 2 : « Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)g(x) = 0$ ».

3. On admet qu'un bloc de glace fond en perdant 10 % de sa masse par minute. Sa masse initiale est de 10 kg.

Proposition 3 : « À partir de la soixante-dixième minute, sa masse devient inférieure à 1 g ».

4. Soient A et B deux événements d'un même univers Ω muni d'une probabilité p .

Proposition 4 : « Si A et B sont indépendants et si $p(A) = p(B) = 0,4$ alors $p(A \cup B) = 0,8$ ».

5. Une usine fabrique des pièces. Une étude statistique a montré que 2 % de la production est défectueuse. Chaque pièce est soumise à un contrôle de fabrication. Ce contrôle refuse 99 % des pièces défectueuses et accepte 97 % des pièces non défectueuses.

On choisit au hasard une pièce avant son passage au contrôle.

Proposition 5 : « La probabilité que la pièce soit acceptée est égale à 0,9508 ».

1. 63. Polynésie 06/2008 7 points

Partie A Restitution organisée de connaissances. On supposera connus les résultats suivants :

Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$.

* Si $u \geq 0$ sur $[a ; b]$ alors $\int_a^b u(x) dx \geq 0$. * Pour tous réels α et β

$$\int_a^b [\alpha u(x) + \beta v(x)] dx = \alpha \int_a^b u(x) dx + \beta \int_a^b v(x) dx.$$

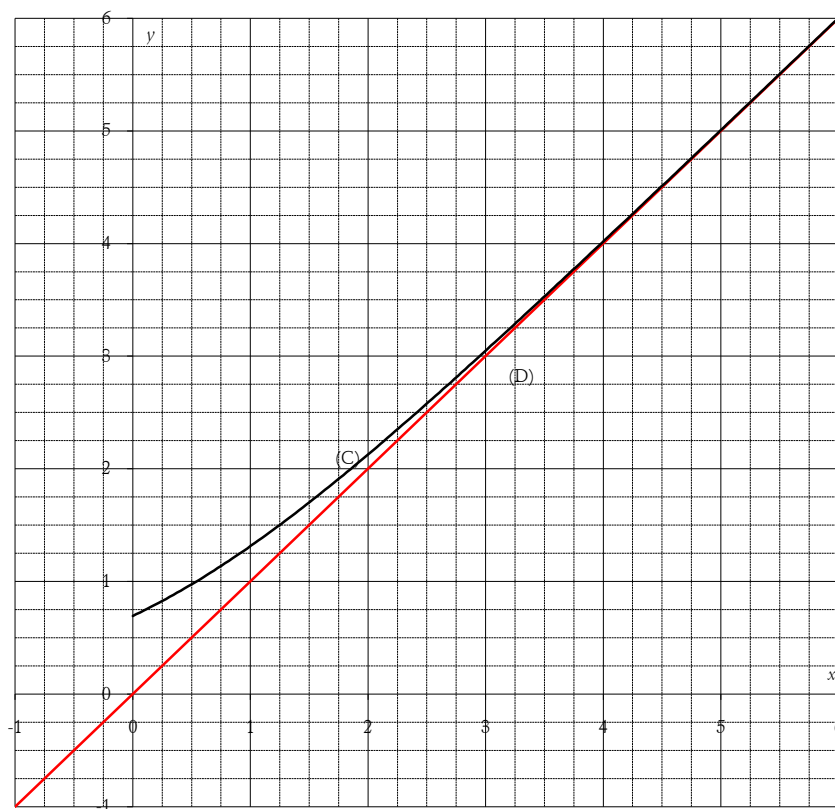
Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ avec $a < b$ et si, pour tout x de $[a ; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln(1 + e^{-x})$.

Sa courbe représentative (C) ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$ sont données ci-dessous dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

1. Montrer que f est croissante et positive sur $[0 ; +\infty[$.
2. a. Montrer que la courbe (C) admet pour asymptote la droite (D).
b. Étudier la position de (C) par rapport à (D).



3. Soit I l'intégrale définie par : $I = \int_0^1 \ln(1 + e^{-x}) dx = \int_0^1 [f(x) - x] dx$. On ne cherchera pas à calculer I .

- a. Donner une interprétation géométrique de I .
- b. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, on a $\ln(1+t) \leq t$. (On pourra étudier les variations de la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = \ln(1+t) - t$)

On admettra que pour tout réel $t \geq 0$, on a $\frac{t}{t+1} \leq \ln(1+t)$.

c. En déduire que pour tout x de $[0; +\infty[$, on a : $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} \leq \ln(1+e^{-x}) \leq e^{-x}$.

d. Montrer que $\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right) \leq I \leq 1-e^{-1}$.

e. En déduire un encadrement de I d'amplitude 0,4 par deux nombres décimaux.

4. On désigne par M et N les points de même abscisse x appartenant respectivement à (C) et (D).

On juge que M et N sont indiscernables sur le graphique lorsque la distance MN est inférieure à 0,5 mm.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles M et N sont indiscernables.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. 15. Nouvelle Calédonie 03/2008

1. 64. Nouvelle Calédonie 03/2008 (c) 5 points

On considère la fonction f définie sur $] -1; 6[$ par $f(x) = \frac{9}{6-x}$. On définit pour tout entier n la suite (U_n)

$$\text{par } \begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}.$$

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous accompagnée de celle de la droite d'équation $y = x$. Construire, sur ce graphique les points $M_0(U_0; 0)$, $M_1(U_1; 0)$, $M_2(U_2; 0)$, $M_3(U_3; 0)$ et $M_4(U_4; 0)$.

Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (U_n) ?

2. a. Démontrer que si $x < 3$ on a alors $\frac{9}{6-x} < 3$. En déduire que $U_n < 3$ pour tout entier naturel n .

b. Étudier le sens de variation de la suite (U_n) .

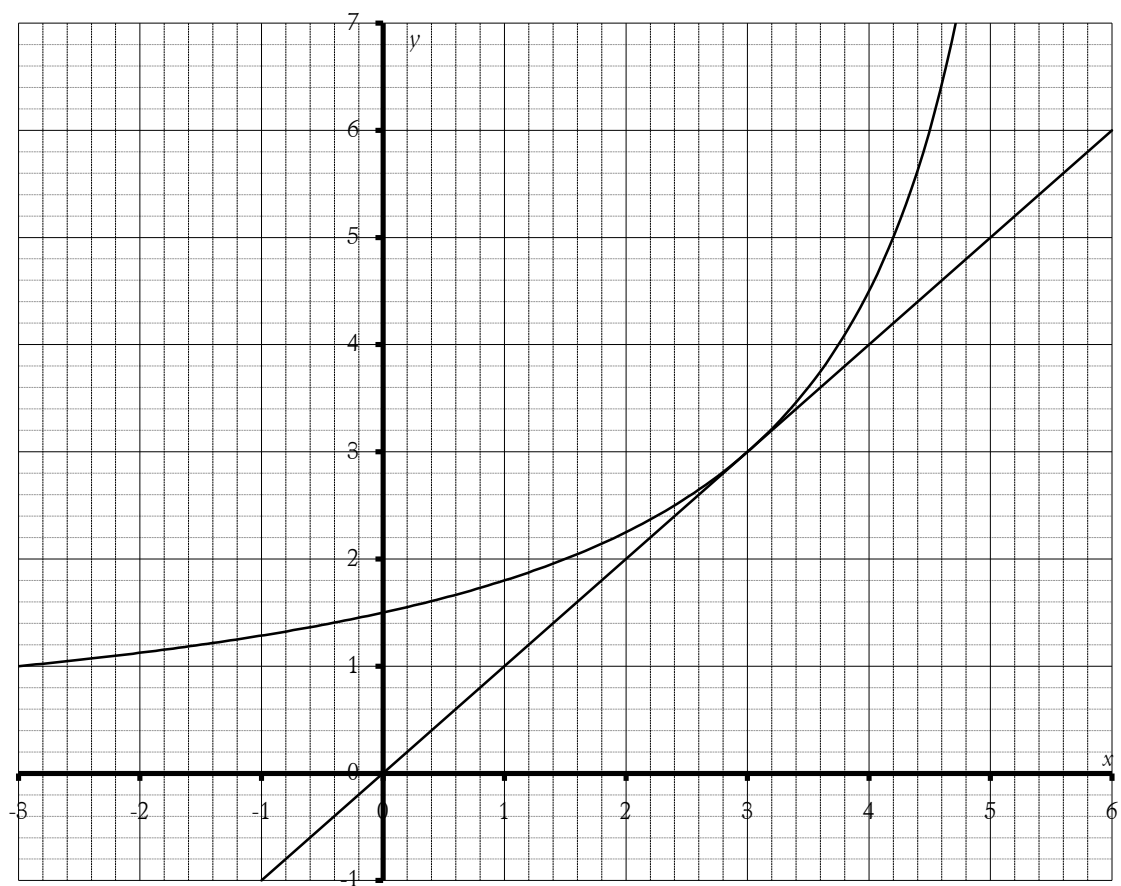
c. Que peut-on déduire des questions 2. a. et 2. b. ?

3. On considère la suite (V_n) définie par $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$ pour tout entier naturel n .

a. Démontrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

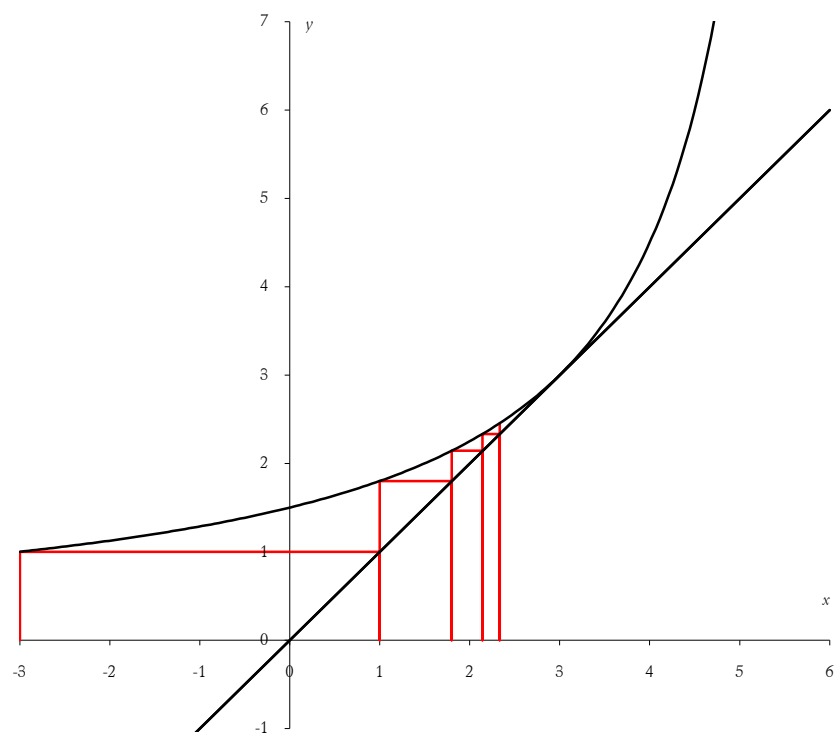
b. Déterminer V_n puis U_n en fonction de n .

c. Calculer la limite de la suite (U_n) .



Correction

1. Voir la figure ci-dessous.



La suite semble croissante et converger vers le point $(3 ; 3)$, soit vers une limite égale à 3.

2. a. Si $x < 3$, $-x > -3 \Rightarrow 6-x > 3 \Rightarrow \frac{1}{6-x} < \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{9}{6-x} < 3$ (on aurait pu utiliser les variations de f).

Par récurrence on a alors : $U_0 < 3$ par définition ; si $U_n < 3$ alors $f(U_n) = \frac{9}{6-U_n} < 3$ et donc $U_{n+1} < 3$.

b. $U_{n+1} - U_n = \frac{9}{6-U_n} - U_n = \frac{U_n^2 - 6U_n + 9}{6-U_n} = \frac{(U_n-3)^2}{6-U_n}$ qui est positif puisque $U_n < 6$.

La suite est croissante.

c. U_n est croissante et majorée, elle converge donc.

3. a. $V_n = \frac{1}{U_n-3} \Leftrightarrow U_n-3 = \frac{1}{V_n} \Leftrightarrow U_n = 3 + \frac{1}{V_n}$; on a donc en remplaçant :

$$U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n} \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{V_{n+1}} = \frac{9}{6-3-\frac{1}{V_n}} \Leftrightarrow \frac{1}{V_{n+1}} = \frac{9}{3-\frac{1}{V_n}} - 3 = \frac{9V_n}{3V_n-1} - 3 = \frac{9V_n-9V_n+3}{3V_n-1} = \frac{3}{3V_n-1},$$

soit $V_{n+1} = \frac{3V_n-1}{3} = V_n - \frac{1}{3}$; (V_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$.

b. $V_0 = \frac{1}{U_0-3} = -\frac{1}{6}$ d'où $V_n = V_0 + nr = -\frac{1}{6} - \frac{1}{3}n = -\frac{1+2n}{6}$ et $U_n = 3 + \frac{1}{V_n} = 3 - \frac{6}{2n+1}$.

c. La limite de la suite (U_n) est alors bien évidemment 3...

1. 65. Nouvelle Calédonie 03/2008 (c) 5 points

Deux éleveurs produisent une race de poissons d'ornement qui ne prennent leur couleur définitive qu'à l'âge de trois mois :

- pour les alevins du premier élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 10 % n'ont pas survécu, 75 % deviennent rouges et les 15 % restant deviennent gris ;
- pour les alevins du deuxième élevage, entre l'âge de deux mois et l'âge de trois mois, 5 % n'ont pas survécu, 65 % deviennent rouges et les 30 % restant deviennent gris.

Une animalerie achète les alevins à l'âge de deux mois : 60 % au premier éleveur, 40 % au second.

1. Un enfant achète un poisson le lendemain de son arrivée à l'animalerie, c'est-à-dire à l'âge de deux mois.

a. Montrer que la probabilité que le poisson soit toujours vivant un mois plus tard est de 0,92.

b. Déterminer la probabilité qu'un mois plus tard le poisson soit rouge.

c. Sachant que le poisson est gris à l'âge de trois mois, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier élevage ?

2. Une personne choisit au hasard et de façon indépendante 5 alevins de deux mois. Quelle est la probabilité qu'un mois plus tard, seulement trois soient en vie ? On donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

3. L'animalerie décide de garder les alevins jusqu'à l'âge de trois mois, afin qu'ils soient vendus avec leur couleur définitive. Elle gagne 1 euro si le poisson est rouge, 0,25 euro s'il est gris et perd 0,10 euro s'il ne survit pas.

Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'animalerie par poisson acheté.

Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique, arrondie au centime.

Correction

1. a. Pour que le poisson soit toujours vivant il faut qu'il soit encore vivant sachant qu'il provient du 1^{er} élevage ou qu'il soit vivant sachant qu'il provient du 2^{ème} élevage : avec un arbre on a alors

$$p(V) = p_{E_1}(V)p(E_1) + p_{E_2}(V)p(E_2) = 0,9 \times 0,6 + 0,95 \times 0,4 = 0,92.$$

b. Même type de calcul : $p(R) = p_{E_1}(R)p(E_1) + p_{E_2}(R)p(E_2) = 0,75 \times 0,6 + 0,65 \times 0,4 = 0,71$.

$$c. p(G) = p_{E_1}(G)p(E_1) + p_{E_2}(G)p(E_2) = 0,15 \times 0,6 + 0,30 \times 0,4 = 0,21 ;$$

$$p_G(E_1) = \frac{p(E_1 \cap G)}{p(G)} = \frac{p_{E_1}(G)p(E_1)}{p(G)} = \frac{0,15 \times 0,6}{0,21} \approx 0,43 .$$

On remarquera qu'un poisson peut mourir, devenir Rouge ou devenir Gris : $0,08 + 0,71 + 0,21 = 1$.

$$2. \text{ Schéma de Bernoulli/Loi binomiale : } n = 5, p = 0,92, k = 3 ; P(k = 3) = \binom{5}{3} 0,92^3 0,08^2 \approx 0,05 .$$

$$3. p(X = 1) = 0,71, p(X = 0,25) = 0,21, p(X = -0,1) = 0,08 .$$

$$E(X) = 0,71 \times 1 + 0,25 \times 0,21 - 0,1 \times 0,08 = 0,75 \text{ cent} .$$

1. 66. Nouvelle Calédonie 06/2008 (c) 5 points

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, orthonormé. Soit t un nombre réel.

$$\text{On donne le point } A(-1; 2; 3) \text{ et la droite D de système d'équations paramétriques : } \begin{cases} x = 9 + 4t \\ y = 6 + t \\ z = 2 + 2t \end{cases} .$$

Le but de cet exercice est de calculer de deux façons différentes la distance d entre le point A et la droite D.

1. a. Donner une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à la droite D et passant par A.

b. Vérifier que le point $B(-3; 3; -4)$ appartient à la droite D.

c. Calculer la distance d_B entre le point B et le plan P.

d. Exprimer la distance d en fonction de d_B et de la distance AB. En déduire la valeur exacte de d .

2. Soit M un point de la droite D. Exprimer AM^2 en fonction de t . Retrouver alors la valeur de d .

Correction

$$1. a. \text{ Un vecteur directeur de D est } (4; 1; 2) : \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x + y + 2z - 4 = 0 .$$

$$b. \text{ Il faut trouver } t : \begin{cases} -3 = 9 + 4t \\ 3 = 6 + t \\ -4 = 2 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -3 \end{cases} ; \text{ on a la même valeur de } t \text{ pour les trois lignes donc } B \text{ est bien sur la droite.}$$

$$c. \text{ On applique la formule de la distance : } d_B = \frac{|4 \times -3 + 1 \times 3 + 2 \times -4 - 4|}{\sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{21}{\sqrt{21}} = \sqrt{21} .$$

d. A est sur le plan P, B est sur la droite D orthogonale à P, on utilise le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = d^2 + d_B^2 \Leftrightarrow d^2 = AB^2 - d_B^2 = (-2)^2 + 1^2 + (-7)^2 - 21 = 54 - 21 = 33 \Rightarrow d = \sqrt{33} .$$

$$2. AM^2 = (9 + 4t + 1)^2 + (6 + t - 2)^2 + (2 + 2t - 3)^2 = 100 + 80t + 16t^2 + 16 + 8t + t^2 + 4t^2 - 4t + 1, \text{ soit}$$

$$AM^2 = f(t) = 117 + 84t + 21t^2 ; \text{ le minimum de } f \text{ est atteint lorsque } f'(t) = 0 \Leftrightarrow 84 + 42t = 0 \Leftrightarrow t = -2, \text{ soit une distance minimale } d = \sqrt{f(-2)} = \sqrt{117 - 168 + 84} = \sqrt{33} .$$



