Antilles - Guyane

1. Exercice 1

6 points

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.

Une urne contient 15 boules identiques indiscernables au toucher de couleur moire, blanche ou rouge. On sait de plus qu'il y a au moins deux boules de chaque couleur dans l'urne. On tire au hasard simultanément 2 boules dans l'urne et on note leur couleur.

Soit l'événement G : « obtenir deux boules de même couleur ».

Partie A

On suppose que l'urne contient 3 boules noires et 7 boules blanches.

Calculer la probabilité de l'événement G.

Partie B

On note n, b et r le nombre de boules respectivement noires, blanches et rouges figurant dans l'urne.

1. On note $g(n, b, r)$ la probabilité en fonction de n, b et r de l'événement G.

Démontrer que $g(n, b, r) = \dfrac{1}{210}\left[n(n-1)+b(b-1)+r(r-1)\right]$.

2. Le but de cette question est de déterminer n, b et r de sorte que la probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale.

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les points N, B et R de coordonnées respectives $(15\,;0\,;0)$, $(0\,;15\,;0)$ et $(0\,;0\,;15)$ et soit M le point de coordonnées $(n\,;b\,;r)$.

On pourra se reporter à la figure ci-dessous.

a. Justifier qu'une équation du plan (NBR) est $x+y+z-15=0$.

b. En déduire que le point M est un point du plan (NBR).

c. Démontrer que $g(n, b, r) = \dfrac{1}{210}\left(OM^2-15\right)$.

d. Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (NBR). Déterminer les coordonnées du point H.

e. En déduire les valeurs de n, b et r afin que le probabilité $g(n, b, r)$ soit minimale. Justifier que cette probabilité minimale est égale à $\dfrac{2}{7}$.

Partie C

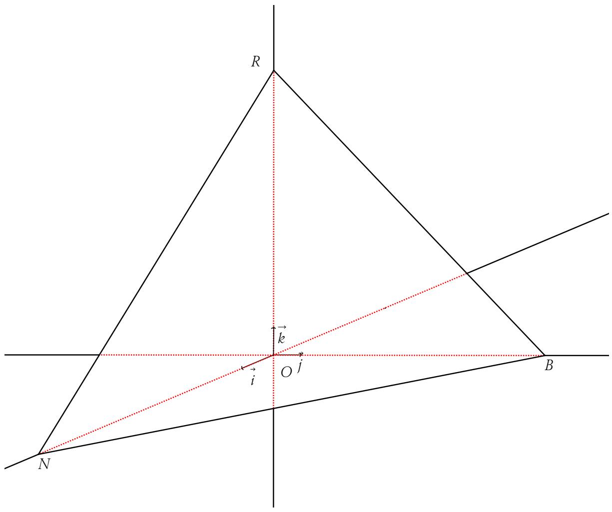
On suppose que les nombres de boules de chaque couleur ont été choisis par l'organisateur d'un jeu, de telle sorte que la probabilité de l'événement G soit égale à $\dfrac{2}{7}$.

Un joueur mise x euros, avec x entier naturel non nul, puis tire simultanément au hasard deux boules de l'urne. Dans tous les cas, il perd sa mise de départ. S'il obtient deux boules de même couleur, il reçoit k fois le montant de sa mise, avec k nombre décimal strictement supérieur à 1. Sinon il ne reçoit rien.

On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1. Calculer l'espérance $E(X)$ de la variable X en fonction de x et k.

2. Déterminer la valeur de k pour laquelle le jeu est équitable.



2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

Partie A

1. Déterminer le complexe α tel que $\begin{cases} \alpha(1+i) = 1+3i \\ i\alpha^2 = -4+3i \end{cases}$.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - (1+3i)z + (-4+3i)$. Montrer que $f(z)$ s'écrit sous la forme $(z-\alpha)(z-i\alpha)$. En déduire les solutions (sous forme algébrique) de l'équation $f(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$, unité graphique 5 cm.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $a = 2+i$ et $b = -1+2i$. Placer A et B dans le repère et compléter la figure au fur et à mesure.

Montrer que $b = ia$, en déduire que le triangle OAB est un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\pi}{2}$.

2. On considère le point C d'affixe $c = -1 + \frac{1}{2}i$. Déterminer l'affixe du point D tel que le triangle OCD soit un triangle isocèle rectangle tel que $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) = \frac{\pi}{2}$.

On pourra conjecturer l'affixe de D à l'aide de la figure pour traiter la question suivante.

3. Soit M le milieu du segment $[BC]$. On appelle $z_{\overrightarrow{OM}}$ et $z_{\overrightarrow{DA}}$ les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{DA}$. Prouver que $\frac{z_{\overrightarrow{OM}}}{z_{\overrightarrow{DA}}} = \frac{1}{2}i$.

4. Donner une mesure en radians de $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{OM}\right)$.

5. Prouver que $OM = \frac{1}{2}DA$.

6. On appelle J, K et L les milieux respectifs des segments $[CD]$, $[DA]$ et $[AB]$.

On admet que le quadrilatère $JKLM$ est un parallélogramme ; démontrer que c'est un carré.

3. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

ABC est un triangle équilatéral du plan tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Soit t un nombre réel fixé et soient les points M, N et P, deux à deux distincts, définis par :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BN} = t\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CA}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer l'existence d'une unique similitude directe σ qui transforme les points A, B et C en respectivement M, N et P, et d'en préciser les éléments caractéristiques.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}, \vec{v})$ direct. On note a, b, c, m, n et p les abscisses respectives des points A, B, C, M, N et P.

1. On rappelle que toute similitude conserve le barycentre.

a. Exprimer m, n et p en fonction de a, b, c et t.

b. En déduire que les deux triangles ABC et MNP ont même centre de gravité. On notera G ce centre de gravité.

c. On suppose que σ existe. Déterminer l'image de G par σ.

2. On considère la rotation r de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

a. Vérifier que M est le barycentre du système de points $\{(A, 1-t)\,;(B, t)\}$ et en déduire que $r(M) = N$.

On admet de même que $r(N) = P$ et $r(P) = M$.

b. Soit σ_1 la similitude directe de centre G, de rapport $\frac{GM}{GA}$ et d'angle $\left(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GM}\right)$. Montrer qu'elle transforme les points A, B et C respectivement en M, N et P.

c. Conclure sur l'existence et l'unicité de σ.

4. Exercice 3

5 points

Question de cours : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que les fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I.

Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\,;b]$ de I.

Partie A

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$. On note f' la fonction dérivée de f. On suppose que f' est continue sur l'intervalle $[0\,;1]$.

1. Utiliser la question de cours pour montrer que $\int_0^1 f(x)\,dx = f(1) - \int_0^1 xf'(x)\,dx$.

2. En déduire que $\int_0^1 [f(x) - f(1)]\,dx = -\int_0^1 xf'(x)\,dx$.

Partie B

On désigne par ln la fonction logarithme néperien.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-2\,;2[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$ et C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

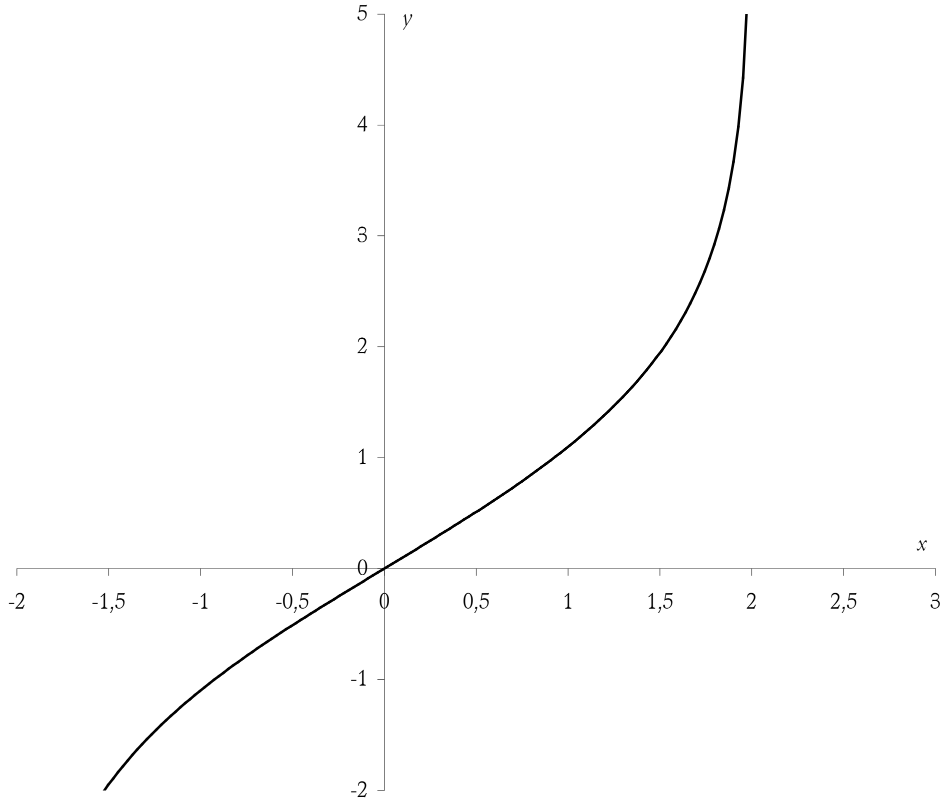
2. a. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;2[$, on a $f'(x)=\dfrac{4}{4-x^2}$.

b. En déduire les variations de f sur l'intervalle $]-2\,;2[$.

Partie C

Le courbe C est tracée ci-dessous. Hachurer la partie P du plan constituée des points $M(x\,;y)$ tels que : $0\le x\le 1$ et $f(x)\le y\le \ln 3$.

En utilisant la partie A, calculer en cm² l'aire de P.



5. Exercice 4

4 points

Soit $(v_n)_{n\ge 0}$ une suite. On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n=e^{-v_n}+1$.

Partie A

Pour chacune des questions quatre propositions sont faites dont une seule est exacte. Pour chaque question donner sans justification une réponse sur votre copie. Si la réponse est bonne elle rapporte 0,75 points, si elle est mauvaise elle coûte 0,25 points, si vous ne répondez pas vous gagnez 0 point… En cas de total négatif votre ardoise est effacée !

1. a est un réel strictement positif et ln désigne la fonction logarithme néperien. Si $v_0=\ln a$, alors :

a. $u_0=\dfrac{1}{a}+1$ b. $u_0=\dfrac{1}{1+a}$ c. $u_0=-a+1$ d. $u_0=e^{-a}+1$

2. Si v est strictement croissante, alors :

a. u est strictement décroissante et majorée par 2

b. u est strictement croissante et minorée par 1

c. u est strictement croissante et majorée par 2

d. u est strictement décroissante et minorée par 1

3. Si v diverge vers $+\infty$ alors :

a. u converge vers 2

b. u diverge vers $+\infty$

c. u converge vers 1

d. u converge vers un réel L tel que $L > 1$

4. Si v est majorée par 2, alors :

a. u est majorée par $1+e^{-2}$

b. u est minorée par $1+e^{-2}$

c. u est majorée par $1+e^{2}$

d. u est minorée par $1+e^{2}$

Partie B

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\ln(u_n)+v_n > 0$.