Amérique du Nord

1. Exercice 1

3 points

Pour chacune des trois propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et donner une justification de la réponse choisie. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

Soit (P) le plan dont une équation est : $2x+y-3z+1=0$. Soit A le point de coordonnées $(1\,;11\,;7)$.

Proposition 1 : « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P) a pour coordonnées $(0\,;2\,;1)$. »

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y'=2-2y$.

On appelle u la solution de (E) sur $\mathbb{R}$ vérifiant $u(0)=0$.

Proposition 2 : « On a $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$. »

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0=2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0\le u_n\le 7$. »

2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 4 cm).

Soit le point A d'affixe $z_A=i$ et B le point d'affixe $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$.

1. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On appelle C l'image de B par r.

a. Déterminer une écriture complexe de r.

b. Montrer que l'affixe de C est $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c. Ecrire z_B et z_C sous forme algébrique.

d. Placer les points A, B et C.

2. Soit D le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients 2, −1 et 2.

a. Montrer que l'affixe de D est $z_D=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$. Placer le point D.

b. Montrer que A, B, C et D sont sur un même cercle.

3. Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 2. On appelle E l'image de D par h.

a. Déterminer une écriture complexe de h.

b. Montrer que l'affixe de E est $z_E=\sqrt{3}$. Placer le point E.

4. a. Calculer le rapport $\dfrac{z_D-z_C}{z_E-z_C}$. On écrira le résultat sous forme exponentielle.

b. En déduire la nature du triangle CDE.

3. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On fera une figure que l'on complétera tout au long de l'exercice.

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 3+5i$, $b = -4+2i$, $c = 1+4i$.

Soit f la transformation du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = (2-2i)z+1$.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

2. a. Déterminer l'affixe du point B', image du point B par f.

b. Montrer que les droites (CB') et (CA) sont orthogonales.

3. Soit M le point d'affixe $z = x+iy$ où on suppose que x et y sont des entiers relatifs. Soit M' l'image de M par f.

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si $x+3y=2$.

4. On considère l'équation (E) : $x+3y=2$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple $(-4\,;2)$ est une solution de (E).

b. Résoudre l'équation (E).

c. En déduire l'ensemble des points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-5\,;5]$ et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux. Placer ces points sur la figure.

4. Exercice 3

5 points

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties. La probabilité que le joueur perde la première partie est 0,2. Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

* s'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05 ;

* s'il perd une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1. On appelle :

   E_1 l'événement « le joueur perd la première partie » ;

   E_2 l'événement « le joueur perd la deuxième partie » ;

   E_3 l'événement « le joueur perd la troisième partie ».

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

b. Montrer que la probabilité de l'événement $(X=2)$ est égale à 0,031 et que celle de l'événement $(X=3)$ est égale à 0,002.

c. Déterminer la loi de probabilité de X.

d. Calculer l'espérance de X.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement « le joueur perd la n-ième partie », $\overline{E_n}$ l'événement contraire, et on note p_n la probabilité de l'événement E_n.

a. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, les probabilités des événements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.

b. En déduire que $p_{n+1} = 0,05p_n + 0,05$ pour tout entier naturel n non nul.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire u_n puis p_n en fonction de n.

c. Calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Exercice 4

7 points

1. Restitution organisée de connaissances.

L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

On supposera connus les résultats suivants :

* la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;

* $e^0=1$;

* pour tout réel x, on a $e^x > x$;

* soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\,;+\infty[$ où A est un réel positif. Si, pour tout x de $[A\,;+\infty[$, on a $\psi(x)\le\varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.

a. On considère la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=e^x-\dfrac{x^2}{2}$.

Montrer que pour tout x de $[0\,;+\infty[$, $g(x)\ge 0$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$.

2. On appelle f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{4}xe^{-\frac{x}{2}}$. On appelle C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. La courbe C est représentée ci-dessous.

a. Montrer que f est positive sur $[0\,;+\infty[$.

b. Déterminer la limite de f en $+\infty$. En déduire une conséquence graphique pour C.

c. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;+\infty[$.

3. On considère la fonction F définie sur $[0\,;+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

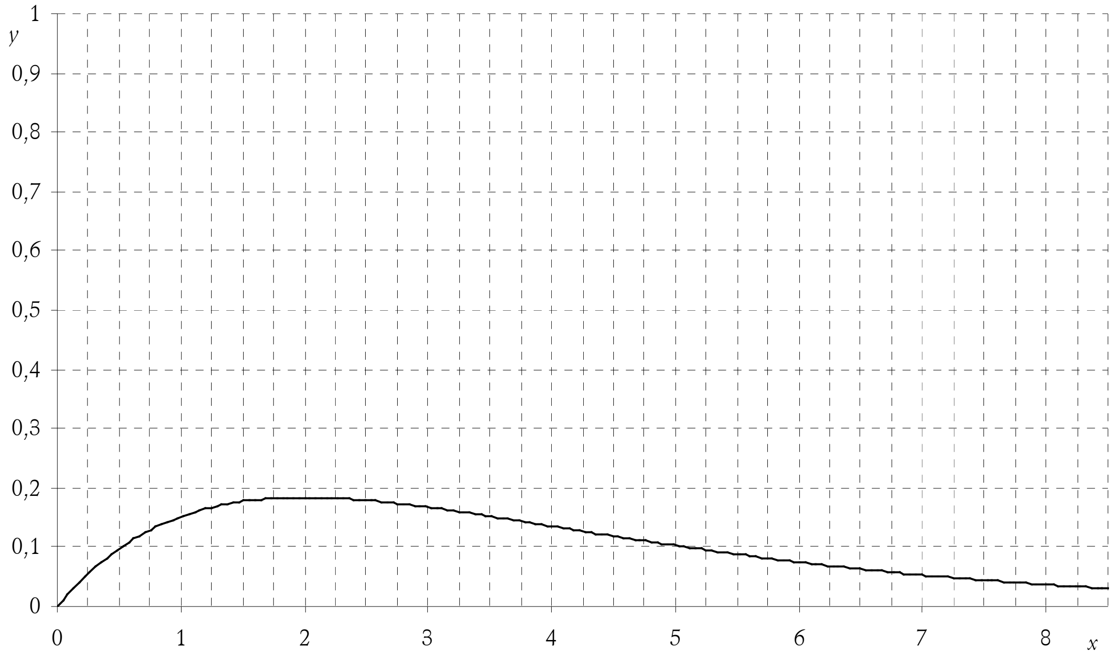
a. Montrer que F est une fonction croissante sur $[0\,;+\infty[$.

b. Montrer que $F(x)=1-e^{-\frac{x}{2}}-\dfrac{x}{2}e^{-\frac{x}{2}}$.

c. Calculer la limite de F en $+\infty$ et dresser le tableau de variations de F sur $[0\,;+\infty[$.

d. Justifier l'existence d'un unique réel α tel que $F(\alpha)=0,5$. A l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près par excès.

4. Soit n un entier naturel non nul. On note A_n l'aire en unités d'aire de la partie du plan située entre l'axe des abscisses, la courbe C et les droites d'équations $x=0$ et $x=n$. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $A_n\ge 0,5$.



y
1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x