

Polynésie

1. Exercice 1

7 points

On désigne par (E) l'ensemble des fonctions f continues sur l'intervalle $[0; 1]$ et vérifiant les conditions P_1 , P_2 et P_3 suivantes :

P_1 : f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; 1]$.

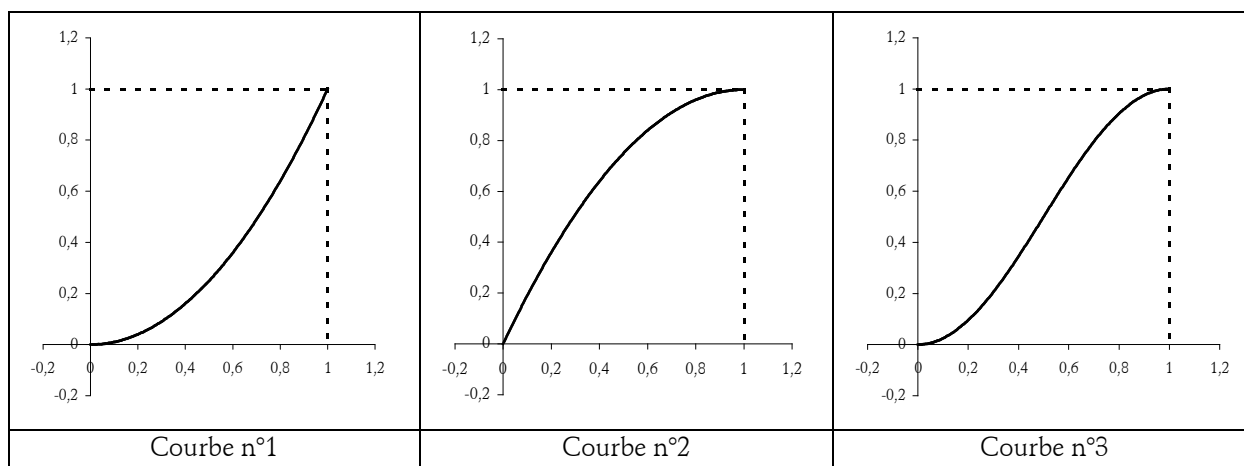
P_2 : $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

P_3 : Pour tout réel x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) \leq x$.

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on note (C) la courbe représentative d'une fonction f de l'ensemble (E) et (D) la droite d'équation $y = x$.

A toute fonction f de (E) on associe le nombre réel $I_f = \int_0^1 [x - f(x)] dx$.

1. a. Une seule des trois courbes ci-dessous représente une fonction de (E). La déterminer en justifiant l'élimination des deux autres.



b. Montrer que, pour toute fonction f de (E), $I_f \geq 0$.

2. Soit h la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $h(x) = 2^x - 1$ (on rappelle que pour tout réel x , $2^x = e^{x \ln 2}$).

a. Montrer que la fonction h vérifie les conditions P_1 et P_2 .

b. Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $\varphi(x) = 2^x - x - 1$.

Montrer que, pour tout x de $[0; 1]$, $\varphi(x) \leq 0$ (on pourra étudier les variations de φ sur $[0; 1]$). En déduire que la fonction h appartient à l'ensemble (E).

c. Montrer que le réel I_h associé à la fonction h est égal à $\frac{3}{2} - \frac{1}{\ln 2}$.

3. Soit P une fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont trois nombres réels avec $0 < a < 1$. On se propose de déterminer les valeurs des réels a, b et c pour que la fonction P appartienne à l'ensemble (E) et que $I_P = I_h$.

a. Montrer que la fonction P vérifie la propriété P_2 si et seulement si, pour tout réel de l'intervalle $[0; 1]$, $P(x) = ax^2 + (1-a)x$.

Montrer que toute fonction P définie sur $[0; 1]$ par $P(x) = ax^2 + (1-a)x$ avec $0 < a < 1$ appartient à (E).

b. Exprimer en fonction de a le réel I_P associé à la fonction P .

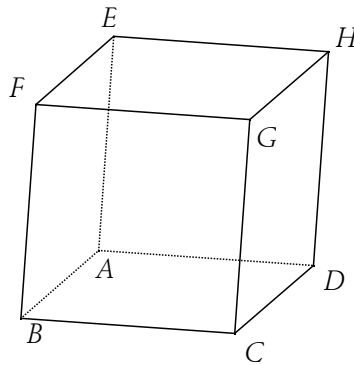
c. Montrer qu'il existe une valeur du réel a pour laquelle $I_P = I_h$. Quelle est cette valeur ?

2. Exercice 2

4 points

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 3.

On choisit le repère orthonormal $(D; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$, $\vec{j} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$, $\vec{k} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH}$.



1. a. Donner les coordonnées des points A, C, E .

b. Déterminer les coordonnées du point L barycentre du système $\{(C, 2); (E, 1)\}$.

c. Déterminer les coordonnées des vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{DL} .

2. Soit (a, b) un couple de réels. On note M le point de la droite (AE) tel que $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AE}$ et N le point de la droite (DL) tel que $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DL}$.

a. Montrer que le vecteur \overrightarrow{MN} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AE} et \overrightarrow{DL} si et seulement si le couple (a, b)

vérifie le système
$$\begin{cases} -a + 2b = 1 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$$
.

b. En déduire qu'il existe un seul point M_0 de (AE) et un seul point N_0 de (DL) tels que la droite (M_0N_0) est orthogonale aux droites (AE) et (DL) .

c. Déterminer les coordonnées des points M_0 et N_0 puis calculer la distance M_0N_0 .

3. Exercice 3

4 points

La végétation d'un pays imaginaire est composée initialement de trois types de plantes : 40 % de type A, 41 % de type B et 19 % de type C.

On admet qu'au début de chaque année :

Terminale S

2

F. Laroche

Polynésie

septembre 2007

- chaque plante de type A disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.

- chaque plante de type B disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type A, B ou C.

- chaque plante de type C disparaît et elle est remplacée par une et une seule nouvelle plante de type C.

La probabilité qu'une plante de type A soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type B est 0,3.

La probabilité qu'une plante de type B soit remplacée par une plante de même type est 0,6 et celle qu'elle le soit par une plante de type A est 0,3.

Au début de chaque année, on choisit au hasard une plante dans la végétation et on relève son type.

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- A_n l'événement « la plante choisie la n -ième année est de type A »,
- B_n l'événement « la plante choisie la n -ième année est de type B »,
- C_n l'événement « la plante choisie la n -ième année est de type C ».

On désigne par p_n , q_n et r_n les probabilités respectives des événements A_n , B_n et C_n . Compte tenu de la composition initiale de la végétation (année 0), on pose $p_0 = 0,40$, $q_0 = 0,41$ et $r_0 = 0,19$.

1. Recopier sur la copie et compléter l'arbre pondéré ci-contre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.

2. a. Montrer que $p_1 = 0,363$ puis calculer q_1 et r_1 .

b. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{cases} p_{n+1} = 0,6p_n + 0,3q_n \\ q_{n+1} = 0,3p_n + 0,6q_n \end{cases}$$

3. On définit les suites (S_n) et (D_n) sur \mathbb{N} par :

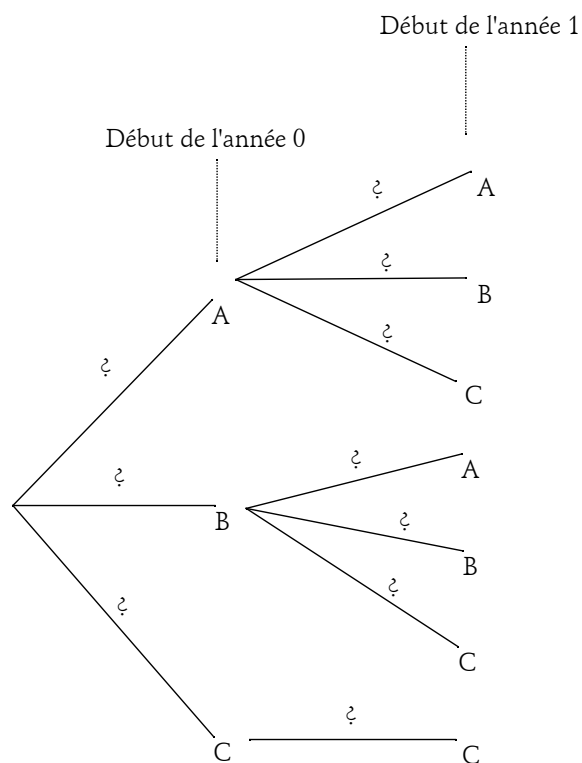
$$S_n = p_n + q_n \text{ et } D_n = p_n - q_n.$$

a. Montrer que (S_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison. On admet que (D_n) est une suite géométrique de raison 0,3.

b. Déterminer les limites des suites (S_n) et (D_n) .

c. En déduire les limites des suites (p_n) , (q_n) et (r_n) .

Interpréter le résultat.



4. Exercice 4 (spécialistes)

5 points

Pour cet exercice, les figures correspondant aux parties A et B sont fournies ci-dessous.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère un triangle OAB et une similitude directe σ de centre O , de rapport λ et d'angle θ .

Soit :

- les points A' et B' images respectives des points A et B par la similitude σ ;

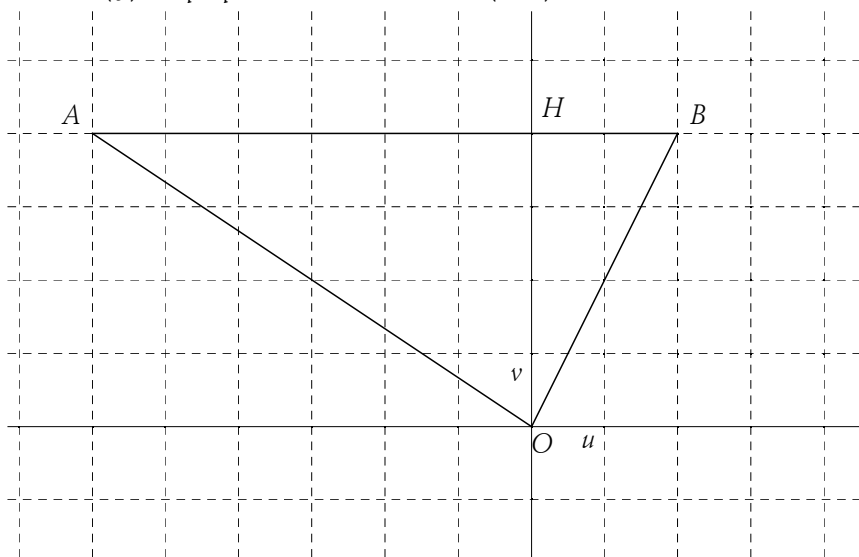
- les points I , milieu du segment $[A'B]$ et J , milieu du segment $[AB']$;
- le point M milieu du segment $[AA']$;
- le point H , projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) et le point H' image du point H par σ .

Partie A : Etude d'un exemple

Dans cette partie, le point A a pour affixe $-6 + 4i$, le point B a pour affixe $2 + 4i$, et le point H a donc pour affixe $4i$.

La similitude σ est la similitude directe de centre O , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. Déterminer les affixes des points A' , B' et H' .
2. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH') .



Partie B : Etude du cas général

1. a. Montrer que H' est le projeté orthogonal du point O sur la droite $(A'B')$.
b. Montrer que $\overline{MI} = \frac{1}{2} \overline{AB}$. On admet que $\overline{MJ} = \frac{1}{2} \overline{A'B'}$.
c. En déduire que $\frac{MJ}{MI} = \frac{OH'}{OH}$ et que $(\overline{MI}, \overline{MJ}) = (\overline{OH}, \overline{OH'}) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
2. On appelle s la similitude directe qui transforme M en O et I en H . On note K l'image du point J par la similitude s .
a. Montrer que $OK = OH'$, puis que $(\overline{OK}, \overline{OH'}) = 0 + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
b. En déduire que le point H' est l'image du point J par la similitude s .
3. Montrer que $(\overline{IJ}, \overline{HH'}) = (\overline{MI}, \overline{OH}) + k \times 2\pi, k \in \mathbb{Z}$. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH') .

