Amérique du Nord Correction

1. Exercice 1

1. (P) $2x+y-3z+1=0$; $A\ (1;11;7)$.

Proposition 1 : « Le point H, projeté orthogonal de A sur (P) a pour coordonnées $(0;2;1)$. »

Calculons $\overrightarrow{AH}=(-1;-9;-6)$ et le vecteur normal à (P) : $\vec{n}=(2;1;-3)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc c'est **faux**.

Nota : on peut chercher les coordonnées de H : comme H est le projeté orthogonal de A sur (P), alors $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel k tel que $\overrightarrow{AH}=k\,\vec{n}$, c'est-à-dire $\begin{cases} x_H-1=2k \\ y_H-11=k \\ z_H-7=-3k \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x_H=1+2k \\ y_H=11+k \\ z_H=7-3k \end{cases}$ (1). De plus, H appartient à (P), alors : $2(1+2k)+(11+k)-3(7-3k)+1=0$, $14k-7=0$.

On en déduit que $k=\dfrac{1}{2}$. En remplaçant dans (1), on obtient $\left(2\,;\dfrac{23}{2}\,;\dfrac{11}{2}\right)$.

2. (E) : $y'=2-2y$.

Proposition 2 : « On a $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$. »

Les solutions de (E) sont $u(x)=Ce^{-2x}-\dfrac{2}{-2}=Ce^{-2x}+1$; avec $u(0)=0$ on a $C=-1$ et $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right)=1-e^{-2\frac{\ln 2}{2}}=1-\dfrac{1}{e^{\ln 2}}=1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ donc **vrai**.

3. $u_0=2$; $u_{n+1}=\sqrt{7u_n}$.

Proposition 3 : « Pour tout entier naturel n, on a $0\le u_n\le 7$. »

$u_n\ge 0$ est évident ; par récurrence : $u_0=2\le 7$ et $u_n\le 7 \Leftrightarrow 7u_n\le 49 \Rightarrow \sqrt{7u_n}\le\sqrt{49}=7$ donc **vrai**.

2. Exercice 2 (non spécialistes)

1. a. $z_A=i$; $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$. $r : z\to z'=e^{i\frac{2\pi}{3}}z$.

b. $z_C=e^{i\frac{2\pi}{3}}z_B=e^{i\frac{2\pi}{3}}e^{-i\frac{5\pi}{6}}=e^{-i\frac{\pi}{6}}$.

c. $z_B=e^{-i\frac{5\pi}{6}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$; $z_C=e^{-i\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$.

d. Figure ci-dessous.

2. a. $z_D=\dfrac{1}{2-1+2}(2z_A-z_B+2z_C)=\dfrac{1}{3}\left(2i+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i+\sqrt{3}-i\right)=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

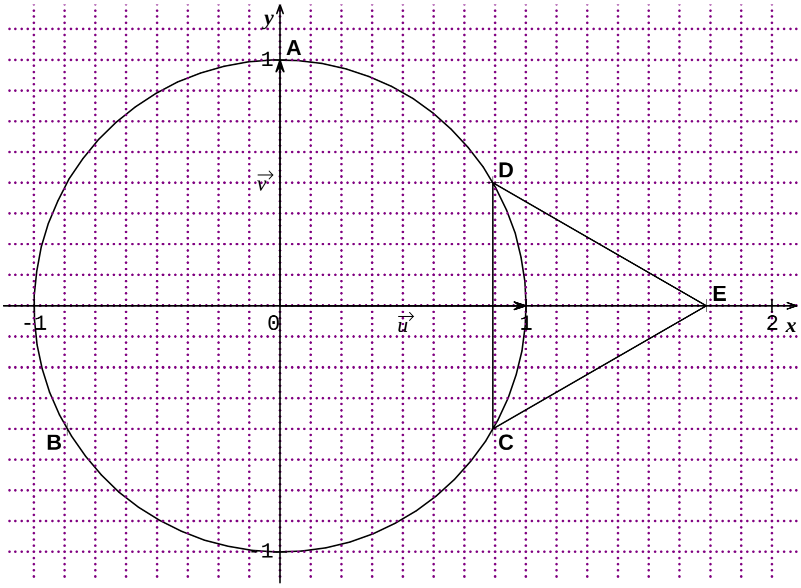
b. Tous ces points sont sur le cercle trigonométrique car leur module est 1.

3. a. $h : z \to z' / z' - i = 2(z - i) \Leftrightarrow z' = 2z - i$.

b. $z_E = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - i = \sqrt{3}$.

4. a. $\frac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}{\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{2i}{\sqrt{3} + i} = \frac{2i(\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. Le triangle CDE est équilatéral : $CD = CE$ et $\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}\right) = \frac{\pi}{3}$.



3. Exercice 2 (spécialistes)

1. $z' = (2 - 2i)z + 1$: similitude directe $2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ donc rapport $2\sqrt{2}$, angle $-\frac{\pi}{4}$. Le centre est tel que $\omega = (2 - 2i)\omega + 1 \Leftrightarrow \omega(-1 + 2i) = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{-1 - 2i}{5}$.

2. a. $b' = f(b) = (2 - 2i)(-4 + 2i) + 1 = -8 + 8i + 4i + 4 + 1 = -3 + 12i$.

b. $\frac{b' - c}{a - c} = \frac{-3 + 12i - 1 - 4i}{3 + 5i - 1 - 4i} = \frac{-4 + 8i}{2 + i} = \frac{(-4 + 8i)(2 - i)}{5} = \frac{20i}{5} = 4i$ donc $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB'}\right) = \arg(4i) = \frac{\pi}{2}$.

3. $\overrightarrow{CM'}.\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} x' - 1 \\ y' - 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2(x' - 1) + y' - 4 = 2x' + y' - 6$.

Par ailleurs $z' = (2 - 2i)z + 1 \Leftrightarrow x' + iy' = (2 - 2i)(x + iy) + 1 = 2x + 2y + 1 + i(-2x + 2y)$.

On remplace et on annule : $2(2x + 2y + 1) - 2x + 2y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x + 6y - 4 = 0 \Leftrightarrow x + 3y = 2$.

4. a. $(-4 ; 2)$ est une solution de (E) : $-4 + 3 \times 2 = 2$.

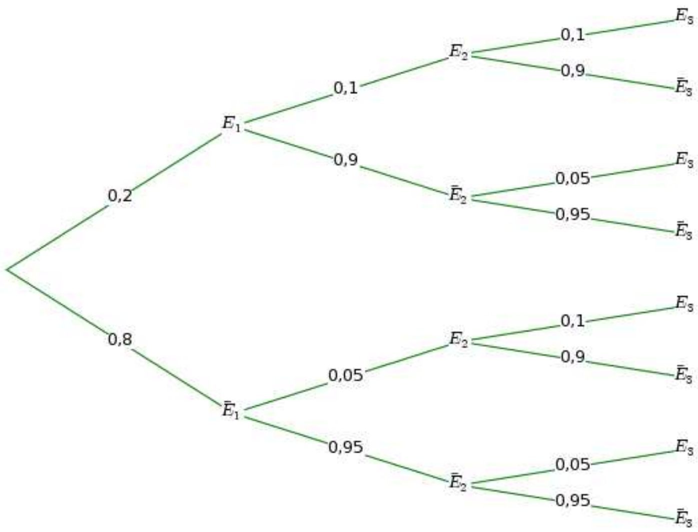
b. $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ -4 + 3(2) = 2 \end{cases} \Rightarrow x + 4 + 3(y - 2) = 0 \Leftrightarrow 1(x + 4) = 3(2 - y) \Rightarrow \begin{cases} x + 4 = 3k \\ 2 - y = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3k - 4 \\ y = 2 - k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

c. $\begin{cases} -5 \le 3k - 4 \le 5 \\ -5 \le 2 - k \le 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \le 3k \le 9 \\ -7 \le -k \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1/3 \le k \le 3 \\ -3 \le k \le 7 \end{cases} \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3\}$

d'où les quatre points : $(-4\,;2),(-1\,;1),(2\,;0),(5\,;-1)$.

4. Exercice 3

1. a. X prend les valeurs 0, 1, 2, 3.



b. Si on note G lorsqu'il gagne et P lorsqu'il perd : $(X=2)$ revient à PPG, PGP ou GPP.

$p(\mathrm{PPG})=p(\mathrm{P})p_{\mathrm{P}}(\mathrm{P})p_{\mathrm{P}}(\mathrm{G})=0,2\times0,1\times(1-0,1)=0,018$;

$p(\mathrm{PGP})=p(\mathrm{P})p_{\mathrm{P}}(\mathrm{G})p_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})=0,2\times(1-0,1)\times0,05=0,009$;

$p(\mathrm{GPP})=p(\mathrm{G})p_{\mathrm{G}}(\mathrm{P})p_{\mathrm{P}}(\mathrm{P})=0,8\times0,05\times0,1=0,004$, soit au total 0,031.

$(X=3)$ revient à PPP : $p(\mathrm{PPP})=p(\mathrm{P})p_{\mathrm{P}}(\mathrm{P})p_{\mathrm{P}}(\mathrm{P})=0,2\times0,1\times0,1=0,002$.

c. Il manque $(X=0)$: $p(\mathrm{GGG})=p(\mathrm{G})p_{\mathrm{G}}(\mathrm{G})p_{\mathrm{G}}(\mathrm{G})=0,8\times(1-0,05)\times(1-0,05)=0,722$ et $(X=1)$: $p(X=1)=1-0,722-0,031-0,002=0,245$.

d. $\mathrm{E}(X)=0,245+0,062+0,006=0,313$.

2. a. $p(E_n\cap E_{n+1})=p_{E_n}(E_{n+1})\times p(E_n)=0,1p_n$; $p\left(\overline{E_n}\cap E_{n+1}\right)=p_{\overline{E_n}}(E_{n+1})\times p\left(\overline{E_n}\right)=0,05(1-p_n)$.

b. $p_{n+1}=p(E_{n+1})=p(E_n\cap E_{n+1})+p\left(\overline{E_n}\cap E_{n+1}\right)=0,1p_n+0,05-0,05p_n=0,05p_n+0,05$.

3. a. $u_{n+1}=p_{n+1}-\dfrac{1}{19}=0,05p_n+0,05-\dfrac{1}{19}=0,05\left(u_n+\dfrac{1}{19}\right)+0,05-\dfrac{1}{19}=0,05u_n$. La raison est 0,05, le premier terme est $u_0=p_0-\dfrac{1}{19}=0,2-\dfrac{1}{19}=\dfrac{2,8}{19}$.

b. On a donc $u_n=u_0\times0,05^n\Rightarrow p_n=u_0\times0,05^n+\dfrac{1}{19}$.

c. Comme $0,05<1$ u_n tend vers 0 et p_n tend vers $\dfrac{1}{19}$.

5. Exercice 4

1. On numérote les propriétés :

(1) la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée ;

(2) $e^0=1$;

(3) pour tout réel x, on a $e^x > x$;

(4) soient deux fonctions φ et ψ définies sur l'intervalle $[A\,;+\infty[$ où A est un réel positif. Si, pour tout x de $[A\,;+\infty[$, on a $\psi(x) \le \varphi(x)$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} \psi(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$.

a. La dérivée de g est $g'(x) = e^x - x$ (utilisation de (1)) qui est positive (utilisation de (2)) ; par ailleurs $g(0) = 1$ (utilisation de (3)), soit $g(x) \ge 1$ et donc $g(x) \ge 0$.

b. On a donc $e^x \ge \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow \dfrac{e^x}{x} \ge \dfrac{x}{2}$; comme $\dfrac{x}{2}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ (utilisation de (4)).

2. $f(x) = \dfrac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$.

a. L'exponentielle est toujours positive ; sur $[0\,;+\infty[$, il en est de même de $\dfrac{1}{4}x$ donc $f(x) \ge 0$.

b. On pose $X = \dfrac{x}{2}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(x) = \dfrac{1}{2} \lim\limits_{X\to+\infty} X e^{-X} = 0$ (croissances comparées). La courbe de f admet l'axe (Ox) comme asymptote horizontale.

c. $f'(x) = \dfrac{1}{4}\left[e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}} \right] = \dfrac{1}{8}[2-x] e^{-\frac{x}{2}}$ donc positive avant 2, négative après. $f(2) = \dfrac{1}{2} e^{-1} = \dfrac{1}{2e}$.

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘	0

3. a. $F'(x) = f(x)$ (cours…) qui est positive sur $[0\,;+\infty[$ comme le montre le tableau de variation.

b. Soit on intègre par parties, soit on dérive $F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2} e^{-\frac{x}{2}}$ en vérifiant que $F(0) = 0$.

$F(0) = 1 - e^{0} - 0e^{0} = 1 - 1 = 0$; $F'(x) = \dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} - \left[\dfrac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}} \right] = \dfrac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} = f(x)$.

c. Tous les termes contenant $e^{-\frac{x}{2}}$ tendent vers 0 donc F tend vers 1.

x	0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	
$F(x)$	0	↗	1

d. F est monotone strictement croissante, continue sur $[0\,;+\infty[$; $0 < 0{,}5 < 1$, il existe donc un unique α dont l'image par F est 0,5. La calculatrice donne : $f(3{,}35) \approx 0{,}499$ et $f(3{,}36) \approx 0{,}501$; on prend $\alpha \approx 3{,}36$.

4. $A_n = F(n) - F(0) = F(n)$; on a donc $A_n \ge 0{,}5$ lorsque $n \ge \alpha$, soit pour $n = 4$.