

Antilles - Guyane

1. Exercice 1

*6 points*Question de cours

Prérequis : positivité et linéarité de l'intégrale.

Soient a et b deux réels d'un intervalle I de \mathbb{R} tels que $a \leq b$. Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur I telles que pour tout réel x de l'intervalle I , $f(x) > g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dt \geq \int_a^b g(x) dt$.

Partie A

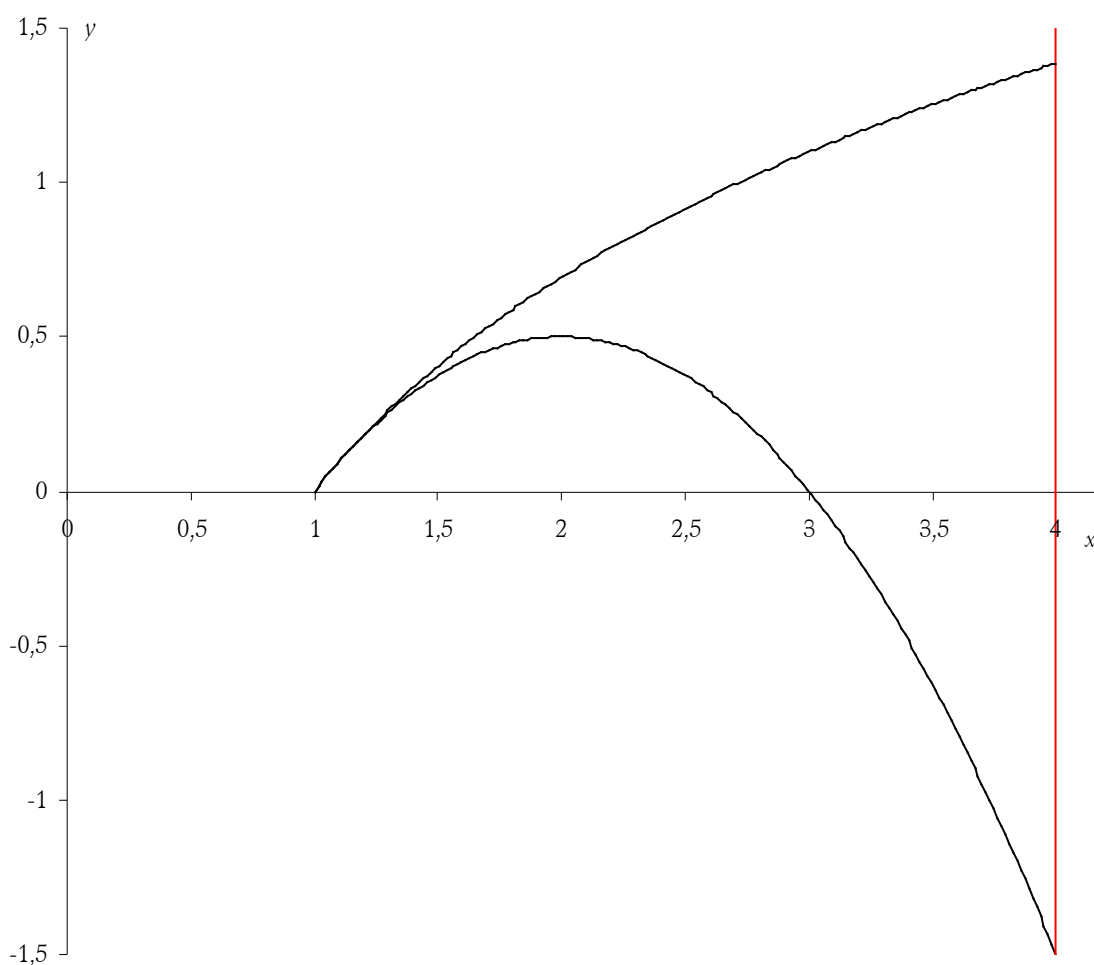
1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. Calculer en fonction de x l'intégrale $\int_1^x (2-t) dt$.
2. Démontrer que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[1; +\infty[$, on a : $2-t \leq \frac{1}{t}$.
3. Dédurre de ce qui précède que pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a : $-\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2} \leq \ln x$.

Partie B

Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$.

Sur le graphique joint en annexe, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel on a tracé les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1; 4]$. On a tracé également la droite (d) d'équation $x = 4$.

1. a. Démontrer que $\int_1^4 h(x) dx = 0$.
b. Illustrer sur le graphique le résultat de la question précédente.
2. On note D le domaine du plan délimité par la droite (d) et les courbes représentatives des fonctions h et logarithme népérien sur l'intervalle $[1; 4]$.
En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire de D en unités d'aire.



2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe. Soit A le point d'affixe $1 + i$.

Au point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{1}{2}(z + i\bar{z})$.

1. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec x, y, x' et y' réels.

a. Démontrer les égalités suivantes : $x' = \frac{1}{2}(x + y)$ et $y' = \frac{1}{2}(x + y)$. En déduire que le point M' appartient à la droite (OA) .

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $M = M'$.

c. Démontrer que pour tout point M du plan les vecteurs $\overline{MM'}$ et \overline{OA} sont orthogonaux.

2. Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. M_1 est le point d'affixe z_1 image de M par r , M_2 le point d'affixe $z_2 = \bar{z}$, M_3 le point d'affixe z_3 tel que le quadrilatère $OM_1M_3M_2$ soit un parallélogramme.

a. Dans cette question uniquement M a pour affixe $4 + i$, placer les points M, M_1, M_2, M_3 .

b. Exprimer z_1 en fonction de z , puis z_3 en fonction de z .

c. $OM_1M_3M_2$ est-il un losange ? Justifier.

d. Vérifier que $z' - z = \frac{1}{2}iz_3$. En déduire que $MM' = \frac{1}{2}OM_3$.

3. Démontrer que les points M, M_1, M_2 et M_3 appartiennent à un même cercle de centre O si et seulement si $MM' = \frac{1}{2}OM$.

Donner alors la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{M'OM}$.

3. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

$(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique 1 cm). On considère le point A d'affixe $z = 1 + i$. On note S_1 la symétrie orthogonale par rapport à l'axe $(O; \vec{u})$ et h l'homothétie de centre O et de rapport 3. On pose $s = h \circ S_1$.

Partie A

- Placer le point A et compléter la figure au fur et à mesure.
- Quelle est la nature de la transformation s ? Justifier.
- Déterminer l'écriture complexe de la transformation s .
- a. Déterminer l'affixe z_B du point B image de A par s .
b. Montrer que $z_B = -3iz_A$. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.
- Soient M le milieu de $[AB]$ et P l'image de M par s . Montrer que la droite (OP) est perpendiculaire à la droite (AB) .

Partie B

- On pose $C = s(B)$. Montrer que P est le milieu de $[BC]$.
- a. Déterminer l'écriture complexe de $s \circ s$ et en déduire sa nature.
b. Montrer que l'image de la droite (OP) par s est la droite (OM) .
c. Que représente le point M pour le triangle OBP ? Justifier.

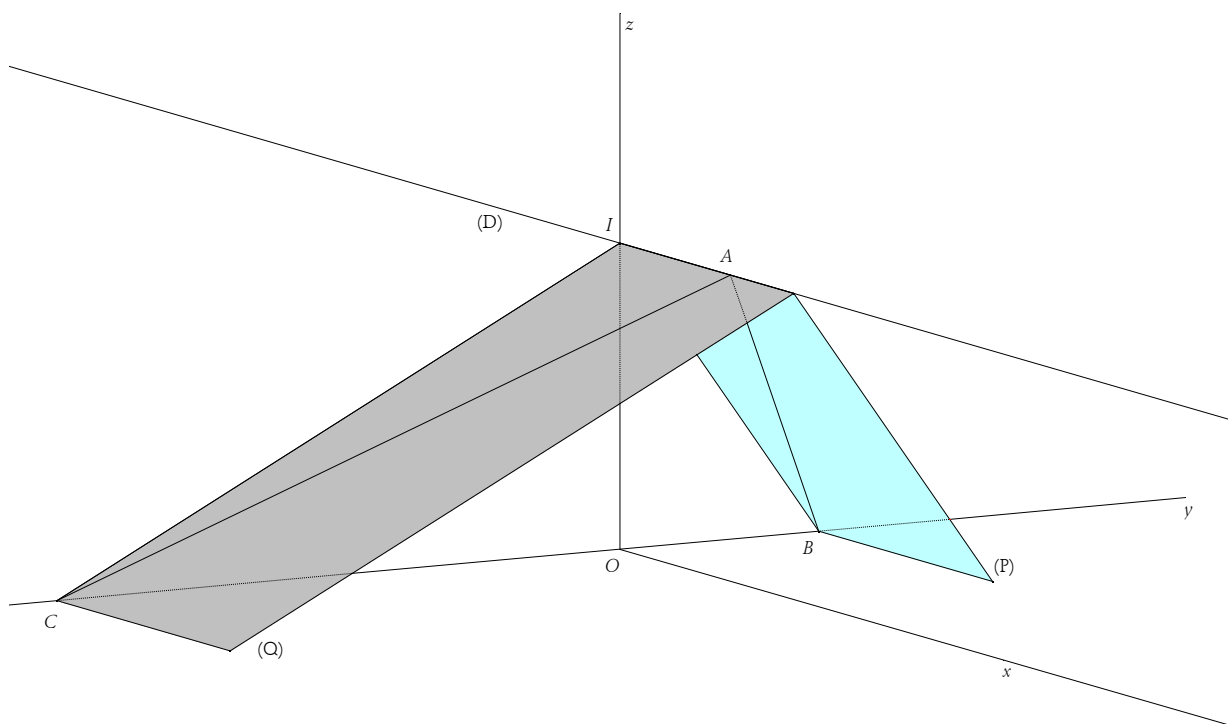
4. Exercice 3

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(3; 0; 6)$ et $I(0; 0; 6)$; on appelle (D) la droite passant par A et I .

On appelle (P) le plan d'équation $2y + z - 6 = 0$ et (Q) le plan d'équation $y - 2z + 12 = 0$.

- Démontrer que (P) et (Q) sont perpendiculaires.
- Démontrer que l'intersection des plans (P) et (Q) est la droite (D) .
- Démontrer que (P) et (Q) coupent l'axe $(O; \vec{j})$ et déterminer les coordonnées des points B et C , intersections respectives de (P) et (Q) avec l'axe $(O; \vec{j})$.
- Démontrer qu'une équation du plan (T) passant par B et de vecteur normal \overrightarrow{AC} est $x + 4y + 2z - 12 = 0$.
- Donner une représentation paramétrique de la droite (OA) . Démontrer que la droite (OA) et le plan (T) sont sécants en un point H dont on déterminera les coordonnées.
- Que représente le point H pour le triangle ABC ? Justifier.



5. Exercice 4

5 points

Pour chaque question, une seule des propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro et la lettre de la question ainsi que la valeur correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte aux questions 1 et 2 rapporte 0,5 point et à la question 3 rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,25 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

On s'intéresse à deux types de pièces électroniques, P_1 et P_2 , qui entrent dans la fabrication d'une boîte de vitesses automatique.

Une seule pièce de type P_1 et une seule pièce de type P_2 sont nécessaires par boîte.

L'usine se fournit auprès de deux sous-traitants et deux seulement : S_1 et S_2 .

Le sous-traitant S_1 produit 80 % des pièces de type P_1 et 40 % de pièces de type P_2 .

Le sous-traitant S_2 produit 20 % des pièces de type P_1 et 60 % de pièces de type P_2 .

1. Un employé de l'usine réunit toutes les pièces P_1 et P_2 destinées à être incorporées dans un certain nombre de boîtes de vitesses. Il y a donc autant de pièces de chaque type.

Il tire une pièce au hasard.

a. La probabilité que ce soit une pièce P_1 est :

0,8	0,5	0,2	0,4	0,6
-----	-----	-----	-----	-----

b. La probabilité que ce soit une pièce P_1 et qu'elle vienne de S_1 est :

0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
-----	-----	-----	-----	-----

c. La probabilité qu'elle vienne de S_1 est

0,2	0,4	0,5	0,6	0,8
-----	-----	-----	-----	-----

2. Il y a 200 pièces au total. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables.

a. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P_1 est :

0,1588	0,2487	0,1683	0,0095
--------	--------	--------	--------

b. Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité que ce soit deux pièces P_1 et P_2 est :

0,5000	0,2513	0,5025
--------	--------	--------

c. La probabilité que ce soient deux pièces fabriquées par le même fournisseur est :

$\frac{357}{995}$	$\frac{103}{199}$	$\frac{158}{995}$
-------------------	-------------------	-------------------

3. La durée de vie exprimée en années des pièces P_1 et P_2 suit une loi exponentielle dont le paramètre λ est donné dans le tableau suivant :

λ	P_1	P_2
S_1	0,2	0,25
S_2	0,1	0,125

On rappelle que si X , durée de vie d'une pièce exprimée en années, suit une loi exponentielle de paramètre λ , alors $p(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

Une valeur approchée à 10^{-4} près de la probabilité qu'une pièce P_1 fabriquée par S_1 dure moins de 5 ans est :

0,3679	0,6321
--------	--------