La Réunion

1. Exercice 1

5 points

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$.

On désigne par A et par B les points d'abscisses respectives a et b de la courbe Γ représentative de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Les points Q et R sont les projetés orthogonaux respectifs des points A et B sur l'axe des ordonnées.

1. a. Donner l'équation réduite de la tangente T au point A à la courbe Γ.

b. Déterminer l'ordonnée du point d'intersection P de T avec l'axe des ordonnées.

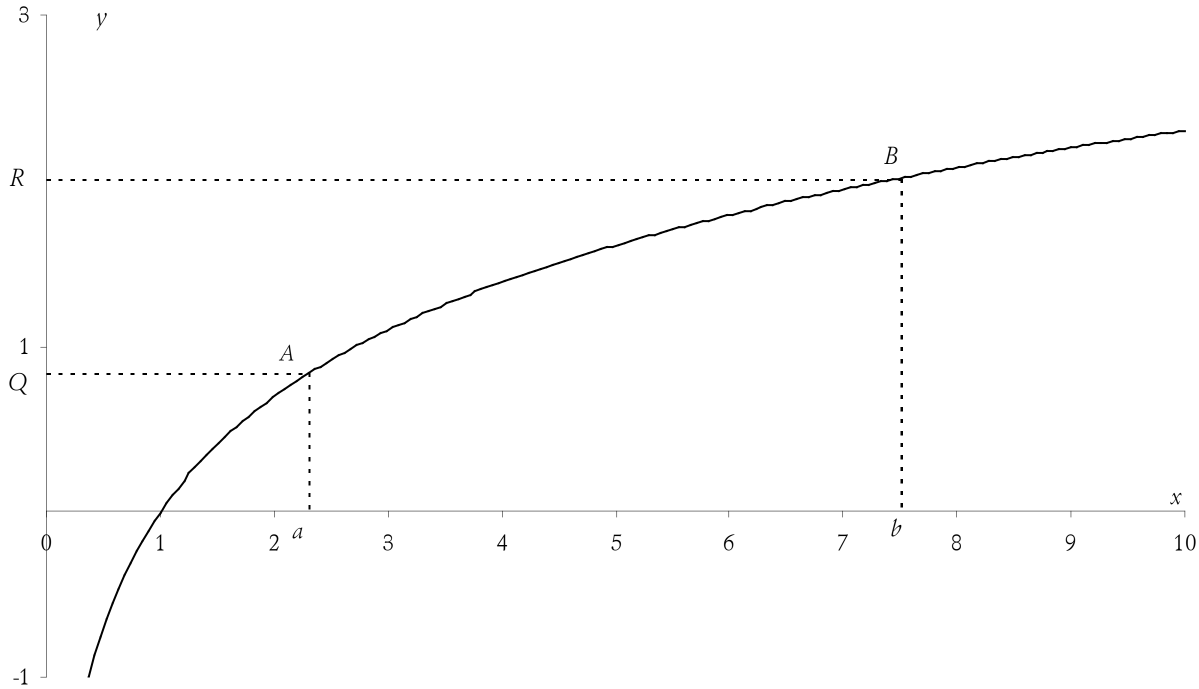
Calculer la longueur PQ. En déduire une construction simple de T ; la réaliser sur la figure ci-dessous.

2. Restitution organisée de connaissances : on suppose connue la propriété

« Pour tout couple $(x\,;y)$ de nombres réels strictement positifs, on a $\ln(xy) = \ln(x)+\ln(y)$. »

En déduire que, pour tout nombre réel m strictement positif, on a $\ln\sqrt{m} = \frac{1}{2}\ln m$.

3. Utiliser le résultat de la question 2 pour placer sur l'axe des abscisses le point G d'abscisse $\sqrt{ab}$. Expliquer la construction et la réaliser sur la figure (on laissera les traits de construction apparents).



2. Exercice 2

4 points

Soit a un nombre réel tel que $-1 < a < 0$.

On considère la suite u définie par $u_0 = a$, et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Étudier la monotonie de la suite u.

2. a. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=x^2+x$. Étudier le sens de variations de la fonction h.

En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1\,;0[$, le nombre $h(x)$ appartient aussi à l'intervalle $]-1\,;0[$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $-1 < u_n < 0$.

3. Étudier la convergence de la suite u. Déterminer, si elle existe, sa limite.

3. Exercice 3

6 points

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=1$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b. Établir que, pour tout nombre réel x non nul, $f(x)=x\left(1+\dfrac{1}{e^x-1}\right)$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Donner, sans démonstration, la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}$ et démontrer que f est continue en 0.

3. a. Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $e^x \geq x+1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x=0$.

b. Calculer la dérivée f' de la fonction f et déterminer la fonction g telle que, pour tout nombre réel x non nul, $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{\left(e^x-1\right)^2}$.

c. Donner le tableau des variations de f.

4. Soient x un nombre réel non nul et les points $M(x\,;f(x))$ et $M'(-x\,;f(-x))$ de la courbe C.

a. Établir que $f(-x)=\dfrac{x}{e^x-1}$, puis déterminer le coefficient directeur de la droite (MM').

b. On admet que la fonction f est dérivable en 0. Que suggère alors le résultat précédent ?

4. Exercice 4 (non spécialistes)

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. A, B, C désignent les points d'affixes respectives $a=-2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}-3i$ et $c=2i$.

1. a. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure ci-dessous. Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les tracés de construction apparents).

2. On désigne par E le barycentre du système $\{(A\,;1)\,;(C\,;3)\}$ et par F le barycentre du système $\{(A\,;2)\,;(B\,;1)\}$.

a. Établir que l'affixe e du point E est égale à $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$.

b. Déterminer l'affixe f du point F.

3. a. Démontrer que le quotient $\dfrac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire ki où k est un nombre réel à déterminer. En déduire que, dans le triangle ABC, le point E est le pied de la hauteur issue de B. Placer le point E sur le dessin.

b. Démontrer que le point F possède une propriété analogue. Placer F sur le dessin.

4. On désigne par H le barycentre du système $\{(A\ ;\ 2)\ ;\ (B\ ;\ 1)\ ;\ (C\ ;\ 6)\}$.

Démontrer que le point H est le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Qu'en déduit-on pour le point H ?

Correction

1. a. $b=\sqrt{3}-3i=2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

b. L'abscisse de B correspond au milieu de [OA] ; l'ordonnée est obtenue en traçant un triangle équilatéral de base [OA].

2. a. $e=\frac{1}{1+3}\left(z_A+3z_C\right)=\frac{1}{4}\left(-2\sqrt{3}+6i\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$.

b. $f=\frac{1}{2+1}\left(2z_A+z_B\right)=\frac{1}{3}\left(-4\sqrt{3}+\sqrt{3}-3i\right)=-\sqrt{3}-i$.

3. a. $\frac{e-c}{e-b}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-2i}{-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i-\sqrt{3}+3i}=\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}i}=\frac{-\sqrt{3}-i}{3\left(-\sqrt{3}+3i\right)}=\frac{\left(-\sqrt{3}-i\right)\left(-\sqrt{3}-3i\right)}{3\left(3+9\right)}=\frac{4\sqrt{3}}{36}i$.

On a donc $\left(\overrightarrow{BE},\overrightarrow{CE}\right)=\frac{\pi}{2}$; comme E est sur [AC] comme barycentre, (BE) est une hauteur de ABC.

b. Comme F est sur [AB], il ne peut être que le pied de la hauteur issue de C :

$$\frac{f-c}{f-a}=\frac{-\sqrt{3}-i-2i}{-\sqrt{3}-i+2\sqrt{3}}=\frac{-\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}-i}=\frac{\left(-\sqrt{3}-3i\right)\left(\sqrt{3}+i\right)}{10}=\frac{-4\sqrt{3}}{10}i\Rightarrow\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{CF}\right)=-\frac{\pi}{2}$$

donc F est le pied de la hauteur issue de C sur le côté [AB].

4. Avec les barycentres partiels, on a H le barycentre du système $\{(F\ ;\ 3)\ ;\ (C\ ;\ 6)\}$, H est sur (CF) ; de même H le barycentre du système $\{(B\ ;\ 1)\ ;\ (E\ ;\ 4)\}$ donc H est sur (BE). C'est leur point d'intersection et donc l'orthocentre de ABC.

5. Exercice 4 (spécialistes)

5 points

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. A, B, C désignent les points d'affixes respectives $a=-2\sqrt{3}$, $b=\sqrt{3}-3i$ et $c=2i$.

1. a. Écrire b sous forme exponentielle.

b. Les points A et C sont représentés sur la figure ci-dessous. Construire à la règle et au compas le point B sur ce dessin (laisser les tracés de construction apparents).

c. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AB}\right)$ et de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{AC}\right)$.

2. Les points E et F ont pour affixes respectives $e=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ et $f=-\sqrt{3}-i$.

a. Démontrer que les points A, E et C, d'une part, et les points A, F et B, d'autre part, sont alignés.

b. Démontrer que le quotient $\frac{e-c}{e-b}$ peut s'écrire ki où k est un nombre réel à déterminer.

Interpréter géométriquement ce résultat. On admet que, de façon analogue, $\frac{f-c}{f-b}$ peut s'écrire $k'i$ où k' est un nombre réel non nul que l'on ne demande pas de déterminer.

c. Placer les points E et F sur la figure.

3. On désigne par S la similitude indirecte dont l'écriture complexe est $z \to z' = \frac{1}{2}\bar{z} - \sqrt{3}$.

Déterminer les images par S des trois points A, B et C.

4. Soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). Placer le point $S(H)$ sur la figure.