

# CORRECTION DU BAC 2007

Terminale S

Liban

## Exercice 1

1) a) ➤  $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$  ;  $\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$  ;  $\ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$  (la fonction  $\ln$  étant strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ ).

➤  $1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$  ;  $1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > 1 \Leftrightarrow x > e$  ;  
 $1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow x < e$  (la fonction  $\ln$  étant strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ ).

➤ On en déduit le tableau de signes suivant :

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
signe de $\ln x$		-	0	+
signe de $1 - \ln x$		+	0	-
signe de $(\ln x)(1 - \ln x)$		-	0	-

b) Pour étudier la position relatives des courbes  $C$  et  $C'$  sur  $]0 ; +\infty[$ , il suffit d'étudier le signe de  $f(x) - g(x)$  sur cet intervalle.

Or  $f(x) - g(x) = \ln x - (\ln x)^2 = (\ln x)(1 - \ln x)$  ; alors on en déduit, d'après la question précédente que :

- sur  $]0 ; 1[ \cup ]e ; +\infty[$ , la courbe  $C$  est en dessous de  $C'$  ;
- sur  $]1 ; e[$ , la courbe  $C$  est au dessus de  $C'$  ;
- si  $x = 1$  et  $x = e$ , les courbes  $C$  et  $C'$  se coupent.

2) a) La fonction  $\ln$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et la fonction  $x \mapsto x^2$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , alors la fonction  $g$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  en tant que composée de deux fonctions dérivables.

Donc, la fonction  $h$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  en tant que somme de deux fonctions dérivables sur  $]0 ; +\infty[$ .

Soit  $x$  un réel strictement positif,  $h'(x) = \frac{1}{x} - 2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^{2-1} = \frac{1 - 2\ln x}{x}$ .

Comme  $x$  est strictement positif, alors le signe de  $h'(x)$  dépend de celui de  $(1 - 2\ln x)$ .

Or  $1 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$  ;  $1 - 2\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < \sqrt{e}$  ;

$1 - 2\ln x < 0 \Leftrightarrow \ln x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$  (la fonction  $\ln$  étant strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$ ).

Par conséquent, la fonction  $h$  est croissante sur  $]0 ; \sqrt{e}[$  et est décroissante sur  $]\sqrt{e} ; +\infty[$ .

b) Les points  $M$  et  $N$  ont pour coordonnées respectives  $(x ; f(x))$  et  $(x ; g(x))$ .

On en déduit que :  $MN = \sqrt{(g(x) - f(x))^2} = |g(x) - f(x)|$ . Or sur  $[1 ; e]$ ,  $f(x) \geq g(x)$  d'après la question 1). D'où :  $MN = f(x) - g(x) = h(x)$ .

Or, d'après la question précédente, la fonction  $h$  admet un maximum pour  $x = \sqrt{e}$ .

Par conséquent, sur l'intervalle  $[1 ; e]$ , la valeur maximale de  $MN$  est obtenue pour  $x = \sqrt{e}$ .

c) L'intervalle d'étude est  $]0 ; +\infty[$ .

Posons  $X = \ln x$  ; l'équation  $(\ln x)^2 - \ln x = 1$  équivaut à  $X^2 - X - 1 = 0$ .

Calculons le discriminant :  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5$ .

Comme  $\Delta > 0$ , alors l'équation  $X^2 - X - 1 = 0$  admet deux solutions

$$X_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Si  $X_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ , alors  $\ln(x_1) = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$  ; d'où  $x_1 = e^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$ .

Si  $X_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ , alors  $\ln(x_2) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  ; d'où  $x_2 = e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ .

Par conséquent, l'équation  $(\ln x)^2 - \ln x = 1$  admet deux solutions  $x_1 = e^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$  et  $x_2 = e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$ .

d) D'après la question 2) b),  $MN = \sqrt{(g(x) - f(x))^2} = |g(x) - f(x)|$ . Or sur  $]0 ; 1[ \cup ]e ; +\infty[$ ,  $f(x) < g(x)$ . Donc, sur  $]0 ; 1[ \cup ]e ; +\infty[$ ,  $MN = -(f(x) - g(x)) = -h(x) = -\ln x + (\ln x)^2$ .

On en déduit que :  $MN = 1$  équivaut à  $(\ln x)^2 - \ln x = 1$ , c'est-à-dire à  $x = e^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$  ou à  $x = e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$  d'après la question précédente.

Par conséquent, sur  $]0 ; 1[ \cup ]e ; +\infty[$ , il existe deux réels  $a = e^{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}$  et  $b = e^{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$  ( $a < b$ ) pour lesquels la distance  $MN$  est égale à 1.

3) a) Calculons  $\int_1^e \ln x \, dx$ .

Posons  $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ . Alors  $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = x \end{cases}$ .

Les fonctions  $u'v$ ,  $uv'$  et  $(uv)'$  sont continues et dérivables sur  $[1 ; e]$ , d'après la méthode de l'intégration par parties :

$$\int_1^e \ln x \, dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e x \times \frac{1}{x} \, dx = e \ln e - [x]_1^e = e - e + 1 = 1.$$

b) La fonction  $G$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  en tant que produit et somme de fonctions dérivables sur  $]0 ; +\infty[$ .

Soit  $x$  un réel strictement positif.

$$G'(x) = 1 \times \left[ (\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 \right] + x \times \left[ 2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x) - 2 \times \frac{1}{x} \right] = (\ln x)^2 - 2 \ln x + 2 + 2 \ln x - 2.$$

Par conséquent,  $G'(x) = (\ln x)^2 = g(x)$  pour tout réel  $x$  strictement positif.

Par suite, la fonction  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

c) Comme  $C$  est au dessus de  $C'$  sur  $]1; e[$ , alors  $A = \int_1^e (f(x) - g(x)) dx$ .

$$\text{Or } \int_1^e (f(x) - g(x)) dx = \int_1^e f(x) dx - \int_1^e g(x) dx = 1 - [G(x)]_1^e = 1 - G(e) + G(1).$$

$$\text{De plus, } G(1) = 1 \times \left[ (\ln 1)^2 - 2 \ln 1 + 2 \right] = 2 \text{ et } G(e) = e \times \left[ (\ln e)^2 - 2 \ln e + 2 \right] = e.$$

Donc,  $A = 1 - e + 2 = 3 - e$  u.a.

### Exercice 2 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1) D'après l'énoncé, la droite (d) a pour vecteur directeur  $\vec{u} \left( -\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{2} \right)$ .

On remarque que les coordonnées des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{j}(0; 1; 0)$  ne sont pas proportionnelles ; d'où ces vecteurs ne sont pas colinéaires.

Par suite, la droite (d) n'est pas parallèle à l'axe  $(O; \vec{j})$ .

La proposition 1 est donc fausse.

2) Comme  $P$  est orthogonal à (d), alors  $\vec{u} \left( -\frac{1}{2}; 0; -\frac{3}{2} \right)$  est un vecteur normal à  $P$ .

$$\text{Alors } P \text{ a pour équation } -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}z + d = 0.$$

Or  $A$  de coordonnées  $(2; -1; 1)$  appartient à  $P$ , d'où :  $-\frac{1}{2} \times 2 - \frac{3}{2} \times 1 + d = 0$ , c'est-à-dire

$$d = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Donc } P \text{ a pour équation } -\frac{1}{2}x - \frac{3}{2}z + \frac{5}{2} = 0, \text{ ou encore } x + 3z - 5 = 0.$$

La proposition 2 est donc vraie.

3) Comme  $C$  est le point d'abscisse 1, alors  $2 - \frac{t}{2} = 1$ , c'est-à-dire  $t = 2$  ; d'où  $C$  a pour coordonnées  $(1; 1; 2)$ .

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}), \text{ soit } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}.$$

Or  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ont pour coordonnées respectives  $(2; -1; 1)$  et  $(-1; 2; 1)$  ; alors

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + (-1) \times 2 + 1 \times 1 = -3, \quad AB = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6} \text{ et}$$

$$AC = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

$$\text{On en déduit que : } \cos(\widehat{BAC}) = \frac{-3}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right).$$

Par conséquent, la mesure de l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$  est  $\frac{2\pi}{3}$  radians.

La proposition 3 est donc fausse.

4) Comme  $G$  est le barycentre des points pondérés  $(A, -1)$ ,  $(B, 1)$  et  $(C, 1)$ , alors  $G$  a

$$\text{pour coordonnées } \begin{cases} x_G = \frac{-x_A + x_B + x_C}{-1+1+1} \\ y_G = \frac{-y_A + y_B + y_C}{-1+1+1} \\ x_G = \frac{-y_A + y_B + y_C}{-1+1+1} \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x_G = \frac{3}{1} = 3 \\ y_G = \frac{0}{1} = 0 \\ x_G = \frac{3}{1} = 3 \end{cases}.$$

On en déduit que le milieu du segment  $[AG]$  a pour coordonnées  $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right)$ .

Or le milieu du segment  $[BC]$  a pour coordonnées  $\left(\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right)$ .

Donc  $[AG]$  et  $[BC]$  ont le même milieu.

La proposition 4 est donc vraie.

5) Le rayon de la sphère de centre  $C$  et passant par  $B$  est  $BC = \sqrt{18}$ .

Calculons la distance du point  $C$  au plan  $P$  :  $\frac{|x_C + 3z_C - 5|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ .

Or  $\frac{\sqrt{10}}{5}$  est strictement inférieur à  $\sqrt{18}$ , donc la sphère coupe le plan  $P$ .

La proposition 5 est donc vraie.

### Exercice 2 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1) La similitude directe de centre  $A$  d'affixe  $\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i$ , d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et de rapport 2 a pour

écriture complexe  $z' - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = 2 e^{i\frac{\pi}{2}} \left(z - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right)\right)$ , soit

$$z' = 2i \left(z - \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right)\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{5}i\right) = 2iz - \frac{2}{5}i + \frac{4}{5} + \frac{1}{5} + \frac{2}{5}i = 2iz + 1.$$

La proposition 1 est donc vraie.

2) Soit  $P$  le plan d'équation  $z = 5$ .

$$M(x; y; z) \in S \cap P \text{ équivaut à } \begin{cases} z = 5 \\ z = x^2 + 2x + y^2 + 1 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} z = 5 \\ x^2 + 2x + y^2 + 1 = 5 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} z = 5 \\ (x+1)^2 - 1 + y^2 + 1 = 5 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} z = 5 \\ (x+1)^2 + y^2 = 5 \end{cases}$$

Donc la section de la surface  $S$  et du plan  $P$  est le cercle de centre  $(-1; 0; 5)$  et de rayon  $\sqrt{5}$ .

La proposition 2 est donc fausse.

$$3) 750 = 5^3 \times 6; \text{ alors } 5^{750} - 1 = 5^{5^3 \times 6} - 1 = \left(5^{5^3}\right)^6 - 1 = \left(5^{5^3}\right)^{7-1} - 1.$$

Or 7 est un nombre premier qui ne divise pas  $5^{5^3}$ , alors, d'après le petit théorème de Fermat,  $\left(5^{5^3}\right)^{7-1} \equiv 1 \pmod{7}$ . On en déduit que  $\left(5^{5^3}\right)^{7-1} - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ .

Par conséquent,  $5^{750} - 1 = \left(5^{5^3}\right)^{7-1} - 1$  est divisible par 7.

La proposition 3 est donc vraie.

Petit théorème de Fermat : Soit  $n$  un entier.

Si  $p$  est un nombre premier ne divisant pas  $n$ , alors  $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ .

4) Cherchons le PGCD de  $4n+3$  et  $3n+1$  :

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(4n+3, 3n+4) &= \text{PGCD}(4n+3-3n-4, 3n+4) \\ &= \text{PGCD}(n-1, 3n+4) \\ &= \text{PGCD}(n-1, 3n+4) \\ &= \text{PGCD}(3n+4, n-1) \\ &= \text{PGCD}(3n+4-3(n-1), n-1) \\ &= \text{PGCD}(7, n-1) \end{aligned}$$

Or  $n$  est congru à 1 modulo 7, alors  $n-1$  est congru à 0 modulo 7.

On en déduit que  $\text{PGCD}(7, n-1) = 7$ .

La proposition 4 est donc vraie.

5) Si il existe deux entiers relatifs  $u$  et  $v$  tels que  $au + bv = 2$ , alors 2 est un multiple du PGCD de  $a$  et  $b$ .

Par conséquent,  $\text{PGCD}(a, b)$  est égal à 1 ou à 2.

La proposition 5 est donc fausse.

### Exercice 3

1) Si le tirage a lieu dans l'urne  $U_1$  à l'étape 2, c'est que l'on a tiré une boule blanche à l'étape 1.

Or il y a 17 boules blanches parmi les 20 de l'urne  $U_1$ .

Par conséquent,  $p_2 = \frac{17}{20}$ .

2) Soit  $B_n$  l'événement : « la boule tirée à l'étape  $n$  est blanche ».

Si  $n=1$ , on a :  $0,8p_1 + 0,05 = 0,85 = \frac{85}{100} = \frac{17}{20} = p_2$ .

Si  $n \geq 2$  : on peut construire l'arbre pondéré suivant (voir page suivante).

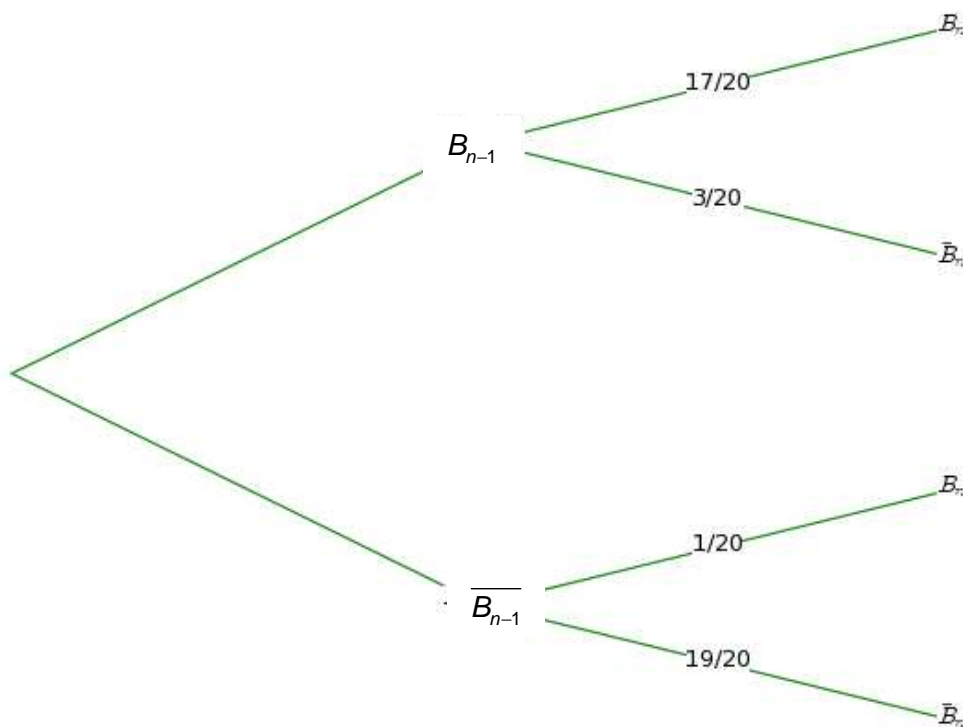
$B_{n-1}$  et  $\overline{B_{n-1}}$  forment une partition de l'univers des tirages à l'étape  $n-1$  ; d'après la formule des probabilités totales, on obtient :

$$p_{n+1} = p(A_{n+1}) = p(B_n) = p_{B_{n-1}}(B_n) \times p(B_{n-1}) + p_{\overline{B_{n-1}}}(B_n) \times p(\overline{B_{n-1}}).$$

Or  $p(B_{n-1}) = p(A_n) = p_n$  et  $p(\overline{B_{n-1}}) = 1 - p_n$ ,  $p_{B_{n-1}}(B_n) = \frac{17}{20}$  et  $p_{\overline{B_{n-1}}}(B_n) = \frac{1}{20}$ .

D'où :  $p_{n+1} = \frac{17}{20} \times p_n + \frac{1}{20} \times (1 - p_n) = \frac{16}{20} p_n + \frac{1}{20} = 0,8p_n + 0,05$ .

Par conséquent, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$ .



3)  $p_3 = 0,8p_2 + 0,05 = 0,8 \times 0,85 + 0,05 = 0,73$ . Donc  **$p_3 = 0,73$** .

4) a) Soit  $\checkmark(n)$  la proposition : « pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  $p_n > 0,25$  »

→ Comme  $p_1 = 1$ , alors on a  $\checkmark(1)$  qui est vraie.

→ Montrons que pour tout  $n \geq 1$ , on a :  $\checkmark(n) \Rightarrow \checkmark(n+1)$ .

Soit  $n \geq 1$ . Supposons que  $\checkmark(n)$  est vraie. Alors :  $p_n > 0,25$ .

D'où  $0,8p_n + 0,05 \geq 0,8 \times 0,25 + 0,05$  car la fonction  $x \mapsto 0,8x + 0,05$  est strictement croissante sur  $]0,25 ; +\infty[$ , c'est-à-dire  $p_{n+1} > 0,25$ .

On en déduit que  $\checkmark(n+1)$  est vraie.

On a alors prouvé :

$\checkmark(1)$  et pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1,  $\checkmark(n) \Rightarrow \checkmark(n+1)$ .

→ Du principe de raisonnement par récurrence, on déduit :

pour tout  $n$  supérieur ou égal à 1,  $\checkmark(n)$  est vraie

C'est-à-dire : pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ ,  **$p_n > 0,25$** .

b)  $p_{n+1} - p_n = 0,8p_n + 0,05 - p_n = -0,2p_n + 0,05 = -0,2(p_n - 0,25)$ , pour tout entier naturel  $n$  non nul.

Or, d'après la question précédente, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $p_n > 0,25$ , c'est-à-dire  $p_n - 0,25 > 0$ . Donc,  $p_{n+1} - p_n < 0$ , pour tout entier naturel  $n$  non nul.

Par conséquent, la suite  $(p_n)$  est décroissante.

c) Comme la suite  $(p_n)$  est décroissante et minorée par 0,25, alors elle est convergente vers un réel que l'on notera  $l$ .

d) Comme  $p_{n+1} = 0,8p_n + 0,05$ , par passage aux limites, on obtient :

$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{n+1} = 0,8 \times \lim_{n \rightarrow +\infty} p_n + 0,05$ , c'est-à-dire  $l = 0,8l + 0,05$ .

D'où :  $l = \frac{0,05}{0,2} = 0,25$ . Par conséquent, la suite  $(p_n)$  converge vers 0,25.

#### Exercice 4

1)  $z' = \frac{z}{|z|}(2 - |z|) = \frac{r e^{i\alpha}}{r}(2 - r)$  car  $|z| = r$ . Par conséquent,  $z' = (2 - r)e^{i\alpha}$ .

2) Comme  $a = 3$ , alors  $|a| = 3$  et  $\arg(a) = 0$ ; d'où, d'après la question précédente,  $a' = (2 - 3)e^0 = -1$ .

Par conséquent, l'affixe  $a'$  du point  $A'$ , image par  $f$  du point  $A$  d'affixe 3, est  $-1$ .

3) a)  $|\sqrt{3} + i| = \sqrt{3+1} = 2$ , alors  $b = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ .

Donc,  $b = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$ .

b) D'après la question 1),  $b' = (2 - 2)e^{i\frac{5\pi}{6}} = 0$ .

Par conséquent, l'affixe  $b'$  du point  $B'$ , image par  $f$  du point  $B$ , est 0.

4) Voir la figure à la fin de l'exercice.

5) a) Soit  $M$  un point, d'affixe  $z$ , du plan privé du point  $O$ .

$f(M) = O$  équivaut à  $\begin{cases} z \neq 0 \\ \frac{z}{|z|}(2 - |z|) = 0 \end{cases}$ , c'est-à-dire à  $|z| = 2$ .

Donc, l'ensemble  $E$  des points  $M$  du plan privé de  $O$  dont l'image par  $f$  est  $O$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 2.

b) Voir page suivante.

6) a) Soit  $M$  un point, d'affixe  $z$ , du plan privé du point  $O$ .

$f(M) = M$  équivaut à  $\begin{cases} z \neq 0 \\ \frac{z}{|z|}(2 - |z|) = z \end{cases}$ , c'est-à-dire à  $\begin{cases} z \neq 0 \\ 2 - |z| = z \times \frac{|z|}{z} \end{cases}$ , soit  $\begin{cases} z \neq 0 \\ 2 - |z| = |z| \end{cases}$ .

Donc,  $f(M) = M$  équivaut à  $\begin{cases} z \neq 0 \\ |z| = 1 \end{cases}$ .

Par conséquent, l'ensemble des points  $M$  du plan privé de  $O$  dont l'image par  $f$  est  $M$  est le cercle  $C_1$ .

7) Soit  $M$  un point du plan distinct de  $O$ , d'affixe  $z$ , n'appartenant pas au cercle  $C_1$ .

a)  $I$  a pour affixe  $\frac{z + z'}{2} = \frac{re^{i\alpha} + (2 - r)e^{i\alpha}}{2} = e^{i\alpha}$ .

D'où  $OI = |z_I| = |e^{i\alpha}| = 1$ . On en déduit que  $I$  appartient au cercle  $C_1$ .

b)  $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \arg\left(\frac{z_{OM}}{z_{OI}}\right) = \arg\left(\frac{re^{i\alpha}}{e^{i\alpha}}\right) = \arg(r) = 0$  car  $r$  est un réel strictement positif.

Par conséquent, les vecteurs  $\overrightarrow{OI}$  et  $\overrightarrow{OM}$  sont colinéaires et de même sens.

$I$  appartient alors à la demi-droite  $[OM)$ .

c) Construisons d'abord le point  $I$  : d'après les questions 7) a) et 7) b), le point  $I$  est le point d'intersection du cercle  $C_1$  et de la demi-droite  $[OM_1)$ .

Comme  $I$  est le milieu de  $[M_1M'_1]$ , alors on construit le symétrique de  $M_1$  par rapport à  $I$  pour obtenir le point  $M'_1$ .

