

**Polynésie****Correction****1. Exercice 1****Partie A**

$$1. p(G) = p(B) \times p(\text{dé} < 6) + p(N) \times p(\text{dé} = 6) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{7}{30}.$$

$$2. p_P(B) = \frac{p(\text{Blanc et Perdu})}{p(P)} = \frac{\frac{1}{10} \times \frac{1}{6}}{1 - \frac{7}{30}} = \frac{1}{60} \times \frac{30}{23} = \frac{1}{46}.$$

$$3. \text{Loi binomiale : } n = 4, p = \frac{7}{30}; \text{ il en gagne 2 avec la probabilité } \binom{4}{2} \left(\frac{7}{30}\right)^2 \left(\frac{23}{30}\right)^2 \approx 0,192.$$

$$4. \text{Loi binomiale : } n \text{ quelconque, } p = \frac{7}{30}; p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n; \text{ on a alors}$$

$$p(X \geq 1) \geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{23}{30}\right)^n \geq 0,99 \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{23}{30}\right) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{23}{30}\right)} = 17,3$$

d'où  $n = 18$ .

**Partie B**

$$1. a. X \text{ prend les valeurs } -1 \text{ et } 4; p(X = -1) = p(P) = \frac{23}{30}, p(X = 4) = p(G) = \frac{7}{30}.$$

$$E(X) = -\frac{23}{30} + 4 \frac{7}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}.$$

b. L'organisateur en semble pas très matheux...

$$2. \text{Il faut recalculer } p(G) = p(B) \times p(\text{dé} < 6) + p(N) \times p(\text{dé} = 6) = \frac{1}{n+1} \times \frac{5}{6} + \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{6} = \frac{5+n}{6(n+1)} \text{ d'où}$$

$$E(X) = -1 \times \left(1 - \frac{5+n}{6(n+1)}\right) + 4 \times \frac{5+n}{6(n+1)} = \frac{-(6n+6-5-n)+20+4n}{6(n+1)} = \frac{-n+19}{6(n+1)} \text{ qui sera positif lorsque } n \leq 19.$$

**2. Exercice 2**

$$1. \bar{z} - 3iz - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow (x - iy) - 3i(x + iy) - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 3 + i(-y - 3x + 6) = 0, \text{ soit}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 3 = 0 \\ -3x - y + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3y + 3 \\ 8y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \frac{3}{8}, x = \frac{-9+24}{8} = \frac{15}{8} \text{ et } z = \frac{15}{8} + i \frac{3}{8}.$$

$$2. OAB \text{ est un triangle équilatéral de sens direct si A a pour image B par la rotation de centre O, d'angle } \frac{\pi}{3}.$$

$$r: z \rightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z \Rightarrow b = e^{i\frac{\pi}{3}} (4 - 2i) = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) (4 - 2i) = 2 + \sqrt{3} + i(2\sqrt{3} - 1).$$

3. a.  $\arg(z - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow (\vec{u}; \overrightarrow{DM}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$  ; il s'agit de la demi-droite faisant un angle de  $45^\circ$  avec l'horizontale, passant par  $D$  et orientée vers la droite.

b.  $z = 2i + 2e^{i\theta} \Leftrightarrow z - 2i = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow |z - 2i| = 2$  : il s'agit du cercle de rayon 2 et de centre  $D$ .

4.  $|z'| = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = |\bar{z} + 2| = |\overline{z + 2}| = |z + 2|$  car le module du conjugué est le même que celui de l'original. Il s'agit du cercle de diamètre  $IJ$  où  $I$  a pour affixe 1 et  $J$  a pour affixe  $-2$  privé des points  $I$  et  $J$ .

### 3. Exercice 3 (non spécialistes)

On considère les points  $A\left(\frac{2}{3}; -3; 2\right)$  et  $B\left(-\frac{4}{3}; 0; -4\right)$ . On note  $I$  le milieu du segment  $[AB]$  et (S) la sphère de diamètre  $[AB]$ .

1. Soit  $E$  le barycentre des points pondérés  $(A; 2)$  et  $(B; 1)$ .

a.  $x_E = \frac{1}{3}\left(2 \times \frac{2}{3} + 1 \times -\frac{4}{3}\right) = 0$ ,  $y_E = -2$ ,  $z_E = 0$ .

b.  $\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MO}\| \Leftrightarrow 3ME = 3MO \Leftrightarrow ME = MO$ , (P) est le plan médiateur du segment  $[OE]$ .

c.  $ME = MO \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y+2)^2 - (z-0)^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 - (z-0)^2 \Leftrightarrow y^2 + 4y + 4 = y^2$  donc une équation du plan (P) est  $y = -1$ .

2. a.  $I$  a pour coordonnées :  $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{3}{2}; -1\right)$ . Le rayon de (S) est  $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{4+9+36} = \frac{7}{2}$  ;

$d(I, P) = \frac{\left|-\frac{3}{2} + 1\right|}{1} = \frac{1}{2}$ . Comme cette distance est inférieure au rayon de (S), il y a intersection.

b. On fait l'intersection entre (S) et (P) :  $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{4}$  et  $y = -1$ , soit

$$\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(-1 + \frac{3}{2}\right)^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{4} \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = \frac{49}{4} - \frac{1}{4} = 12.$$

Le centre de (C) est le point  $\left(-\frac{1}{3}; -1; -1\right)$ , le rayon est  $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ .

3. Soit  $D$  le point de coordonnées  $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; 4\sqrt{3} - 1\right)$ .

a.  $\overrightarrow{IM} = t\overrightarrow{ID} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1/3 = t \times 0 \\ y + 3/2 = t \times 1 \\ z + 1 = t \times 4\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1/3 \\ y = -3/2 + t \\ z = -1 + t4\sqrt{3} \end{cases}$ .

b. On remplace dans l'équation de (C) :  $\left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + (z+1)^2 = 12 \Rightarrow 0 + 48t^2 = 12 \Rightarrow t = \pm \frac{1}{2}$ , soit les points

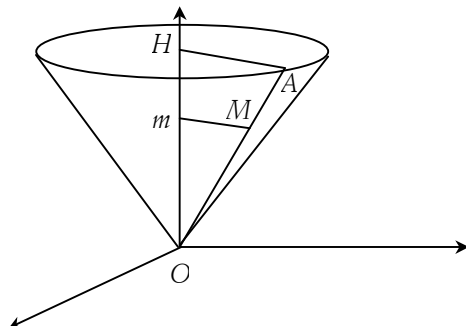
$\begin{cases} x = -1/3 \\ y = -2 \\ z = -1 - 2\sqrt{3} \end{cases}$  ou  $\begin{cases} x = -1/3 \\ y = -1 \\ z = -1 + 2\sqrt{3} \end{cases}$ , mais seul le second est dans le plan (P) !

#### 4. Exercice 3 (spécialistes)

##### Partie A

$A(1; 3; 2)$ ,  $B(4; 6; -4)$  et le cône  $(\Gamma)$  d'axe  $(O; \vec{k})$ , de sommet  $O$  et contenant le point  $A$ .

1.



Rien de tel qu'une figure : le triangle  $OHA$  est rectangle en  $H$  de coordonnées  $(0; 0; 2)$  ; même chose pour

$OmM$ , soit avec Thalès :  $\frac{Om}{OH} = \frac{OM}{OA} \Leftrightarrow \frac{z^2}{4} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{14} \Leftrightarrow \frac{7z^2 - 2z^2}{28} = \frac{x^2 + y^2}{14} \Leftrightarrow \frac{5z^2}{2} = x^2 + y^2$ .

2. a. Un vecteur normal à  $(P)$  est  $\vec{k}$  :  $\overrightarrow{BM} \cdot \vec{k} = 0 \Leftrightarrow z + 4 = 0$ .

b. Comme l'axe du cône est orienté par  $\vec{k}$ , perpendiculaire à  $(P)$ , l'intersection  $(C_1)$  est un cercle à l'altitude  $z = -4$ . Son équation est  $x^2 + y^2 = 40$ .

3. L'intersection est une parabole car le plan  $y = 3$  est vertical.

##### Partie B

1. a. Pour résoudre l'équation  $(E)$  :  $x^2 + y^2 = 40$  on prend la calculatrice et on cherche les couples qui marchent. On trouve alors  $(2; 6)$  et  $(6; 2)$ .

0	6,32455532
1	6,244998
2	6
3	5,56776436
4	4,89897949
5	3,87298335
6	2
7	impossible

b. Il y a les points  $(2; 6; -4)$  et  $(6; 2; -4)$ .

2. a. Equation de  $(\Gamma)$  :  $\frac{5z^2}{2} = x^2 + y^2$  ; il faut donc que 2 divise  $z^2$  puisqu'il ne divise pas 5, on a alors

$2z' = z$  et  $\frac{20z'^2}{2} = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 10z'^2 = x^2 + y^2$  d'où  $x^2 + y^2$  est divisible par 10.

b. Si  $M$  est un point de  $(C_2)$  alors  $y = 3$  d'où  $x^2 + y^2 = 10k \Leftrightarrow x^2 = 10k - 9 = 1 + 10(k - 1)$  donc  $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$ .

c.  $x^2 \equiv 1 \pmod{10}$  : on teste les valeurs des résidus modulo 10 : il y a uniquement 1 et 9 qui élevés au carré donnent 1 modulo 10.

résidu	carré modulo 10
0	0
1	1
2	4
3	9
4	6
5	5
6	6
7	9
8	4
9	1

d.  $10z'^2 = 1^2 + 9 = 10 \Leftrightarrow z' = \pm 1 \Rightarrow z = \pm 2$ , on a donc un autre point :  $A'(1; 3; -2)$  ;

$10z'^2 = 9^2 + 9 = 90 \Leftrightarrow z' = \pm 3 \Rightarrow z = \pm 6$  et donc deux autres points :  $(9; 3; -6), (9; 3; 6)$ , mais il y en a d'autres encore, obtenus en changeant les divers signes.

#### 5. Exercice 4

##### Partie A

1. a.  $\ln x > 0$  sur  $[1; 2]$  donc  $f$  est positive sur  $[1; 2]$ .

b.  $M$  a pour coordonnées  $(1; 1)$ ,  $N(2; 1 + 2\ln 2)$  ; le coefficient directeur de la droite  $(MN)$  est  $\frac{y_M - y_N}{x_M - x_N} = \frac{-2\ln 2}{-1} = 2\ln 2$ .

c. La dérivée de  $f$  est :  $f'(x) = \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$  ; la tangente à  $(C_f)$  est parallèle à  $(MN)$  lorsque  $\ln x + 1 = 2\ln 2 \Leftrightarrow x = e^{2\ln 2 - 1} = \frac{1}{e} (e^{\ln 2})^2 = \frac{4}{e}$ .

d.  $y = 2\ln 2 \left( x - \frac{4}{e} \right) + \left( 1 + \frac{4}{e} \ln \left( \frac{4}{e} \right) \right) = (2\ln 2)x - 2\ln 2 \times \frac{4}{e} + 1 + \frac{4}{e} \ln 4 - \frac{4}{e} = (2\ln 2)x + 1 - \frac{4}{e} (\ln 4 = 2\ln 2)$ .

2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1; 2]$  par  $g(x) = f(x) - \left[ (2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1 \right]$ .

a.  $g'(x) = f'(x) - 2\ln 2 = 1 + \ln x - \ln 4 = 1 + \ln \left( \frac{x}{4} \right)$ .

b.  $g'(x) = 1 + \ln \left( \frac{x}{4} \right) \geq 0 \Leftrightarrow \ln \left( \frac{x}{4} \right) \geq -1 \Leftrightarrow \frac{x}{4} \geq e^{-1} \Leftrightarrow x \geq \frac{4}{e}$ .

Lorsque  $x = \frac{4}{e}$ ,  $g$  est nulle ; donc décroissante jusqu'à  $\frac{4}{e}$  puis croissante, le minimum est 0 ; conclusion  $g(x) \geq 0$  et  $(C_f)$  est au-dessus de  $(T)$ .

3. a. Il nous faut les ordonnées de  $M'$  et  $N'$  :  $y_{M'} = (2\ln 2) + 1 - \frac{4}{e}$ ,  $y_{N'} = (4\ln 2) + 1 - \frac{4}{e}$ .

Aire de  $MNQP$  :  $\frac{(PM + QN)}{2} \times PQ = \frac{(y_M + y_n)}{2} \times 1 = 1 + \ln 2 \approx 1,693$  ;

aire de  $M'N'QP$  :  $\frac{(PM' + QN')}{2} \times PQ = \frac{(y_{M'} + y_{N'})}{2} \times 1 = 3 \ln 2 + 1 - \frac{4}{e} \approx 1,608$  ;

b. L'aire  $\mathbf{A}$  est comprise entre ces deux valeurs :  $1,6$  à  $10^{-1}$  près.

### Partie B

1. On pose  $u' = x$ ,  $v = \ln x \Rightarrow u = \frac{1}{2}x^2$ ,  $v' = \frac{1}{x}$  d'où

$$\int_1^2 x \ln x dx = \left[ \frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x^2 \times \frac{1}{x} dx = 2 \ln 2 - \left[ \frac{1}{4} x^2 \right]_1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4} \approx 0,636 \quad .$$

2.  $\mathbf{A} = \int_1^2 f(x) dx = \int_1^2 1 dx + \int_1^2 x \ln x dx = 1 + 2 \ln 2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + 2 \ln 2 \approx 1,636$  .