Polynésie

1. Exercice 1

5 points

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

* si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
* si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ». L'événement contraire d'un événement E est noté $\overline{\mathrm{E}}$. La probabilité d'un événement est notée $p(\mathrm{E})$.

Partie A

1. Montrer que $p(\mathrm{G})=\dfrac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?

3. Un joueur fait quatre partie de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

* chaque joueur paye 1 euro par partie ;
* si le joueur gagne la partie il reçoit 5 euros ;
* si le joueur perd la partie il ne reçoit rien.

1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.

a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $\mathrm{E(X)} < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

2. Exercice 2

4 points

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $\overline{z}-3iz-3+6i=0$, $\overline{z}$ étant le conjugué de z.

2. On considère le point A d'affixe $4-2i$. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

3. Soit le point D d'affixe $2i$.

a. Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de $2i$ tels que :

$$\arg(z-2i)=\frac{\pi}{4}+k\times 2\pi\ (k\in\mathbb{Z}).$$

b. Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $z=2i+2e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

4. A tout point M d'affixe $z\neq -2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\dfrac{z-1}{\bar{z}+2}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z'|=1$.

3. Exercice 3 (non spécialistes)

5 points

L'espace est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A\left(\frac{2}{3}\,;-3\,;2\right)$ et $B\left(-\frac{4}{3}\,;0\,;-4\right)$. On note I le milieu du segment $[AB]$ et (S) la sphère de diamètre $[AB]$.

1. Soit E le barycentre des points pondérés $(A\,;2)$ et $(B\,;1)$.

a. Calculer les coordonnées de E.

b. Montrer que l'ensemble (P) des points M de l'espace tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right\|=3\left\|\overrightarrow{MO}\right\|$ est le plan médiateur du segment $[OE]$.

c. Montrer qu'une équation du plan (P) est $y=-1$.

2. a. Calculer le rayon de la sphère (S) et la distance du centre I de la sphère au plan (P). En déduire que l'intersection (C) du plan (P) et de la sphère (S) n'est pas vide.

b. Montrer qu'une équation de (C) dans le plan (P) est $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+(z+1)^2=12$. En déduire que (C) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

3. Soit D le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,;-\frac{1}{2}\,;4\sqrt{3}-1\right)$.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (ID).

b. En déduire que la droite (ID) est sécante au cercle (C) en un point noté F dont on donnera les coordonnées.

4. Exercice 3 (spécialistes)

5 points

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points $A(1\,;3\,;2)$, $B(4\,;6\,;-4)$ et le cône (Γ) d'axe $(O\,;\vec{k})$, de sommet O et contenant le point A.

1. Montrer qu'une équation de (Γ) est $x^2+y^2=\frac{5}{2}z^2$.

2. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.

a. Déterminer une équation de (P).

b. Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ).

3. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Q) et de (Γ). Sans justification reconnaître la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes :

* deux droites parallèles ;
* deux droites sécantes ;
* une parabole ;
* une hyperbole ;
* un cercle.

Partie B

Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées $(x ; y ; z)$. Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la **partie A**.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

2. a. Démontrer que si le point M de coordonnées $(x ; y ; z)$, où x, y et z sont des entiers relatifs, est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10.

b. Montrer que si M est un point de (C_2) alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10 .

c. Résoudre dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10 .

d. Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

5. Exercice 4

6 points

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 1 + x \ln x$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Toutes les aires considérées dans ce problème seront exprimées en unités d'aire.

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer un encadrement de l'aire ***A*** du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe (C_f) et les deux droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

On note M et N les points de (C_f) d'abscisses respectives 1 et 2, P et Q leurs projetés orthogonaux respectifs sur l'axe des abscisses. La figure est donnée plus bas.

1. a. Montrer que f est positive sur $[1 ; 2]$.

b. Montrer que le coefficient directeur de la droite (MN) est $2\ln 2$.

c. Soit E le point d'abscisse $\frac{4}{e}$. Montrer que sur l'intervalle $[1 ; 2]$, le point E est l'unique point de (C_f) en lequel la tangente à (C_f) est parallèle à (MN).

d. On appelle (T) la tangente à (C_f) au point E. montrer qu'une équationde (T) est : $y = (2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1 ; 2]$ par $g(x) = f(x) - \left[(2\ln 2)x - \frac{4}{e} + 1\right]$.

a. Montrer que $g'(x) = 1 + \ln\left(\frac{x}{4}\right)$ pour tout x de $[1 ; 2]$.

b. Etudier les variations de g sur $[1 ; 2]$ et en déduire la position relative de (C_f) et de (T) sur cet intervalle.

3. Soient *M'* et *N'* les points d'abscisses respectives 1 et 2 de la droite (T). On admet que la courbe (C_f) reste sous la droite (*MN*) sur l'intervalle $[1\,;2]$ et que les points *M'* et *N'* ont des ordonnées strictement positives.

a. Calculer les aires des trapèzes *MNQP* et *M'N'QP*.

b. En déduire, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de $\boldsymbol{A}$ d'amplitude 10^{-1}.

Partie B

Le but de cette partie est de déterminer la valeur exacte de $\boldsymbol{A}$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^2 x\ln x dx$.

2. En déduire la valeur exacte de $\boldsymbol{A}$.