Nouvelle Calédonie

1. Exercice 1

4 points

Pour tout cet exercice, l'espace est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. *Question de cours*

Établir l'équation cartésienne d'un plan dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ et un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

2. On considère les points $A(1\,;2\,;-3)$, $B(-3\,;1\,;4)$ et $C(2\,;6\,;-1)$.

a. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

b. Vérifier qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z + 3 = 0$.

c. Soit I le point de coordonnées $(-5\,;9\,;4)$. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite D passant par I et perpendiculaire au plan (ABC).

d. Déterminer les coordonnées du point J, intersection de la droite D et du plan (ABC).

e. En déduire la distance du point I au plan (ABC).

2. Exercice 2

4 points

Pour chaque question une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte les points attribués à la question, une réponse inexacte enlève la moitié des points attribués à la question, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif la note est ramenée à 0.

A. Un sac contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 1 boule rouge, indiscernables au toucher. On tire, au hasard, successivement, trois boules du sac, en remettant chaque boule tirée dans le sac avant le tirage suivant.

Question 1 : La probabilité de tirer trois boules noires est :

a. $\dfrac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}}$	b. $\dfrac{9}{8}$	c. $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$	d. $\dfrac{4\times3\times2}{8\times7\times6}$

Question 2 : Sachant que Jean a tiré 3 boules de la même couleur, la probabilité qu'il ait tiré 3 boules rouges est :

a. 0	b. $\left(\dfrac{1}{8}\right)^3$	c. $\dfrac{23}{128}$	d. $\dfrac{1}{92}$

B. Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = x + m$ où m est une constante réelle.

Question 3 : f est une densité de probabilité sur l'intervalle [0 ; 1] lorsque :

a. $m = -1$	b. $m = \dfrac{1}{2}$	c. $m = e^{\frac{1}{2}}$	d. $m = e^{-1}$

C. La durée de vie en années d'un composant électronique suit une loi exponentielle de paramètre 0,2.

Question 4 : La probabilité que ce composant électronique ait une durée de vie strictement supérieure à 5 ans est :

a. $1-\frac{1}{e}$	b. $\frac{1}{e}$	c. $\frac{1}{5e}$	d. $\frac{1}{0,2}(e-1)$

3. Exercice 3 (spécialistes)

5 points

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble $\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; \ldots ; 24 ; 25\}$ selon le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an + b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.

Exemple : pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :

étape 1 : on lui associe l'entier $n = 15$;

étape 2 : le reste de la division de $2\times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7 ;

étape 3 : on associe 7 à H.

Donc P est codé par la lettre H.

1. Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?

2. Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit $a = 13$.

3. Dans toute la suite de l'exercice, on prend $a = 5$ et $b = 2$.

a. On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers n et p. Montrer, que si $5n + 2$ et $5p + 2$ ont le même reste dans la division par 26 alors $n - p$ est un multiple de 26. En déduire que $n = p$.

b. Coder le mot AMI.

4. On se propose de décoder la lettre E.

a. Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément n de Ω tel que $5n - 26y = 2$, où y est un entier.

b. On considère l'équation $5x - 26y = 2$, avec x et y entiers relatifs.

i. Donner une solution particulière de l'équation $5x - 26y = 2$.

ii. Résoudre alors l'équation $5x - 26y = 2$.

iii. En déduire qu'il existe un unique couple $(x ; y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \le x \le 25$.

c. Décoder alors la lettre E.

4. Exercice 4

7 points

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=n}^{k=2n}\frac{1}{k} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n}$.

PARTIE A

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$.

2. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).

3. Établir alors que (u_n) est une suite convergente.

L'objectif de la partie B est de déterminer la valeur de la limite de la suite (u_n).

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

1. a. Justifier pour tout entier naturel n non nul l'encadrement : $\dfrac{1}{n+1} \le \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \le \frac{1}{n}$.

b. Vérifier que $\displaystyle\int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{n} - f(n)$.

c. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $0 \le f(n) \le \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2. On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$S_n = \sum_{k=n}^{k=2n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}.$$

a. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $0 \le f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) \le S_n$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout réel x distinct de -1 et de 0, on ait

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

c. En déduire l'égalité $S_n = \dfrac{n+1}{n(2n+1)}$.

d. En utilisant les questions précédentes, déterminer alors la limite quand n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=n}^{k=2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n).$$

e. Vérifier que pour tout entier $n > 1$, $f(n) + f(n+1) + \ldots + f(2n) = u_n - \ln\left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$.

f. Déterminer la limite de la suite (u_n).