

National & La Réunion

1. Exercice 1

5 points

Les parties 1 et 2 portent sur un même thème, la dérivation, mais sont indépendantes.

1. Restitution organisée de connaissances

La formule donnant la dérivée du produit de deux fonctions dérivables est supposée connue. On a énoncé ci-dessous deux propositions désignées par P et Q. Dire pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

Dans cet exercice n désigne un entier naturel strictement supérieur à 1.

P : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^n$; alors f est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée f' donnée sur \mathbb{R} par : $f'(x) = nx^{n-1}$.

Q : Soit u une fonction dérivable sur \mathbb{R} et soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f = u^n$; alors f est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée f' donnée par $f' = nu^{n-1}$.

2. On désigne par g la fonction définie sur $] -1 ; 1[$ par $g(0) = 0$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ où g' désigne la dérivée de la fonction g sur $] -1 ; 1[$; on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$.

On considère alors la fonction composée h définie sur $] -\pi ; 0[$ par $h(x) = g(\cos x)$.

a. Démontrer que pour tout x de $] -\pi ; 0[$ on a $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h .

b. Calculer $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ puis donner l'expression de $h(x)$.

2. Exercice 2

6 points

1. La suite u est définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{23}{27}$ pour tout entier naturel n .

a. On a représenté dans un repère orthonormé direct du plan ci-dessous, la droite d'équation $y = \frac{1}{3}x + \frac{23}{27}$ et le point A de coordonnées $(2 ; 0)$.

Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite u .

b. Démontrer que si la suite u est convergente alors sa limite est $l = \frac{23}{18}$.

c. Démontrer que pour tout entier naturel n on a : $u_n > \frac{23}{18}$.

d. Étudier la monotonie de la suite u et donner sa limite.

2. a. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Démontrer que : $\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{10^k} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right)$ c'est-à-dire que

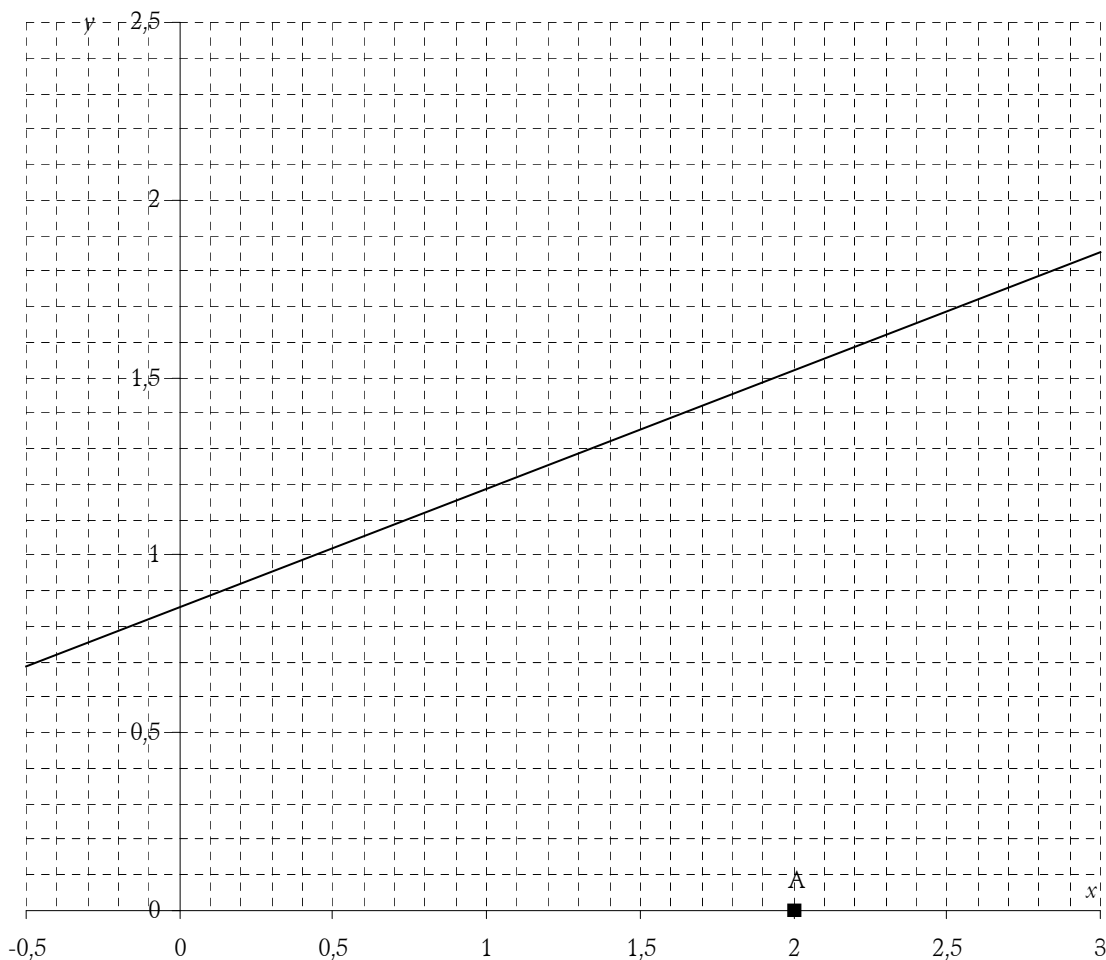
$$\frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \dots + \frac{1}{10^{n+1}} = \frac{1}{90} \left(1 - \frac{1}{10^n} \right).$$

b. La suite v est définie par $v_n = 1,277 \dots 7$ avec n décimales consécutives égales à 7.

Ainsi $v_0 = 1,2$, $v_1 = 1,27$ et $v_2 = 1,277$.

En utilisant le 2. a. démontrer que la limite de la suite v est un nombre rationnel r (c'est-à-dire le quotient de deux entiers).

3. La suite u définie au 1. et la suite v sont-elles adjacentes ? Justifier.



3. Exercice 3 (non spécialistes)

5 points

Soit les nombres complexes : $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$, $z_2 = 2 + 2i$ et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Écrire Z sous forme algébrique.

2. Donner les modules et arguments de z_1 , z_2 et Z .

3. En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

4. Le plan est muni d'un repère orthonormal ; on prendra 2 cm comme unité graphique.

On désigne par A , B et C les points d'affixes respectives z_1 , z_2 et Z . Placer le point B , puis placer les points A et C en utilisant la règle et le compas (on laissera les traits de construction apparents).

5. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe Z^{2007} .

4. Exercice 3 (spécialistes)

5 points

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

a. Pour tout élément a de A_7 écrire dans le tableau ci-dessous l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1[7]$ (soit modulo 7).

a	1	2	3	4	5	6
y						

b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5[7]$ équivaut à $x \equiv 4[7]$.

c. Si a est un élément de A_7 , montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0[7]$ sont les multiples de 7.

2. Dans toute cette question p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.

On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2; \dots; p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p . Soit a un élément de A_p .

a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p . Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation $ax \equiv 1[p]$.

c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0[p]$ si et seulement si x est un multiple de p ou y est un multiple de p .

d. Application : $p = 31$.

Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1[31]$ et $3x \equiv 1[31]$.

A l'aide des résultats précédents résoudre dans \mathbb{Z} l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$.

5. Exercice 4

4 points

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$(E) : y' + (1 + \tan x)y = \cos x,$$

$$(E_0) : y' + y = 1.$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) .

2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et telles que $f(x) = g(x)\cos x$.

Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0) .

3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.