

## Polynésie

---

### 1. Exercice 1 (3 points)

---

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par  $a$  et  $b$ . 2 % des montres fabriquées présentent le défaut  $a$  et 10 % le défaut  $b$ .

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les événements suivants :

- A : « la montre tirée présente le défaut  $a$  » ;
- B : « la montre tirée présente le défaut  $b$  » ;
- C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;
- D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les événements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'événement C est égale à 0,882.

2. Calculer la probabilité de l'événement D.

3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres. On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

Soit  $X$  la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts  $a$  et  $b$ . On définit l'événement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».

Calculer la probabilité de l'événement E. On en donnera une valeur approchée à  $10^{-3}$  près.

### 2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

---

Pour chacune des cinq questions, une seule des trois propositions est exacte.

**Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.**

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(3; 1; 3)$  et  $B(-6; 2; 1)$ .

Le plan  $P$  admet pour équation cartésienne  $x + 2y + 2z = 5$ .

1. L'ensemble des points  $M$  de l'espace tels que  $\|4\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\| = 2$  est :

- a. un plan de l'espace ;
- b. une sphère ;
- c. l'ensemble vide.

2. Les coordonnées du point  $H$ , projeté orthogonal du point  $A$  sur le plan  $P$  sont :

- a.  $\left(\frac{11}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$
- b.  $\left(\frac{8}{3}; \frac{1}{3}; \frac{7}{3}\right)$
- c.  $\left(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

3. La sphère de centre  $B$  et de rayon 1 :

- a. coupe le plan  $P$  suivant un cercle ;
- b. est tangente au plan  $P$  ;
- c. ne coupe pas le plan  $P$ .

4. On considère la droite  $D$  de l'espace passant par  $A$  et de vecteur directeur  $\vec{u}(1; 2; -1)$  et la droite  $D'$

d'équations paramétriques  $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$ . Les droites  $D$  et  $D'$  sont :

- a. coplanaires et parallèles ;      b. coplanaires et sécantes ;      c. non coplanaires.

5. L'ensemble des points  $M$  de l'espace équidistants des points  $A$  et  $B$  est :

a. la droite d'équations paramétriques  $\begin{cases} x = -\frac{3}{2} - t \\ y = \frac{3}{2} - 7t \\ z = 2 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R},$

b. le plan d'équation cartésienne  $9x - y + 2z + 11 = 0$ ,

c. le plan d'équation cartésienne  $x + 7y - z - 7 = 0$ .

### 3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

On considère la suite  $(u_n)$  d'entiers naturels définie par  $u_0 = 14, u_{n+1} = 5u_n - 6$  pour tout entier naturel  $n$ .

1. Calculer  $u_1, u_2, u_3$  et  $u_4$ .

Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de  $u_n$  ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+2} \equiv u_n \pmod{4}$ . En déduire que pour tout entier naturel  $k$ ,

$$u_{2k} \equiv 2 \pmod{4} \text{ et } u_{2k+1} \equiv 0 \pmod{4}.$$

3. a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2u_n = 5^{n+2} + 3$ .

b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$ .

4. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de  $u_n$  suivant les valeurs de  $n$ .

5. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite  $(u_n)$  est constant. Préciser sa valeur.

### 4. Exercice 3 (7 points)

La page annexe sera à compléter et à remettre avec la copie à la fin de l'épreuve.

#### Partie A

On considère la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x + \ln x$ .

On nomme  $\Gamma$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

1. a. Déterminer les limites de la fonction  $f$  aux bornes de son intervalle de définition.

b. Montrer que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ .

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , l'équation  $f(x) = n$  admet une unique solution dans  $]0; +\infty[$ .

On note  $\alpha_n$  cette solution. On a donc : pour tout entier naturel  $n$ ,  $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$ .

b. Sur la page annexe, on a tracé  $\Gamma$  dans le repère  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

Placer les nombres  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  et  $\alpha_5$  sur l'axe des abscisses en laissant apparents les traits de construction.

c. Préciser la valeur de  $\alpha_1$ .

d. Démontrer que la suite  $(\alpha_n)$  est strictement croissante.

3. a. Déterminer une équation de la tangente  $\Delta$  à la courbe  $\Gamma$  au point  $A$  d'abscisse 1.

b. Étudier les variations de la fonction  $h$  définie sur  $]0 ; +\infty[$  par  $h(x) = \ln x - x + 1$ .

En déduire la position de la courbe  $\Gamma$  par rapport à  $\Delta$ .

c. Tracer  $\Delta$  sur le graphique de la page annexe. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$ .

4. Déterminer la limite de la suite  $(\alpha_n)$ .

### Partie B

On considère une fonction  $g$  continue, strictement croissante sur  $]0 ; +\infty[$  et telle que  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ .

On admet que l'on peut, comme on l'a fait dans la **partie A**, définir sur  $\mathbb{N}$  une suite  $(\beta_n)$  de réels tels que  $g(\beta_n) = n$ , et que cette suite est strictement croissante.

1. Démonstration de cours :

Prérequis : définition d'une suite tendant vers  $+\infty$ .

« Une suite tend vers  $+\infty$  si, pour tout réel  $A$ , tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à  $A$  ».

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers  $+\infty$ .

2. Montrer que la suite  $(\beta_n)$  tend vers  $+\infty$ .

### 5. Exercice 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ . Unité graphique : 2 cm.

1. On rappelle que, pour tous nombres complexes  $a$  et  $b$ ,  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ . Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation  $z^3 = 8$ .

2. On désigne par  $A$ ,  $B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c$  définies par :  $a = 2$ ,  $b = -1 + i\sqrt{3}$  et  $c = -1 - i\sqrt{3}$ .

On appelle  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$  et  $r'$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

On pose  $B' = r'(B)$  et  $C' = r(C)$  et on note  $b'$  et  $c'$  les affixes respectives de  $B'$  et  $C'$ .

a. Placer les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans le repère  $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ .

Dans la suite de l'exercice, on complètera cette figure.

b. Montrer que  $b' = 2 + \sqrt{3} + 3i$ .

c. Montrer que  $b'$  et  $c'$  sont des nombres conjugués.

3. On appelle  $M$ ,  $N$ ,  $P$  et  $Q$  les milieux respectifs des segments  $[CB]$ ,  $[BB']$ ,  $[B'C']$  et  $[C'C]$ . On note  $m$ ,  $n$ ,  $p$  et  $q$  leurs affixes.

a. Montrer que l'affixe  $n$  du point  $N$  est égale à  $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i\sqrt{3})$ . En déduire que les points  $O$ ,  $N$  et  $C$  sont alignés.

b. Montrer que  $n + 1 = i(q + 1)$ . Que peut-on en déduire pour le triangle  $MNQ$  ?

c. Montrer que le quadrilatère  $MNPQ$  est un carré.

Page annexe

Cette page sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Exercice 3

