# Liban

## 1. Exercice 1 (4 points)

*Pour chacune des huit affirmations (entre guillemets) ci-dessous, préciser si elle est vraie ou fausse.*

***Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la mention « vrai » ou « faux ».***

*Une réponse correcte rapporte 0,5 point, une réponse incorrecte enlève 0,25 point, l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de points. Un éventuel total négatif sera ramené à zéro.*

1. « Si $a$ est un nombre réel quelconque et $f$ une fonction définie et strictement décroissante sur $[a\,;+\infty[$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ».

2. Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$, $g$ ne s'annulant pas :

« Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et si $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=-1$ ».

3. « Si $f$ est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $0\leq f(x)\leq\sqrt{x}$ sur $[0\,;+\infty[$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ ».

4. On considère un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

« Si $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ alors la droite d'équation $x=0$ est asymptote à la courbe représentative de $f$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ ».

5. « La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^2+3x+1)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'-y=(2x+3)e^x$ ».

6. Soient $A$, $B$, $C$ trois points du plan. On appelle $I$ le barycentre des points $A$ et $B$ affectés respectivement des coefficients 3 et $-2$.

« Si $G$ est le barycentre des points $A$, $B$ et $C$ affectés respectivement des coefficients 3, $-2$ et 1 alors $G$ est le milieu du segment $[CI]$ ».

7. Soient $A$, $B$, $C$ trois points du plan et $G$ le barycentre de $A$, $B$ et $C$ affectés respectivement des coefficients 3, $-2$ et 1.

« L'ensemble des points $M$ du plan tels que $\left\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=1$ est le cercle de centre $G$ et de rayon 1 ».

8. Soient $A$ et $B$ deux points distincts du plan. On désigne par $M$ un point quelconque du plan.

« Le produit scalaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est nul si et seulement si $M=A$ ou $M=B$ ».

## 2. Exercice 2 (3 points)

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.

Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.

On note $T_1$ l'évènement : « le premier test est positif ».

On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication. Déterminer les probabilités des évènements $T_1$ et C.

2. La fabrication d'un écran revient à 1000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois. Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.

Un écran est facturé $a$ euros ($a$ étant un réel positif) au client.

On introduit la variable aléatoire $X$ qui, à chaque écran fabriqué, associe le «gain » (éventuellement négatif ) réalisé par le fabricant.

a. Déterminer la loi de probabilité de $X$ en fonction de $a$.

b. Exprimer l'espérance de $X$ en fonction de $a$.

c. À partir de quelle valeur de $a$, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

### *3. Exercice 3 (8 points)*

**Partie A**

On considère la suite $(u_n)$ définie par : pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t \, dt$.

1. Montrer que la fonction $f : t \to (2-t)e^t$ est une primitive de $g : t \to (1-t)e^t$ sur [0 ; 1]. En déduire la valeur de $u_1$.

2. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour tout $n$ non nul, $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$ (R).

**Partie B**

On regarde d'abord ce qu'affichent deux calculatrices différentes pour les valeurs approchées des 25 premiers termes de la suite $(u_n)$ en utilisant pour le calcul la relation de récurrence (R) ci-dessus.

Voici les résultats affichés par ces deux calculatrices :

| Valeur de $n$ | Valeur de $u_n$ affichée par la première calculatrice | Valeur de $u_n$ affichée par la deuxième calculatrice |
|---|---|---|
| 1 | 7,1828182845 E-01 | 7,1828182846 E-01 |
| 2 | 4,3656365691 E-01 | 4,3656365692 E-01 |
| 3 | 3,0969097075 E-01 | 3,0969097076 E-01 |
| 4 | 2,3876388301 E-01 | 2,3876388304 E-01 |
| 5 | 1,9381941508 E-01 | 1,9381941520 E-01 |
| 6 | 1,6291649051 E-01 | 1,6291649120 E-01 |
| 7 | 1,40415433581 E-01 | 1,4041543840 E-01 |
| 8 | 1,2332346869 E-01 | 1,2332350720 E-01 |
| 9 | 1,0991121828 E-01 | 1,0991156480 E-01 |
| 10 | 9,9112182825 E-02 | 9,9115648000 E-02 |
| 11 | 9,0234011080 E-02 | 9,0272128000 E-02 |
| 12 | 8,2808132963 E-02 | 8,3265536000 E-02 |
| 13 | 7,6505728522 E-02 | 8,2451968000 E-02 |
| 14 | 7,1080199309 E-02 | 1,5432755200 E-01 |
| 15 | 6,6202989636 E-02 | 1,31491328006 E+00 |
| 16 | 5,9247834186 E-02 | 2,0038612480 E+01 |
| 17 | 7,2131811612 E-02 | 3,3965641216 E+02 |

| | | |
|---|---|---|
| 18 | −8,7016273909 E-02 | 6,1128154189 E+03 |
| 19 | −1,7533092042 E-02 | 1,1614249296 E+05 |
| 20 | −3,5166184085 E-02 | 2,3228488592 E+06 |
| 21 | −7,3858986580 E-02 | 4,8779825043 E+07 |
| 22 | −1,6249077047 E-02 | 1,0731561499 E+09 |
| 23 | −3,7372887209 E-02 | 2,4682591448 E+10 |
| 24 | −8,9694930302 E-02 | 5,923821947 E+11 |
| 25 | −2,242372585 E-02 | 1,4809554869 E+13 |

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite $(u_n)$ quand on examine les résultats obtenus avec la première calculatrice ? Et avec les résultats obtenus avec la deuxième calculatrice ?

**Partie C**

Dans cette partie on se propose d'étudier la suite $(u_n)$ à partir de la définition : pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n = \int_0^1 (1-t)^n e^t\,dt$.

1. Montrer que pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n \geq 0$.

2. a. Montrer que pour tout réel $t$ de l'intervalle [0 ; 1] et pour tout entier naturel non nul $n$,

$$(1-t)^n e^t \leq (1-t)^n e.$$

b. En déduire que pour tout $n$ non nul, $u_n \leq \dfrac{e}{n+1}$.

3. Déterminer la limite de la suite $(u_n)$.

**Partie D**

Dans cette partie, on se propose d'exploiter la relation de récurrence (R) vérifiée par la suite $(u_n)$ : $u_{n+1} = (n+1)u_n - 1$.

Étant donné un réel $a$, on considère la suite $(v_n)$ définie par : $v_1 = a$ et pour tout entier naturel non nul $n$, $v_{n+1} = (n+1)v_n - 1$.

1. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier naturel non nul $n$,

$$v_n = u_n + (n!)(a+2-e)$$

où $n!$ désigne le produit des $n$ premiers entiers naturels non nuls.

2. Étudier le comportement de la suite $(v_n)$ à l'infini suivant les valeurs de $a$. (On rappelle : $\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$)

3. En déduire une raison susceptible d'expliquer les résultats affichés par les deux calculatrices.

## *4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)*

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 0,5 cm. On note $j$ le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$. On considère les points $A$, $B$ et $C$ d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit $A'$ l'image de $B$ par la rotation de centre $C$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Soit $B'$ l'image de $C$ par la rotation de centre $A$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Soit $C'$ l'image de $A$ par la rotation de centre $B$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

1. Placer les points $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$ et $C'$ dans le repère donné.

2. On appelle $a'$, $b'$ et $c'$ les affixes respectives des points $A'$, $B'$ et $C'$.

a. Calculer $a'$. On vérifiera que $a'$ est un nombre réel.

b. Montrer que $b'=16e^{-i\frac{\pi}{3}}$. En déduire que $O$ est un point de la droite $(BB')$.

c. On admet que $c'=7+7i\sqrt{3}$. Montrer que les droites $(AA')$, $(BB')$ et $(CC')$ sont concourantes en $O$.

3. On se propose désormais de montrer que la distance $MA+MB+MC$ estminimale lorsque $M = O$.

a. Calculer la distance $OA + OB + OC$.

b. Montrer que $j^3=1$ et que $1+j+j^2=0$.

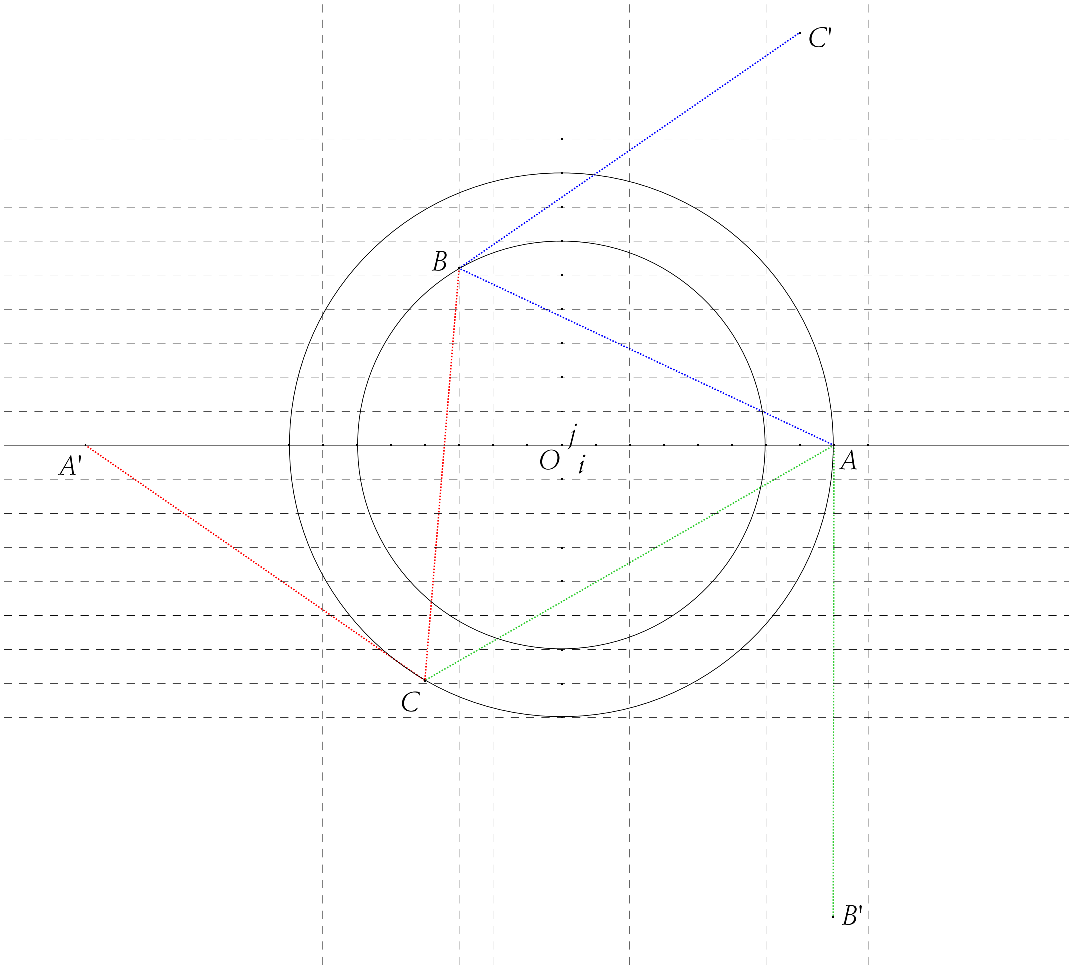
c. On considère un point $M$ quelconque d'affixe $z$ du plan complexe. On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj\right|=22.$$

d. On admet que, quels que soient les nombres complexes $z$, $|z+z'+z''|\le|z|+|z'|+|z''|$. Montrer que $MA+MB+MC$ est minimale lorsque $M = O$.

**Correction**




2. a. Notons au préalable que $b=6j=6e^{i\frac{2\pi}{3}}=6\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $c=8j^2=8e^{-i\frac{2\pi}{3}}=8\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

$$a'-c=e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)\Leftrightarrow a'=8e^{-i\frac{2\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{3}}\left(6e^{i\frac{2\pi}{3}}-8e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)=8e^{-i\frac{2\pi}{3}}+6e^{i\pi}-8e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

$$=8\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-6-8\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-4-4i\sqrt{3}-6-4+4i\sqrt{3}=-14.$$

b.

$$b'-a=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)\Leftrightarrow b'=8+e^{i\frac{\pi}{3}}\left(8e^{-i\frac{2\pi}{3}}-8\right)=8+8e^{-i\frac{\pi}{3}}-8e^{i\frac{\pi}{3}}=8+4-4i\sqrt{3}-4-4i\sqrt{3}=8-8i\sqrt{3}=16e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

On a alors $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OB'}\right)=\arg\frac{b'}{b}=\arg b'-\arg b=-\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}=-\pi$ donc $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OB'}$ sont colinéaires et *O* est sur (*BB'*).

c. *A* et *A'* sont sur (*Ox*) ; *B*, *O* et *B'* sont alignés, il suffit de montrer que *C*, *O* et *C'* sont alignés :

$c'=7+7i\sqrt{3}=14\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=14e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où $\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OC'}\right)=\arg\frac{c'}{c}=\arg c'-\arg c=\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{2\pi}{3}\right)=\pi$, ok.

3. a. $OA+OB+OC=|a|+|b|+|c|=8+6+8=22$.

b. $j^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=e^{i\frac{6\pi}{3}}=e^{i2\pi}=1$, $1+j+j^2=1-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=0$.

c. $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj-z-zj^2-zj\right|=\left|a+bj^2+cj-(1+j+j^2)z\right|=22$.

d. Utilisons $|z+z'+z''|\le|z|+|z'|+|z''|$ avec $(a-z)$, $(b-z)j^2$ et $(c-z)j$ :

$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|\le|a-z|+|b-z|\left|j^2\right|+|c-z||j|=|a-z|+|b-z|+|c-z|=AM+BM+CM$ ;

comme $\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right|=\left|a+bj^2+cj\right|=22$, cette valeur est le minimum de *MA*+*MB*+*MC* et il est obtenu lorsque $z=0$, soit lorsque *M* est en *O*.

## *5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)*

1. On considère l'équation (E) : $109x-226y=1$ où *x* et *y* sont des entiers relatifs.

a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme (141+226*k*, 68+109*k*), où *k* appartient à $\mathbb{Z}$.

En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul *d* inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul *e* tels que $109d=1+226e$. (On précisera les valeurs des entiers *d* et *e*.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note *A* l'ensemble des 227 entiers naturels *a* tels que $a\le 226$.

On considère les deux fonctions *f* et *g* de *A* dans *A* définies de la manière suivante :

à tout entier de *A*, *f* associe le reste de la division euclidienne de $a^{109}$ par 227 ;

à tout entier de *A*, *g* associe le reste de la division euclidienne de $a^{141}$ par 227.

a. Vérifier que $g[f(0)]=0$.

On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

**Si $p$ est un nombre premier et $a$ un entier non divisible par $p$ alors $a^{p-1}\equiv 1$ modulo $p$.**

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul $a$ de $A$, $a^{226} \equiv 1[\text{ modulo } 227\,]$.

c. En utilisant 1. b., en déduire que, quel que soit l'entier non nul $a$ de $A$, $g[f(a)] = a$.

Que peut-on dire de $f[(g\ (a)] = a$ ?