

National remplacement

1. Exercice 1 (7 points)

Partie A

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (20x + 10)e^{-\frac{1}{2}x}$.

On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 1 cm).

1. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Établir que l'équation $f(x) = 10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Donner une valeur décimale approchée à 10^{-3} près de α .
4. Tracer la courbe C .
5. Calculer l'intégrale $\int_0^3 f(x)dx$.

Partie B

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t , t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t = 0$, est $y(0) = 10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$ associe $y(t)$, est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + \frac{1}{2}y = 20e^{-\frac{1}{2}t}$.

1. Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.
 - a. On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant $g(0) = 10$. Démontrer que la fonction $g - f$ est solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E') : $y' + \frac{1}{2}y = 0$.
 - b. Résoudre l'équation différentielle (E').
 - c. Conclure.
3. Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescend-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.
4. La valeur θ en degrés Celsius de la température moyenne à cette réaction chimique durant les trois premières heures est la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 3]$.
Calculer la valeur exacte de θ , puis donner la valeur approchée décimale de θ arrondie au degré.

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point, chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :

A : $z^{14} = -128\sqrt{3} - 128i$.

C : $z^{14} = -64 + 64i\sqrt{3}$.

B : $z^{14} = 64 - 64i$.

D : $z^{14} = -128 + 128i\sqrt{3}$.

2. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe $4i$. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 3| = |3 - 4i|$.

A : (E) est la médiatrice du segment $[ST]$.

B : (E) est la droite (ST) ;

C : (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3 - 4i$, et de rayon 3 ;

D : (E) est le cercle de centre S et de rayon 5.

3. On considère un hexagone régulier $ABCDEF$, dont les côtés sont de longueur 1. Le produit scalaire $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CE}$ est égal à :

A : $\sqrt{3}$.

B : -3 .

C : $-\sqrt{3}$.

D : $-\frac{3}{2}$.

4. Une fonction g est définie sur l'intervalle $] -\infty ; 0]$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x - 3}$; soit Γ sa courbe représentative dans un repère du plan.

A : Γ admet une asymptote d'équation $y = -1$.

B : Γ n'admet pas d'asymptote.

C : Γ admet une asymptote d'équation $y = x$.

D : Γ admet une asymptote d'équation $y = 1$.

5. Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$. La fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f sur \mathbb{R} , est définie par :

A : $f''(x) = \int_0^x -2te^{-t^2} dt$.

C : $f''(x) = -2xe^{-x^2}$.

B : $f(x) = \int_0^x e^{-x^2} dx$.

D : $f''(x) = e^{-x^2}$.

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$.

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2(6)$ ou $x \equiv 5(6)$.

Correction

Testons la réponse D : si $x \equiv 2(6)$ alors $x^2 - x + 4 \equiv 4 - 2 + 4(6) \equiv 6(6) \equiv 0(6)$; si $x \equiv 5(6)$ alors $x^2 - x + 4 \equiv 25 - 5 + 4(6) \equiv 24(6) \equiv 0(6)$. Ok.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (34k - 7 ; 5 - 24k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (17k - 7 ; 5 - 12k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme : $(x ; y) = (-7k ; 5k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Correction

Simplifions par 2 : $12x + 17y = 1$ a toujours des solutions car 12 et 17 sont premiers entre eux ; la B est fausse. Si on cherche une solution particulière la C donne l'idée que -7 et 5 est pas mal : $12 \times -7 + 17 \times 5 = 1$. Après on termine de manière classique pour obtenir la solution C.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 17\,89^{2005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4(17)$ et $p \equiv 0(17)$.

C : $p \equiv 4(17)$.

B : p est un nombre premier.

D : $p \equiv 1(17)$.

Correction

On a $n = 1\,789 \equiv 4$ modulo 17 ; par ailleurs $4^2 \equiv 16 \equiv -1(17)$ donc $4^{2 \times 1002 + 1} \equiv (-1)^{1002} \times 4(17) \equiv 4(17)$. Réponse C.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b . Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse $[AB]$ si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

$$A : z = \frac{b - ia}{1 - i}.$$

$$C : a - z = i(b - z).$$

$$B : z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a).$$

$$D : b - z = \frac{\pi}{2}(a - z).$$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A , de rapport 2 et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I .

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$.

C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .

4. Exercice 3 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. On considère le plan P passant par le point $B(1 ; -2 ; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}(-2 ; 1 ; 5)$ et le plan R d'équation cartésienne $x + 2y - 7 = 0$.
 - a. Démontrer que les plans P et R sont perpendiculaires.
 - b. Démontrer que l'intersection des plans P et R est la droite Δ passant par le point $C(-1 ; 4 ; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(2 ; -1 ; 1)$.
 - c. Soit le point $A(5 ; -2 ; -1)$. Calculer la distance du point A au plan P, puis la distance du point A au plan R.
 - d. Déterminer la distance du point A à la droite Δ .
2. a. Soit, pour tout nombre réel t , le point M_t de coordonnées $(1 + 2t ; 3 - t ; t)$. Déterminer en fonction de t la longueur AM . On note $\varphi(t)$ cette longueur. On définit ainsi une fonction φ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .
 - b. Étudier le sens de variations de la fonction φ sur \mathbb{R} ; préciser son minimum.
 - c. Interpréter géométriquement la valeur de ce minimum.

5. Exercice 4 (3 points)

Partie A

On dispose d'un dé en forme de tétraèdre régulier, possédant une face bleue, deux faces rouges et une face verte ; on suppose le dé parfaitement équilibré.

Une partie consiste à effectuer deux lancers successifs et indépendants de ce dé. À chaque lancer on note la couleur de la face cachée.

On considère les événements suivants :

E est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont vertes »,

F est l'évènement « à l'issue d'une partie, les deux faces notées sont de la même couleur ».

1. Calculer les probabilités des événements E et F ainsi que la probabilité de E sachant F.
2. On effectue dix parties identiques et indépendantes. Calculer la probabilité d'obtenir au moins deux fois l'évènement F au cours de ces dix parties (on en donnera une valeur approchée décimale à 10^{-3} près).

Partie B

On souhaite savoir si le dé utilisé peut être considéré comme parfaitement équilibré. Pour cela on numérote de 1 à 4 les quatre faces de ce dé, puis on lance ce dé 160 fois en notant le nombre n_i de fois où chaque face est cachée ; on obtient les résultats suivants :

face i	1	2	3	4
effectif n_i	30	48	46	32

On note f_i la fréquence relative à la face n_i et d_{obs}^2 le réel $\sum_{i=1}^4 \left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$. On simule ensuite 1 000 fois l'expérience consistant à tirer un chiffre au hasard 160 fois parmi l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$ puis, pour chaque simulation, on calcule $d^2 = \sum_{i=1}^4 \left(F_i - \frac{1}{4}\right)^2$, où F_i est la fréquence d'apparition du nombre i . Le 9^{ème} décile de

la série statistique des 1 000 valeurs de d^2 est égal à 0,0098. Au vu de l'expérience réalisée et au risque de 10 %, peut-on considérer le dé comme parfaitement équilibré ?