Amérique du Nord Correction

1. Exercice 1 (4 points)

1. Il faut calculer les distances :

$AB = |z_B - z_A| = |-3-i+2-3i| = |-1-4i| = \sqrt{17}$,

$AC = |z_C - z_A| = |2,08+1,98i+2-3i| = |4,08-1,02i| = \sqrt{17,6868}$

et $BC = |z_C - z_B| = |2,08+1,98i+3+i| = |5,08+2,98i| = \sqrt{34,6868}$.

La réponse est donc (**b**) : rectangle et non isocèle (on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$).

2. M d'affixe z tels que $|z'|=1$ est donné par $z' = \dfrac{z-4i}{z+2} \Rightarrow |z'| = \left|\dfrac{z-4i}{z+2}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-4i| = |z+2|$.

Réponse (**b**) : c'est une droite (la médiatrice des points A d'affixe -2 et B d'affixe $4i$).

3. L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

$$\arg(z') = 0(\pi) \Leftrightarrow \arg\frac{z-4i}{z+2} = 0(\pi) \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BM}\right) = 0\,(\,\pi\,).$$

Il s'agit encore d'une droite mais ici il faut enlever le point A. Réponse (**c**) : une droite privée d'un point.

4. D d'affixe i. La rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :

$$z'-i = e^{-i\frac{\pi}{3}}(z-i) \Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z-i)+i = \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z - i\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + i = \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

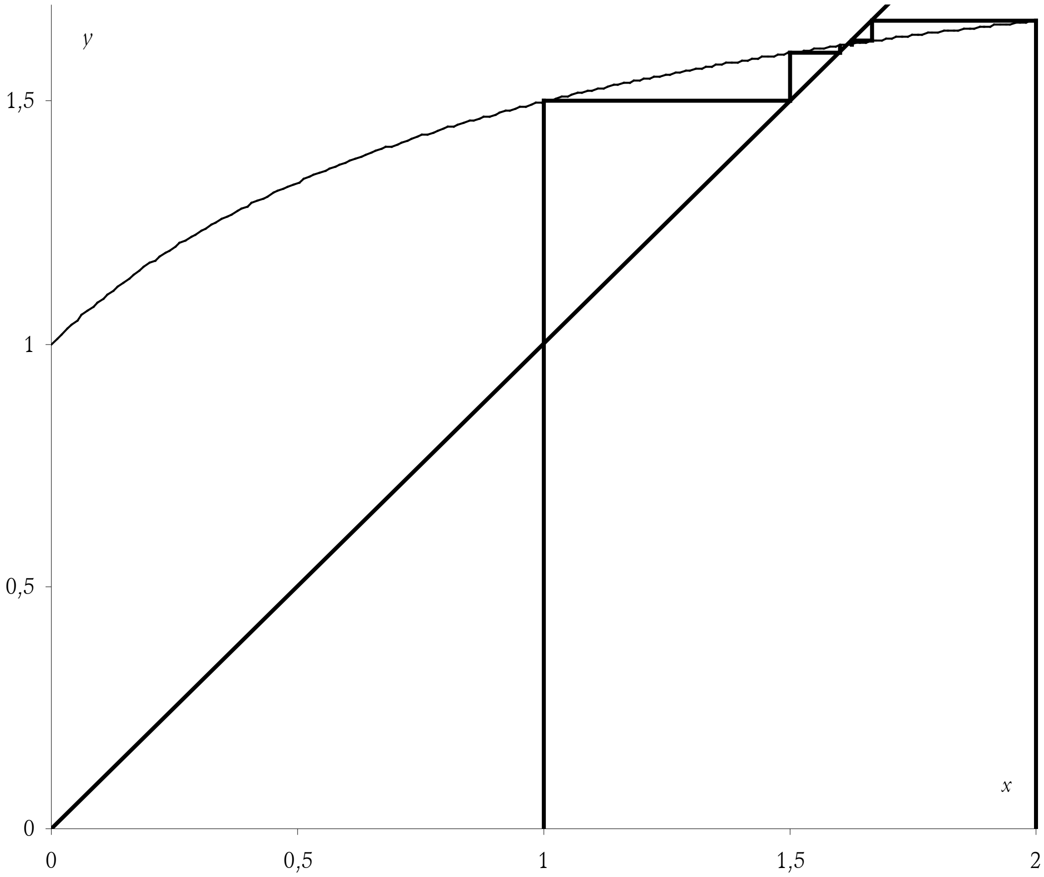
Réponse (**a**).

2. Exercice 2 (6 points)

Soit f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1. $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$ donc f est croissante ; $f(1) = \dfrac{3}{2} > 1$ et $f(2) = \dfrac{5}{3} < 2$ donc si $x \in [1\,;2]$, $f(x) \in [1\,;2]$.

2. a. Visiblement la suite u_n est croissante, et converge vers le point d'intersection entre la courbe de f et la droite ($y = x$), soit environ 1,6 ; de même v_n semble décroissante et converger vers le même point.



b. Pour $n = 0$, on a $v_0 = 2$ qui est bien dans l'intervalle [1 ; 2] ; par ailleurs si $1 \le v_n \le 2$ alors comme f est croissante, $f(1) \le f(v_n) \le f(2) \Rightarrow 1 \le v_{n+1} \le 2$; la propriété est toujours vraie.

De même on a $v_1 = f(2) = \frac{5}{3} \le v_0$; par ailleurs si $v_{n+1} \le v_n \Rightarrow f(v_{n+1}) \le f(v_n) \Rightarrow v_{n+2} \le v_{n+1}$, etc.

Remarquez que c'est $v_1 = f(2) = \frac{5}{3} \le v_0$ qui entraîne tous les autres termes derrière avec la complicité de la croissance de f. Pour u_n c'est pratiquement pareil, sauf que $u_1 = f(u_0) = \frac{3}{2} > u_0$ et donc, etc.

c. On n'échappe pas au calcul :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} - \frac{2u_n + 1}{u_n + 1} = \frac{2u_n v_n + 2v_n + u_n + 1 - 2u_n v_n - v_n - 2u_n - 1}{(v_n + 1)(u_n + 1)} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}.$$

$v_{n+1} - u_{n+1}$ est du signe de $v_n - u_n$; comme $v_0 - u_0 = 2 - 1 > 0$, par récurrence on a $v_n - u_n \ge 0$; on a $v_n > 1 \Rightarrow v_n + 1 > 2 \Rightarrow \frac{1}{v_n + 1} < \frac{1}{2}$ et pareil pour u_n donc $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{2}.\frac{1}{2}(v_n - u_n) = \frac{1}{4}(v_n - u_n)$.

d. Encore une récurrence : $v_0 - u_0 = 2 - 1 = 1 \le \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$; grâce à la relation précédente on a évidemment $v_{n+1} - u_{n+1} \le \frac{1}{4}(v_n - u_n) \le \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

e. Les suites u_n et v_n sont adjacentes car $0 \le v_n - u_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n \Rightarrow 0 \le \lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) \le 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(v_n - u_n) = 0$; elles convergent bien vers une même limite α telle que

$$\alpha = f(\alpha) = \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha = 2a + 1 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618 \\ \alpha_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \approx -0,618 \end{cases}.$$

La limite est donc la première racine, soit $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

3. Exercice 3 (5 points)

$f(x) = (x-1)\left(2 - e^{-x}\right)$.

1. a. En $+\infty$, $x-1$ tend vers $+\infty$ et $2-e^{-x}$ tend vers 2 car e^{-x} tend vers 0 ; *f* a pour limite $+\infty$.

b. $f(x) - (2x-2) = (x-1)\left(2-e^{-x}\right) - 2(x-1) = (x-1)(-e^{-x})$: avec les croissances comparées, e^{-x} emmène tout le monde vers 0, la droite Δ d'équation $y = 2x - 2$ est bien asymptote à C.

c. Signe de $f(x) - (2x-2) = -(x-1)e^{-x}$: lorsque $x \le 1$ c'est positif, donc C est au-dessus de Δ ; lorsque $x \ge 1$ c'est négatif, donc C est en dessous de Δ.

3. a. $f'(x) = (x-1)'\left(2-e^{-x}\right) + (x-1)\left(2-e^{-x}\right)' = 2 - e^{-x} + (x-1)e^{-x} = 2 - 2e^{-x} + xe^{-x}$ d'où

$f'(x) = xe^{-x} + 2(1-e^{-x})$.

b. Comme x est positif, $xe^{-x} > 0$ et $x > 0 \Rightarrow -x < 0 \Rightarrow e^{-x} < e^0 = 1 \Rightarrow e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow 1 - e^{-x} > 0$ donc *f'* est positive.

c. $f'(0) = 0 + 2(1-1) = 0$.

x	0		$+\infty$
f'	0	$+$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

2. Comme $x \ge 1$ il faut calculer $-\int_1^3 -(x-1)e^{-x}\,dx$: on pose $\begin{cases} u = x-1 \\ v' = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u' = 1 \\ v = -e^{-x} \end{cases}$ d'où

$$\int_1^3 (x-1)e^{-x}\,dx = \left[-(x-1)e^{-x}\right]_1^3 - \int_1^3 -e^{-x}\,dx = -2e^{-3} - \left[e^{-x}\right]_1^3 = -2e^{-3} - \left[e^{-3} - e^{-1}\right] = e^{-1} - 3e^{-3}.$$

Comme l'unité d'aire est de 2 cm x 2 cm, soit 4 cm², on a donc $\left(e^{-1} - 3e^{-3}\right)4 \approx 0,87 \text{ cm}^2$.

3. a. La tangente à C est parallèle à Δ lorsque $f'(x) = 2$: mêmes coefficients directeurs ; on a donc $f'(x) = xe^{-x} + 2 - 2e^{-x} = 2 \Leftrightarrow xe^{-x} - 2e^{-x} = 0 \Leftrightarrow (x-2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 2$. Le point A a pour coordonnées 2 et $f(2) = (2-1)\left(2-e^{-2}\right) = 2 - e^{-2}$.

b. La distance du point A à la droite $ax + by + c = 0$ est $\dfrac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$; ici Δ a pour équation cartésienne $2x - y - 2 = 0$ d'où notre distance est $\dfrac{\left|2.2 - (2-e^{-2}) - 2\right|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \dfrac{e^{-2}}{\sqrt{5}}$, soit en cm : $2\dfrac{e^{-2}}{\sqrt{5}}$.

4. Exercice 4 (5 points, non spécialistes)

1. a. $p_{D_1}(G)$: s'il tire un 1, il gagne s'il tire une voyelle, soit 4 chances sur 10, $p_{D_1}(G)=\frac{4}{10}$.

$p_{D_2}(G)$: s'il tire un 2, il gagne s'il tire 2 voyelles, soit $\binom{4}{2}=\frac{4.3}{2}=6$ chances sur $\binom{10}{2}=\frac{10.9}{2}=45$, $p_{D_2}(G)=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$;

$p_{D_3}(G)$: s'il tire un 3, il gagne s'il tire 3 voyelles, soit $\binom{4}{3}=\frac{4.3.2}{3.2}=4$ chances sur $\binom{10}{3}=\frac{10.9.8}{3.2}=120$, $p_{D_3}(G)=\frac{4}{120}=\frac{1}{30}$.

b. On applique les probabilités totales :

$$\begin{aligned}p(G)&=p(D_1\cap G)+p(D_2\cap G)+p(D_3\cap G)\\&=p_{D_1}(G).p(D_1)+p_{D_2}(G).p(D_2)+p_{D_3}(G).p(D_3)=\frac{4}{10}.\frac{1}{6}+\frac{2}{15}.\frac{2}{6}+\frac{1}{30}.\frac{3}{6}=\frac{23}{180}.\end{aligned}$$

2. Ce coup-ci on cherche $p_G(D_1)=\frac{p(G\cap D_1)}{p(G)}=\frac{p_{D_1}(G).p(D_1)}{p(G)}=\frac{\frac{4}{10}.\frac{1}{6}}{\frac{23}{180}}=\frac{180}{23}.\frac{4}{60}=\frac{12}{23}$.

3. Un joueur fait six parties : loi binomiale avec $n=6$ et $p=\frac{23}{180}$. On cherche

$$p(k=2)=\binom{6}{2}\left(\frac{23}{180}\right)^2\left(1-\frac{23}{180}\right)^4\approx 0,14.$$

On remplace 6 par n et k par 0 : $p(k\geq 1)=1-p(k=0)=1-\binom{n}{0}\left(\frac{23}{180}\right)^0\left(1-\frac{23}{180}\right)^n=1-\left(\frac{157}{180}\right)^n$; il faut donc résoudre $1-\left(\frac{157}{180}\right)^n\geq 0,9\Leftrightarrow\left(\frac{157}{180}\right)^n\leq 0,1\Leftrightarrow n\geq\frac{\ln(0,1)}{\ln(157/180)}\approx 16,8$ soit 17 parties minimum.

5. Exercice 4 (5 points, spécialistes)

$AB=2$, $AC=1+\sqrt{5}$ et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{2}$.

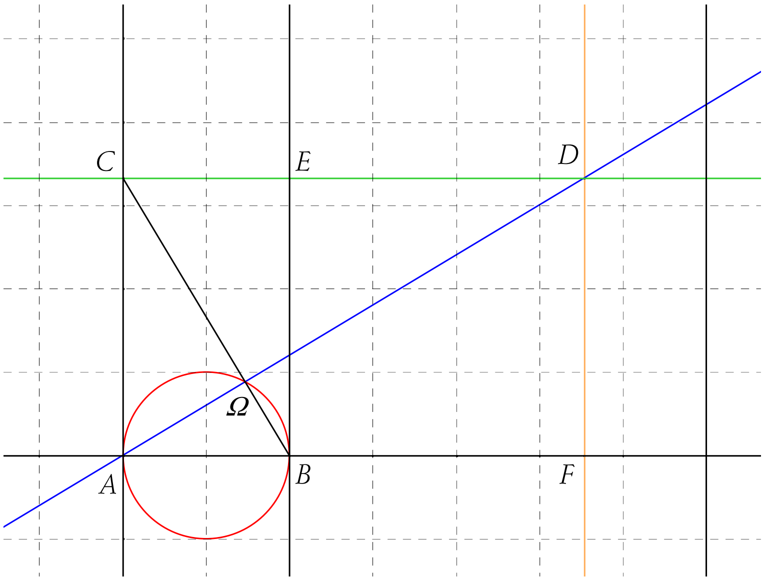
1. a. Prendre un repère de centre A, B a alors pour affixe 2 et C $(1+\sqrt{5})i$.

La similitude S qui envoie B en A et A en C s'écrit $z'=az+b\Rightarrow\begin{cases}0=a.2+b\\(1+\sqrt{5})i=a.0+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}i\\b=(1+\sqrt{5})i\end{cases}$.

b. Le rapport de S est $|a|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et son angle est $\arg(a)=-\frac{\pi}{2}$.

2. Comme on a $\begin{cases} B \to A \\ A \to C \\ \Omega \to \Omega \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}\right) = -\frac{\pi}{2} = \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}\right)$ donc Ω appartient au cercle de diamètre $[AB]$; par ailleurs en effectuant deux fois S, on a $\begin{cases} B \to A \to C \\ A \to C \\ \Omega \to \Omega \to \Omega \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$ d'où Ω appartient à la droite (BC).

3. a. Reprenons ce que l'on vient de faire : $\begin{cases} B \to A \to C \\ A \to C \to D \\ \Omega \to \Omega \to \Omega \end{cases} \Rightarrow \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}\right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$ donc A, Ω et D sont alignés ; de plus $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}\right) = -\pi$ donc les droites (CD) et (AB) sont parallèles.



b. On a $CD = |a|\,AC = |a|^2\,AB = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 .2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{2} = 3+\sqrt{5}$.

4. Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

a. La droite (BE) se transforme en une droite perpendiculaire à (BE) passant par l'image de B, soit A, c'est (AB). La droite (CE) se transforme en une droite perpendiculaire à (CE) passant par l'image de C, soit D, c'est (DF).

b. Le quadrilatère $BFDE$ semble être un carré…

On a $CD = 3+\sqrt{5}$ donc $DE = 3+\sqrt{5}-2 = 1+\sqrt{5} = CA = DF$; de plus on a des angles droits partout, c'est bon.

En fait le rectangle AFDC est un « rectangle d'or », soit tel que $\frac{CD}{CA} = \frac{CA}{CE}$, *c'est la « divine proportion ».*