

Baccalauréat**Pondichéry****1. Exercice 1 (4 points)**

On considère la fonction f , définie sur $[1; +\infty[$ par $f(t) = \frac{e^t}{t}$.

1. a. Justifier la continuité de f sur $[1; +\infty[$.

b. Montrer que f est croissante sur $[1; +\infty[$.

2. Restitution organisée de connaissances

On pourra raisonner en s'appuyant sur le graphique fourni.

Pour tout réel x_0 de $[1; +\infty[$, on note $A(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la courbe représentant f dans un repère orthogonal, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

a. Que vaut $A(1)$?

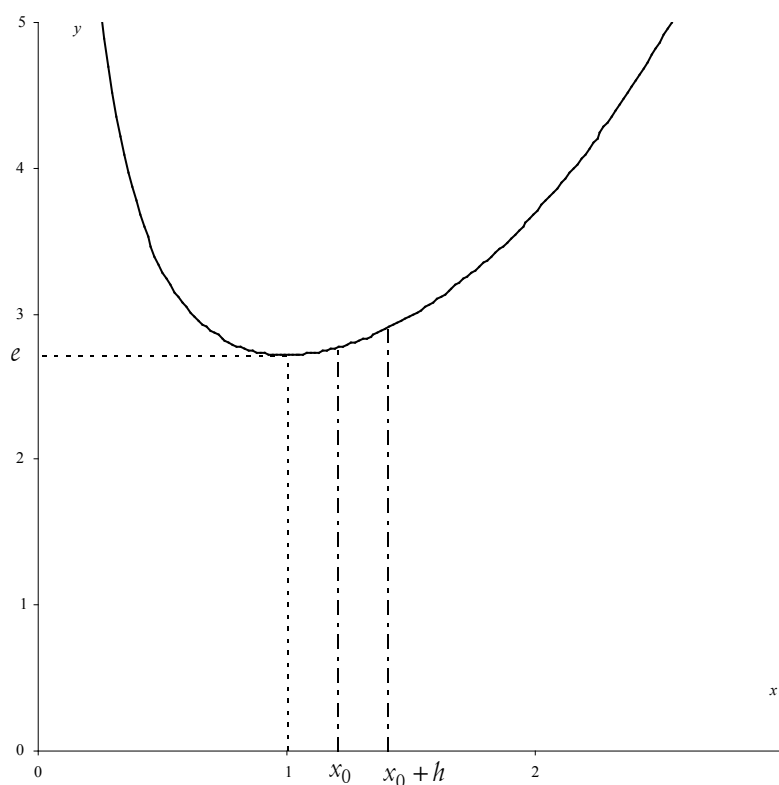
b. Soit x_0 un réel quelconque de $[1; +\infty[$ et h un réel strictement positif. Justifier l'encadrement suivant :

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0 + h) - A(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

c. Lorsque $x_0 \geq 1$, quel encadrement peut-on obtenir pour $h < 0$ et tel que $x_0 + h \geq 1$?

d. En déduire la dérivabilité en x_0 de la fonction A ainsi que le nombre dérivé en x_0 de la fonction A .

e. Conclure.



2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On désigne par I le point d'affixe $z_I = 1$, par A le point d'affixe $z_A = 1 - 2i$, par B le point d'affixe $-2 + 2i$ et par (C) le cercle de diamètre $[AB]$.

On fera une figure que l'on complètera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Déterminer le centre Ω du cercle (C) et calculer son rayon.

2. Soit D le point d'affixe $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$. Ecrire z_D sous forme algébrique puis démontrer que D est un point du cercle (C) .

3. Sur le cercle (C) , on considère le point E , d'affixe z_E , tel qu'une mesure en radians de $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega E})$ est $\frac{\pi}{4}$.

a. Préciser le module et un argument de $z_E + \frac{1}{2}$.

b. En déduire que $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$.

4. Soit r l'application du plan P dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' + \frac{1}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}} \left(z + \frac{1}{2} \right)$.

a. Déterminer la nature de r et ses éléments caractéristiques.

b. Soit K le point d'affixe $z_K = 2$. Déterminer par le calcul l'image de K par r . Comment peut-on retrouver géométriquement ce résultat.

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{3+4i}{5} \bar{z} + \frac{1-2i}{5}$.

1. On note x et x' , y et y' les parties réelles et imaginaires de z et z' . Démontrer que
$$\begin{cases} x' = \frac{3x+4y+1}{5} \\ y' = \frac{4x-3y-2}{5} \end{cases}$$

2. a. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .

b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

a. Donner une solution particulière $(x_0; y_0)$ appartenant à \mathbb{Z}^2 de l'équation $4x - 3y = 2$.

b. Déterminer l'ensemble des solutions appartenant à \mathbb{Z}^2 de l'équation $4x - 3y = 2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z' . Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

4. Exercice 3 (5 points)

L'espace E est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points A , B et C de coordonnées respectives $(1; 0; 2)$, $(1; 1; 4)$ et $(-1; 1; 1)$.

1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
- b. Soit \vec{n} le vecteur de coordonnées $(3; 4; -2)$. Vérifier que le vecteur \vec{n} est orthogonal aux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} . En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
2. Soient P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $2x + y + 2z + 1 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.
 - a. Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants suivant une droite D dont on déterminera un système d'équations paramétriques.
 - b. La droite D et la plan (ABC) sont-ils parallèles ?
3. Soit t un réel positif quelconque. On considère le barycentre G des points A, B et C affectés des coefficients 1, 2 et t .
 - a. Justifier l'existence du point G pour tout réel positif t .

Soit I le barycentre des points A et B affectés des coefficients respectifs 1 et 2. Déterminer les coordonnées du point I .

Exprimer le vecteur \overrightarrow{IG} en fonction du vecteur \overrightarrow{IC} .

- b. Montrer que l'ensemble des points G lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls est le segment $[IC]$ privé du point C . Pour quelle valeur de t , le milieu J du segment $[IC]$ coïncide-t-il avec G ?

5. Exercice 4 (6 points)

Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = \frac{n^{10}}{2^n}$. On définit ainsi une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Prouver, pour tout entier naturel n non nul, l'équivalence suivante :

$$u_{n+1} \leq 0,95u_n \text{ si et seulement si } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

- a. Etudier le sens de variation et la limite en $+\infty$ de la fonction f .
- b. Montrer qu'il existe dans l'intervalle $[1; +\infty[$ un unique nombre réel α tel que $f(\alpha) = 1,9$.
- c. Déterminer l'entier naturel n_0 tel que $n_0 - 1 \leq \alpha \leq n_0$.

- d. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, on a : $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{10} \leq 1,9$.

3. a. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) à partir du rang 16.

- b. Que peut-on en déduire pour la suite ?

4. En utilisant un raisonnement par récurrence, prouver, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 16, l'encadrement : $0 \leq u_n \leq 0,95^{n-16} u_{16}$. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.