**Polynésie** **Correction**

## 1. Exercice 1 (3 points)

1. Comme $A$ et $B$ sont indépendants on a $p(A\cap B)=p(A)p(B)=0,02\times 0,1$ ; on en déduit donc que $p(\text{C})=1-p(A\cup B)=1-\left[p(A)+p(B)-p(A\cap B)\right]=1-0,02-0,1+(0,02\times 0,1)=0,882$ .

2. Il y a 0,02 − 0,002 = 0,018 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut $a$ ; de même il y a 0,1 − 0,002 = 0,098 chances de tomber sur une montre n'ayant que le défaut $b$ ; on a donc $p(D)=0,018+0,098=0,116$ .

3. $X$ suit une loi binomiale $B(5\,;0,882)$ ;

$$p(E)=p(X\geq 4)=p(X=4)+p(X=5)=\binom{5}{4}0,882^4 0,118^1+\binom{5}{5}0,882^5 0,118^0\approx 0,891 .$$

## 2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

$A(3\,;1\,;3)$ et $B(-6\,;2\,;1)$. $P$ admet pour équation $x+2y+2z=5$.

1. $\left\|4\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}\right\|=2\Leftrightarrow\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=2\Leftrightarrow MG=\dfrac{2}{3}$ où $G$ est le barycentre de $\{(A, 4)\,;(B, -1)\}$. Il s'agit d'une sphère de centre G de rayon 2/3. Réponse **b**.

2. Il faut que $\overrightarrow{AH}$ soit colinéaire au vecteur normal de $P$, soit $\vec{n}(1\,;2\,;2)$, on a donc en posant $x$, $y$ et $z$ les coordonnées de $H$ : $\overrightarrow{AH}=k\vec{n}\Leftrightarrow\begin{cases}x-3=k\\y-1=2k\\z-3=2k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3+k\\y=1+2k\\z=3+2k\end{cases}$.

De plus $H$ doit être sur $P$, on a alors $3+k+2(1+2k)+2(3+2k)=5\Leftrightarrow 9k+11=5\Leftrightarrow k=-6/9=-2/3$ d'où en remplaçant, $\begin{cases}x=3-2/3=7/3\\y=1-4/3=-1/3\\z=3-4/3=5/3\end{cases}$. Réponse **c**.

3. Il nous faut d'abord calculer la distance de $B$ à $P$ : $d(B, P)=\dfrac{|-6+2.2+2.1-5|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=\dfrac{5}{3}$ ; cette distance est supérieure à 1 donc la sphère de centre $B$ de rayon 1 ne coupe pas $P$. Réponse **c**.

4. Ecrivons les équations paramétriques de $D$ : $\begin{cases}x=3+t'\\y=1+2t',\ t'\in\mathbb{R}\\z=3-t'\end{cases}$ ; le vecteur directeur de $D'$ est $\vec{v}\left(2\,;1\,;1\right)$ qui n'est pas colinéaire à $\vec{u}$, elles ne sont pas parallèles.

On fait l'intersection : $\begin{cases}x=3+t'=3+2t\\y=1+2t'=3+t\\z=3-t'=t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3+t'=3+6-2t'\Rightarrow 3t'=6\\1+2t'=3+3-t'\Rightarrow 3t'=5\\3-t'=t\end{cases}$.

C'est impossible donc encore réponse **c**.

5. L'ensemble des points $M$ de l'espace équidistants des points $A$ et $B$ est le plan médiateur de [$AB$]. Le milieu de [AB] a pour coordonnées $\left(-3/2\,;3/2\,;2\right)$ ; ces coordonnées marchent dans les deux équations

de plan, il faut donc regarder le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui doit être colinéaire au vecteur normal d'un des plans : $\overrightarrow{AB}=(-9\,;1\,;-2)$ qui est colinéaire à $(9\,;-1\,;2)$. Réponse **b**.

### *3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)*

$u_0=14$, $u_{n+1}=5u_n-6$.

1. $u_1=5.14-6=64$, $u_2=314$, $u_3=1564$ et $u_4=7814$.

Un coup c'est 64 à la fin lorsque $n$ est impair, un coup c'est 14 à la fin lorsque $n$ est pair.

Notez que pour connaître les deux derniers chiffres d'un nombre il faut pouvoir l'écrire $100A+B$ où $A$ est un entier quelconque et $B$ un entier entre 0 et 99.

2. $u_{n+2}=5u_{n+1}-6=5(5u_n-6)-6=25u_n-36$ ; or $25\equiv 1(4)$ et $36\equiv 0(4)$ donc $u_{n+2}\equiv 1.u_n(4)\equiv u_n(4)$.

Comme on a $u_0=14=2+12\equiv 2(4)$, par récurrence en utilisant le résultat précédent, on aura $u_2\equiv u_0(4)\equiv 2(4)$, etc. soit $u_{2k}\equiv 2(4)$.

De même $u_1=64\equiv 0(4)\Rightarrow u_3\equiv(0)4\Rightarrow\ldots\Rightarrow u_{2k+1}\equiv 0(4)$.

3. a. Pour $n=0$ : $2u_0=28=5^2+3$, ok.

On suppose que $2u_n=5^{n+2}+3$, alors $u_{n+1}=5\dfrac{5^{n+2}+3}{2}-6\Leftrightarrow 2u_{n+1}=5.5^{n+2}+15-12=5^{n+3}+3$ ; ok.

b. $2u_n\equiv 28(100)\Leftrightarrow\exists k\in\mathbb{Z}, 2u_n=28+100k$ ; soit $5^{n+2}+3=28+100k\Leftrightarrow 25.5^n-25=100k\Leftrightarrow 5^n-1=k$.

Comme on peut toujours trouver un entier de la forme $5^n-1$, c'est vrai.

4. On a pour $n$ pair : $2u_n=28+\left(5^n-1\right)100\Leftrightarrow u_n=14+\left(\dfrac{5^n-1}{2}\right)100$.

$5^n-1$ est pair, donc divisible par 2, $\dfrac{5^n-1}{2}$ est donc un entier $K$ et $u_{2p}=14+100K$, ses deux derniers chiffres sont 14.

Si $n$ est impair, soit $n=2p+1$, $u_n=u_{2p+1}=5u_{2p}-6=5(14+100K)-6=64+500K=64+100K'$ d'où ses deux derniers chiffres sont 64.

5. Quel est le PGCD de 14 et 64 ? C'est 2. Il faut donc montrer que le PGCD de $u_n$ et $u_{n+1}$ est 2, soit que $\dfrac{u_n}{2}=50K+7$ et $\dfrac{u_{n+1}}{2}=250K+32$ sont premiers entre eux, soit qu'il existe $a$ et $b$ dans $\mathbb{Z}$ tels que $a\dfrac{u_n}{2}+b\dfrac{u_{u+1}}{2}=1\Leftrightarrow a(50K+7)+b(250K+32)=1\Leftrightarrow 50K(a+5b)+7a+32b=1$.

Lorsqu'on essaie ainsi ça ne marche pas : les valeurs trouvées pour $a$ et $b$ ne sont pas entières… Par contre on peut remarquer que dans $u_{n+1}=5u_n-6$ le PGCD de $u_{n+1}$ et $u_n$ doit également diviser 6 ; c'est donc 1, 2, 3 ou 6. Mais 3 ne divise pas $u_n=5^{n+2}+3$ puisque 3 ne divise pas 5 donc ce n'est ni 3 ni 6, il reste 2 puisque $u_n$ est pair (se termine par 14 ou 64).

### *4. Exercice 3 (7 points)*

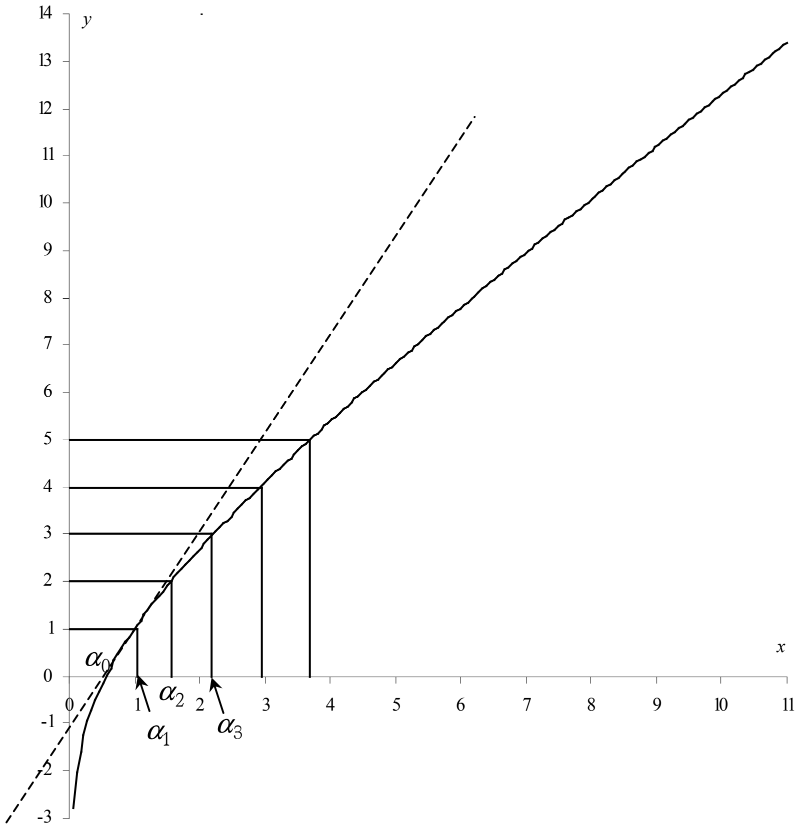
**Partie A** $f(x)=x+\ln x$.

1. a. En $+\infty$ les deux termes tendent vers $+\infty$ donc $f$ tend vers $+\infty$ ; en $0^+$ $\ln x$ tend vers $-\infty$ donc $f$ également.

b. $x$ est croissante, ln est croissante, la somme de deux fonctions croissantes est croissante. Sinon on a facilement $f'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$.

2. a. $f$ est continue, monotone croissante de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ ; elle est donc bijective et toutes les valeurs $n$ entières sont atteintes. A chaque $n$ correspond donc un unique antécédent $\alpha_n$ avec $\alpha_n + \ln \alpha_n = n$.

b. On part des valeurs entières 1, 2, 3, 4 et 5 sur l'axe des ordonnées et on trace.




c. $\alpha_1$ : $\alpha_1 + \ln \alpha_1 = 1$ ; cette équation a l'unique solution 1 : $1 + \ln 1 = 1$.

d. Comme $f$ est croissante et que $n+1 > n$ , alors les antécédents $\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}$ sont rangés dans le même ordre : $\alpha_n \le \alpha_{n+1} \Leftrightarrow f(\alpha_n) \le f(\alpha_{n+1}) \Leftrightarrow n \le n+1$.

3. a. $f'(1) = 1 + \frac{1}{1} = 2$ et $f(1) = 1$ d'où l'équation de $\Delta$ : $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$.

b. $h(x) = \ln x - x + 1$, $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ est positif lorsque $x < 1$, négatif lorsque $x > 1$. On a $h(1) = 0$ donc $h$ est croissante avant 1, décroissante après 1 d'où $h(x) \le h(1) = 0$. La position de $\Gamma$ par rapport à $\Delta$ est donnée par le signe de $f(x) - (2x-1) = x + \ln x - 2x + 1 = \ln x - x + 1 = h(x)$, donc $\Gamma$ est toujours en dessous de $\Delta$.

c. Comme $h(x) \le 0$ pour $x > 1$, ceci est valable pour $\alpha_n$ : $f(\alpha_n) - 2\alpha_n + 1 \le 0 \Leftrightarrow n - 2\alpha_n + 1 \le 0 \Leftrightarrow \alpha_n \ge \frac{n+1}{2}$.

4. Comme $n$ tend vers $+\infty$ , $\frac{n+1}{2}$ également et $\alpha_n$ également.

**Partie B**

$g$ continue, strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et telle que $\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

1. Démonstration de cours : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

*Démonstration par l'absurde* : si $(u_n)$ est croissante non majorée et qu'elle tend vers une limite $L$, alors il arriverait un moment (une valeur $N$ de $n$) où $u_N < L-\varepsilon$ où $\varepsilon$ est un réel positif choisi arbitrairement (aussi petit qu'on le veut) ; si le terme suivant est supérieur à $L-\varepsilon$, la suite ne converge pas vers $L$ et si le terme suivant reste inférieur à $L$, la suite est majorée. Dans les deux cas il y a contradiction.

*Démonstration directe* : si $(u_n)$ est non majorée, pour tout $A$ réel il existe une valeur $N$ de $n$ pour laquelle $u_N \geq A$ ; comme $(u_n)$ est croissante, pour toutes les valeurs de $n$ supérieures à $N$, on a $u_n \geq A$. La définition précédente est respectée, $(u_n)$ tend bien vers $+\infty$.

2. La suite $(\beta_n)$ est croissante pour les mêmes raisons que $(\alpha_n)$ ; comme $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ et que $g(\beta_n)=n$, les termes $\beta_n$ sont comme $x$ et tendent donc vers l'infini.

De manière plus élégante on peut considérer que $g$ est bijective et a une application réciproque $g^{-1}$ qui est telle que $\lim\limits_{y\to+\infty} g^{-1}(y)=+\infty$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}(n)=\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n=+\infty$.

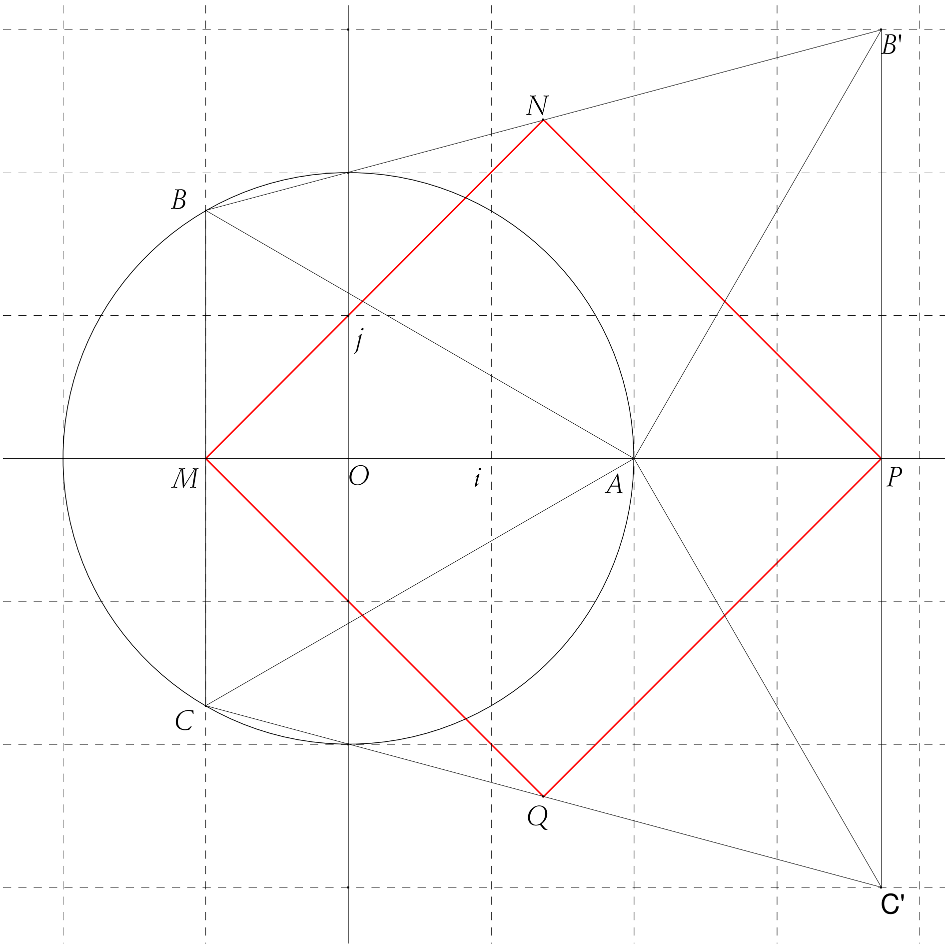
## *5. Exercice 4 (5 points)*

1. Avec $a=z$ et $b=2$ on a : $z^3-2^3=(z-2)(z^2+2z+4)$ ; $\Delta=4-16=-12=\left(2i\sqrt{3}\right)^2$ d'où les solutions $z_0=2$, $z_1=\dfrac{-2-2i\sqrt{3}}{2}=-1-i\sqrt{3}$, $z_2=\dfrac{-2+2i\sqrt{3}}{2}=-1+i\sqrt{3}$.

2. a. $a=2$, $b=-1+i\sqrt{3}$ et $c=-1-i\sqrt{3}$.

b. $b'-a=e^{-i\frac{\pi}{2}}(b-a)\Leftrightarrow b'=2-i\left(-1+i\sqrt{3}-2\right)=2+\sqrt{3}+3i$.

c. $c'-a=e^{i\frac{\pi}{2}}(c-a)\Leftrightarrow c'=2+i\left(-1-i\sqrt{3}-2\right)=2+\sqrt{3}-3i$. Qui est bien le conjugué de $b'$.




3. a. $n=\frac{b+b'}{2}=\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}+2+\sqrt{3}+3i\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}+3)\right)$ et

$\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i3\right)$. C'est pareil. $n=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{2}c \Leftrightarrow \overrightarrow{ON}=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OC}$, les vecteurs sont colinéaires, les points sont alignés.

b. $M$ a pour affixe $\frac{b+c}{2}=-1$, $q$ est le milieu de [$CC'$] et a pour affixe le conjugué de $n$ (puisque $c$ et $c'$ sont les conjugués respectifs de $b$ et $b'$), soit $q=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

On a alors $n+1=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)+1=\frac{3+\sqrt{3}}{2}+i\frac{\sqrt{3}+3}{2}$ et $i(q+1)=i\frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)+i=\frac{\sqrt{3}+3}{2}+i\frac{3+\sqrt{3}}{2}$ d'où $n+1=i(q+1)$. Le triangle $MNQ$ est un triangle rectangle isocèle car le vecteur $\overrightarrow{MQ}$ a pour image le vecteur $\overrightarrow{MN}$ par la rotation $r$.

c. Comme $Q$ est le symétrique de $N$ par rapport à ($Ox$) et que $M$ et $P$ sont sur ($Ox$), les triangles $MNP$ et $MQP$ sont isométriques donc $MNPQ$ est un carré.