

Amérique du Sud

1. Exercice 1 (4 points)

Les parties A et B sont indépendantes

Alain fabrique, en amateur, des appareils électroniques. Il achète pour cela, dans un magasin, des composants en apparence tous identiques mais dont certains présentent un défaut.

On estime que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02.

Partie A

On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de 50 composants soit assimilé à 50 tirages indépendants avec remise, et on appelle X le nombre de composants défectueux achetés.

Alain achète 50 composants.

1. Quelle est la probabilité qu'exactly deux des composants achetés soient défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-1} près.
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des composants achetés soit défectueux ? Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.
3. Quel est, par lot de 50 composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B

On suppose que la durée de vie T_1 (en heures) de chaque composant défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heures) de chaque composant non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$ (on pourra se reporter au formulaire ci-dessous).

1. Calculer la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :
 - a. si ce composant est défectueux ;
 - b. si ce composant n'est pas défectueux.

Donner une valeur approchée de ces probabilités 10^{-2} près.

2. Soit T la durée de vie (en heures) d'un composant acheté au hasard.

Démontrer que la probabilité que ce composant soit encore en état de marche après t heures de fonctionnement est :

$$P(T \geq t) = 0,02e^{-5 \times 10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}.$$

(on rappelle que la probabilité qu'un composant vendu dans le magasin soit défectueux est égale à 0,02).

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

Donner une valeur approchée de cette probabilité à 10^{-2} près.

Formulaire :

Loi exponentielle (ou de durée de vie sans vieillissement) de paramètre λ sur $[0 ; +\infty[$:

$$\text{Pour } 0 \leq a \leq b, P([a ; b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx ; \text{ pour } c \geq 0, P([c ; +\infty[) = 1 - \int_0^c \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

2. Exercice 2 (5 points, non spécialistes)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique 2 cm.

Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \frac{4}{\bar{z}}$, où \bar{z} désigne le nombre complexe conjugué de z .

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f .
2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.
3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f , dont on précisera l'affixe.
4. a. Donner une mesure de l'angle $(\overline{OM}, \overline{OM'})$. Interpréter géométriquement ce résultat.
b. Exprimer $|z'|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r .
c. Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que $OP = 3$, et construire géométriquement son image P' par f .
5. On considère le cercle C_1 , de centre J et de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de C_1 , distinct de O , appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

3. Exercice 2 (5 points, spécialistes)

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = i, b = 1 + 2i, c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ et } d = 3 + 2i.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D . Soit M un point d'affixe z et M' , d'affixe z' , son image par s .

1. Exprimer z' en fonction de z . Déterminer les éléments caractéristiques de s .

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n , U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.
3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s , les termes de la suite (U_n) .
4. Montrer que pour tout entier naturel n , $U_n = 2^n - 1$.
5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geq p$, $U_n = U_p(U_{n-p} + 1) + U_{n-p}$.

La notation $\text{pgcd}(a; b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b . Montrer pour $n \geq p$ l'égalité

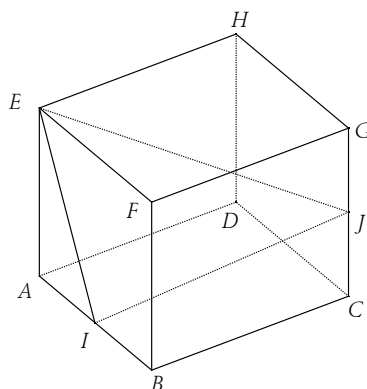
$$\text{pgcd}(U_n, U_p) = \text{pgcd}(U_p, U_{n-p}).$$

6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que : $\text{pgcd}(U_n, U_p) = U_{\text{pgcd}(n, p)}$. Déterminer le nombre : $\text{pgcd}(U_{2005}, U_{15})$.

4. Exercice 3 (4 points)

Dans cet exercice, une réponse par « VRAI » ou « FAUX », sans justification, est demandée au candidat en regard d'une liste d'affirmations. Toute réponse conforme à la réalité mathématique donne 0,4 point. Toute réponse erronée enlève 0,1 point. L'absence de réponse n'est pas comptabilisée. Le total ne saurait être négatif.

On donne le cube $ABCDEFGH$, d'arête de longueur 1, et les milieux I et J des arêtes $[AB]$ et $[CG]$. Les éléments utiles de la figure sont donnés ci-contre. Le candidat est appelé à juger chacune des dix affirmations suivantes. **On utilisera pour répondre la feuille annexe, qui sera rendue avec la copie.**



n°	Affirmation	Vrai ou Faux
1	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}$	
2	$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AB}$	
3	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$	
4	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} = AB \times AC \times \cos \frac{\pi}{3}$	

On utilise à présent le repère orthonormal $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

n°	Affirmation	Vrai ou Faux
5	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$, le paramètre t décrivant \mathbb{R} .	
6	Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est : $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \end{cases}$, le paramètre t décrivant \mathbb{R} .	
7	$6x - 7y + 8z - 3 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (IJ) .	
8	L'intersection des plans (FIJ) et (ABC) est la droite passant par I et par le milieu de l'arête $[DC]$.	
9	Le vecteur de coordonnées $(-4 ; 1 ; 2)$ est un vecteur normal au plan (FIJ) .	
10	Le volume du tétraèdre $EFIJ$ est égal à $\frac{1}{6}$.	

5. Exercice 4 (5 points)

Partie A

On considère les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = x^2 e^{-x^2}$.

On note respectivement C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, dont les tracés se trouvent sur la feuille annexe. La figure sera complétée et rendue avec la copie.

1. Identifier C_f et C_g sur la figure fournie (justifier la réponse apportée).
2. Étudier la parité des fonctions f et g .
3. Étudier le sens de variation de f et de g . Étudier les limites éventuelles de f et de g en $+\infty$.
4. Étudier la position relative de C_f et C_g .

Partie B

On considère la fonction G définie sur \mathbb{R} par $G(x) = \int_0^x t^2 e^{-t^2} dt$.

1. Que représente G pour la fonction g ?
2. Donner, pour $x > 0$, une interprétation de $G(x)$ en termes d'aires.
3. Étudier le sens de variations de G sur \mathbb{R} .

On définit la fonction F sur \mathbb{R} par : pour tout réel x , $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$.

4. Démontrer, que, pour tout réel x , $G(x) = \frac{1}{2} \left[F(x) - x e^{-x^2} \right]$; (on pourra commencer par comparer les fonctions dérivées de G et de $x \rightarrow \frac{1}{2} \left[F(x) - x e^{-x^2} \right]$).

On admet que la fonction F admet une limite finie l en $+\infty$, et que cette limite l est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine A limité par la courbe C_f et les demi-droites $[O; \vec{i})$ et $[O; \vec{j})$.

5. a. Démontrer que la fonction G admet une limite en $+\infty$ que l'on précisera.

- b. Interpréter en termes d'aires le réel $N = \int_0^1 (1-t^2) e^{-t^2} dt$.

- c. En admettant que la limite de G en $+\infty$ représente l'aire P en unités d'aire du domaine D limité par la demi-droite $[O; \vec{i})$ et la courbe C_g justifier graphiquement que :

$$N = \int_0^1 (1-t^2) e^{-t^2} dt \geq \frac{l}{2}$$

(on pourra illustrer le raisonnement sur la figure fournie).

Document à rendre avec la copie - Annexe

Exercice 3

Affirmation n°	Vrai ou faux
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Exercice 4

