# Nouvelle Calédonie

## *1. Exercice 1 (5 points, spécialistes)*

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 4 cm

Partie I

1. Placer les points $I$, $J$, $H$, $A$, $B$, $C$, $D$ d'affixes respectives : $z_I = 1$ , $z_J = i$ , $z_H = 1+i$, $z_A = 2$ , $z_B = \dfrac{3}{2}+i$ , $z_C = 2i$ et $z_D = -1$

2. Soit $E$ le symétrique de $B$ par rapport à $H$. La perpendiculaire à la droite ($AE$) passant par $C$ et la parallèle à la droite ($OC$) passant par $D$ se coupent en $F$.

Placer $E$ et $F$ et vérifier que le point $F$ a pour affixe $z_F = -1+\dfrac{1}{2}i$.

3. Montrer que les triangles $OAB$ et $OCF$ sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation $f$ du plan, d'écriture complexe : $z' = -i\bar{z}+2i$.

1. Déterminer les images des points $O$, $A$, $B$ par $f$.

2. a. Montrer que $f$ est une similitude. Est-ce une isométrie ?

b. Déterminer l'ensemble des points invariants par $f$.

c. La transformation $f$ est-elle une symétrie axiale ?

3. Soit $t$ la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$ . Donner l'écriture complexe de $t$ et celle de sa réciproque $t^{-1}$.

4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.

a. Montrer que l'écriture complexe de $s$ est : $z' = -i\bar{z}+1+i$.

b. Montrer que $I$ et $J$ sont invariants par $s$. En déduire la nature de $s$.

c. En déduire que $f$ est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

## *2. Exercice 1 (5 points, non spécialistes)*

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. Unité graphique : 3 cm

À tout point $M$ d'affixe $z$ du plan, on associe le point $M'$ d'affixe $z'$ par l'application $f$ qui admet pour écriture complexe : $z' = \dfrac{(3+4i)z+5\bar{z}}{6}$.

1. On considère les points $A$, $B$, $C$ d'affixes respectives $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1$ et $z_C = 3i$.

Déterminer les affixes des points $A'$, $B'$, $C'$ images respectives de $A$, $B$, $C$ par $f$. Placer les points $A$, $B$, $C$, $A'$, $B'$, $C'$.

2. On pose $z = x + iy$ (avec $x$ et $y$ réels). Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $z'$ en fonction de $x$ et $y$.

3. Montrer que l'ensemble des points $M$ invariants par $f$ est la droite ($D$) d'équation $y = \dfrac{1}{2}x$. Tracer ($D$). Quelle remarque peut-on faire ?

4. Soit $M$ un point quelconque du plan et $M'$ son image par $f$. Montrer que $M'$ appartient à la droite ($D$).

5. a. Montrer que, pour tout nombre complexe $z$ : $\dfrac{z'-z}{z_A} = \dfrac{z+\bar{z}}{6}+i\dfrac{z-\bar{z}}{3}$.

En déduire que le nombre $\frac{z'-z}{z_A}$ est réel.

b. En déduire que, si $M' \neq M$, les droites $(OA)$ et $(MM')$ sont parallèles.

6. Un point quelconque $N$ étant donné, comment construire son image $N'$ ? (on étudiera deux cas suivant que $N$ appartient ou non à $(D)$). Effectuer la construction sur la figure.

Correction

Voir exercices_complexes_corriges.

### 3. *Exercice 2 (5 points)*

On considère les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies, pour tout entier naturel $n$ non nul, par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + \frac{1}{n}, n \geq 2 \end{cases} \text{ et } v_n = u_n - \ln n \text{ pour } n \geq 1.$$

1. a. Calculer $u_2$, $u_3$ et $u_4$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n$ non nul : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel $k$ non nul : $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$.

b. En déduire que, pour tout entier $n$ supérieur ou égal à 2, on a les inégalités suivantes :

$$u_n - 1 \leq \ln n \leq u_n - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq v_n \leq 1.$$

c. En déduire le sens de variation de la suite $(v_n)$.

3. Montrer que la suite $(v_n)$ converge. On note $\gamma$ la limite de la suite $(v_n)$ (on ne cherchera pas à calculer $\gamma$).

Quelle est la limite de la suite $(u_n)$ ?

### 4. *Exercice 3 (5 points)*

Cet exercice comporte deux parties indépendantes.

La partie I est la démonstration d'un résultat de cours. La partie II est un Q.C.M.

Partie I : Question de cours

Soient A et B deux évènements indépendants. Démontrer que A et $\overline{\text{B}}$ sont indépendants.

Partie II

Pour chacune des questions suivantes, une et une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point, une réponse fausse enlève 0,5 point, l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total de cette partie est négatif, la note correspondant à la partie II est ramenée à zéro.

1. Une urne comporte cinq boules noires et trois boules rouges indiscernables au toucher. On extrait simultanément trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une boule rouge ?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\frac{75}{512}$ | B | $\frac{13}{56}$ | C | $\frac{15}{64}$ | D | $\frac{15}{28}$ |

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers d'une population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.

Quelle est la probabilité pour un individu vacciné de cette population de contracter la grippe ?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | $\frac{1}{120}$ | B | $\frac{3}{40}$ | C | $\frac{1}{12}$ | D | $\frac{4}{40}$ |

3. Un joueur lance une fois un dé bien équilibré.

Il gagne 10 € si le dé marque 1. Il gagne 1 € si le dé marque 2 ou 4. Il ne gagne rien dans les autres cas. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur. Quelle est la variance de X ?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 2 | B | 13 | C | 16 | D | 17 |

4. La durée d'attente T , en minutes, à un péage d'autoroute avant le passage en caisse est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{6}$. On a donc pour tout réel $t > 0$ :

$$P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\, dx \text{ avec } \lambda = \frac{1}{6}$$

où $t$ désigne le temps exprimé enminutes.

Sachant qu'un automobiliste a déjà attendu 2 minutes, quelle est la probabilité (arrondie à $10^{-4}$ près) que son temps total d'attente soit inférieur à 5 minutes ?

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 0,2819 | B | 0,3935 | C | 0,5654 | D | 0,6065 |

## *5. Exercice 4 (5 points)*

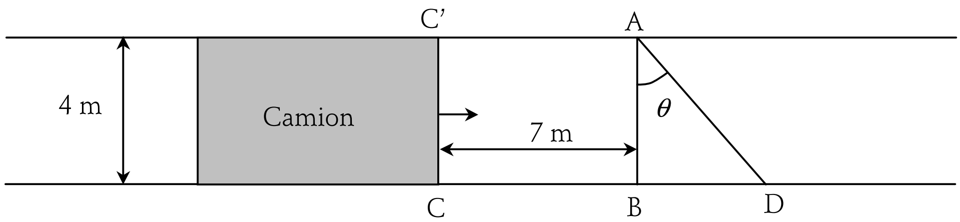
Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km/h. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui.

Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est à dire à . . . 30 km/h !

L'avant du camion est représenté par le segment [CC'] sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ (en radians).




1. Déterminer les distances $AD$ et $CD$ en fonction de $\theta$ et les temps $t_1$ et $t_2$ mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances $AD$ et $CD$.

2. On pose $f(\theta) = \frac{7}{2} + 2\tan\theta - \frac{4}{\cos\theta}$.

Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.

3. Conclure.

Rappel :

La fonction $x \to \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et a pour dérivée la fonction $x \to \frac{1}{\cos^2 x}$.

**Correction**

1. On appelle $v$ la vitesse du lapin, et donc $2v$ celle du camion.

$\frac{AB}{AD}=\cos\theta \Rightarrow AD=\frac{AB}{\cos\theta}=\frac{4}{\cos\theta}$ d'où $t_1=\frac{AD}{v_{Lapin}}=\frac{4}{v\cos\theta}$.

$\frac{BD}{AB}=\tan\theta \Rightarrow BD=4\tan\theta$ d'où $t_2=\frac{CB}{v_{Camion}}+\frac{BD}{v_{Camion}}=\frac{7}{2v}+\frac{4\tan\theta}{2v}$.

2. Le temps mis par le camion doit être supérieur à celui mis par le lapin (si le lapin veut éviter le camion…), il faut donc

$$t_2>t_1 \Leftrightarrow \frac{7+4\tan\theta}{2v}>\frac{4}{v\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{7+4\tan\theta}{2}>\frac{4}{\cos\theta} \Leftrightarrow \frac{7}{2}+2\tan\theta-\frac{4}{\cos\theta}>0 \Leftrightarrow f(\theta)>0.$$

3. A priori on ne sait pas trop résoudre l'inéquation proposée, on va plutôt regarder les variations de $f$ :

$$f'(t)=2\frac{1}{\cos^2\theta}-\frac{-4(-\sin\theta)}{\cos^2\theta}=2\frac{1-2\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

qui s'annule pour $\sin\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{6}$ : lorsque $\theta<\frac{\pi}{6}$, $\sin\theta<\frac{1}{2}\Rightarrow f'(\theta)>0$, $f$ croissante, $\frac{\pi}{6}$ donne l'abscisse du maximum de $f$, qui est alors de

$$f(\pi/6)=\frac{7}{2}+2\tan\frac{\pi}{6}-\frac{4}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{7}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{8}{\sqrt{3}}\approx 0,036.$$

Comme $f(0)=3,5-4=-0,5<0$ et que $\lim_{\theta\to\frac{\pi}{2}} f(\theta)=-\infty$, la fonction s'annule deux fois : une première fois vers 0,4, une deuxième vers 0,65 ; le lapin doit donc choisir un angle dans ces zones-là pour avoir une chance de survivre…

On peut essayer de résoudre directement : $f(\theta)=\frac{7}{2}+2\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{4}{\cos\theta}=\frac{7\cos\theta+4\sin\theta-8}{2\cos\theta}$ ;

utilisons les formules d'Euler :

$$7\cos\theta+4\sin\theta-8=7\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}+4\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}-8=7\frac{ie^{2i\theta}+i}{2ie^{i\theta}}+4\frac{e^{2i\theta}-1}{2ie^{i\theta}}-8\frac{2ie^{i\theta}}{2ie^{i\theta}}$$
$$=\frac{7ie^{2i\theta}+7i+4e^{2i\theta}-4-16ie^{i\theta}}{2ie^{i\theta}};$$

posons $z=e^{i\theta}$, soit l'équation $7iz^2+7i+4z^2-4-16iz=0 \Leftrightarrow (7i+4)z^2-16iz+7i-4=0$.

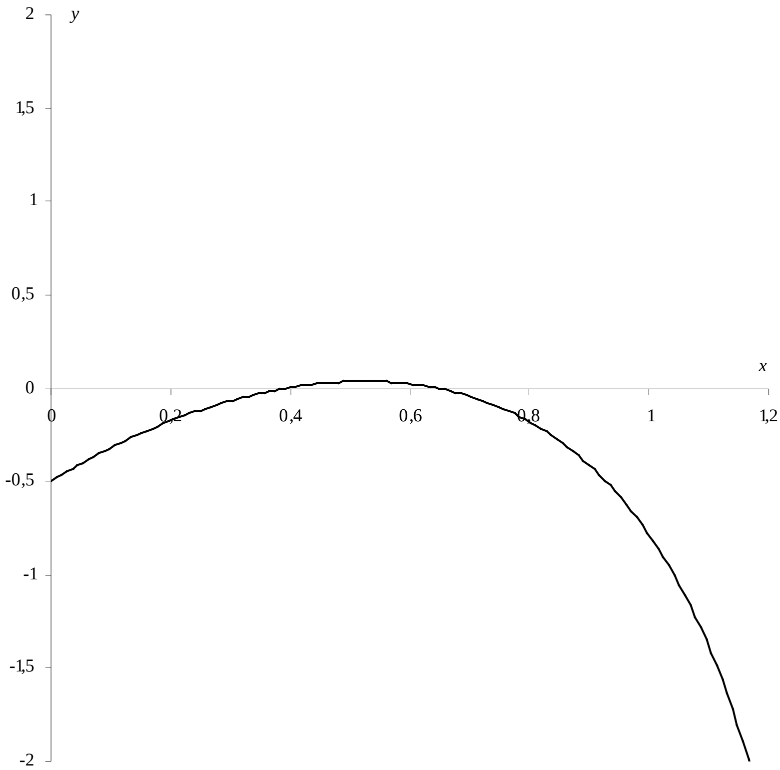
$\Delta=(-16i)^2-4(7i+4)(7i-4)=-256-4(-49-16)=\ldots$ ; on met les solutions sous la forme $e^{i\theta}$, les solutions étant alors l'argument du résultat. Comme on peut le voir directement, avec Maple, ça tombe en deux coups de cuiller à pot :

```
> f:=z->7/2+2*tan(z)-4/(cos(z));
> v:=[solve(f(z)=0)];evalf(v);
```

$$f := z \to \frac{7}{2}+2\tan(z)-\frac{4}{\cos(z)}$$

$$v := \left[\arctan\left(\frac{3}{4}\right), \arctan\left(\frac{5}{12}\right)\right]$$

$$[0.6435011088, 0.3947911197]$$


y
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-2
x
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2