Polynésie remplacement

1. Exercice 1 (5 points)

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce. Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B et C. À l'instant 0, la puce est en A.

Pour tout entier naturel n :

• si à l'instant n la puce est en A, alors à l'instant $(n+1)$, elle est : soit en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$; soit en C avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$;

• si à l'instant n la puce est en B, alors à l'instant $(n+1)$, elle est : soit en C, soit en A de façon équiprobable ;

• si à l'instant n la puce est en C, alors elle y reste.

On note A_n (respectivement B_n, C_n) l'évènement « à l'instant n la puce est en A » (respectivement en B, en C). On note a_n (respectivement b_n, c_n) la probabilité de l'évènement A_n, (respectivement B_n, C_n).

On a donc : $a_0 = 1$, $b_0 = c_0 = 0$.

Pour traiter l'exercice, on pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculer a_k, b_k et c_k pour k entier naturel tel que $1 \le k \le 3$.

2. a. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et $\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2} b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n . \end{cases}$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+2} = \frac{1}{6} a_n$.

c. En déduire que, pour tout entier naturel p, $\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p \text{ et } a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 \text{ et } b_{2p+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^p . \end{cases}$

3. Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. On admet que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$. Quelle est la limite de c_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Exercice 2 (7 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère la courbe H d'équation $y^2 - x^2 = 16$.

1. Montrer que H est la réunion de deux courbes C et C′ où C est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2+16}$ et où C′ est l'image de C par une transformation simple que l'on précisera.

2. Étudier la fonction f (limites aux bornes de l'ensemble de définition et sens de variation).

a. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est une asymptote de C.

b. Tracer H dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

On nomme A et B les points de la courbe H d'abscisses respectives -3 et 3. On considère le domaine D du plan constitué des points $M(x\,;y)$ vérifiant $-3 \le x \le 3$ et $\sqrt{x^2+16} \le y \le 5$. Hachurer le domaine D et exprimer l'aire de D à l'aide d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie B

On appelle r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

1. a. Donner l'écriture complexe de r.

b. On désigne par x' et y' les coordonnées du point M', image par r du point $M(x\,;y)$ du plan.

Vérifier que $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x+y) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-y) \end{cases}$. Déterminer les coordonnées des points A' et B', images respectives de A et B par la rotation r. Placer les points A' et B' dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

2. Soit H' l'hyperbole d'équation $xy = 8$.

a. Tracer H' dans le repère $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

b. Montrer que H' est l'image de H par la rotation r.

3. Soit D′ l'image de D par la rotation r. On admet que D′ est l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan vérifiant $\sqrt{2} \le x \le 4\sqrt{2}$ et $\dfrac{8}{x} \le y \le 5\sqrt{2} - x$.

a. Hachurer D'.

b. Calculer l'aire de D' exprimée en cm^2. En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de l'aire de D.

3. Exercice 3 (3 points)

Pour chacune des 3 questions, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève 0,5 point ; l'absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

Dans tout l'exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Le point M est situé sur le cercle de centre $A(-2\,;5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie :

a. $|z-2+5i|^2 = 3$; b. $|z+2-5i|^2 = 3$; c. $|z-2+5i| = 3$.

2. On considère trois points A, B et C d'affixes respectives a, b et c, deux à deux distincts et tels que le triangle ABC n'est pas équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\dfrac{z-b}{c-a}$ et $\dfrac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

a. M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC ;

b. M appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[AD]$;

c. M est l'orthocentre du triangle ABC.

3. Soit A et B les points d'affixes respectives $1 + i$ et $5 + 4i$, et C un point du cercle de diamètre $[AB]$. On appelle G l'isobarycentre des points A, B et C et on note z_G son affixe.

a. $|z_G - 3 - 2,5i| = \frac{5}{6}$; b. $z_G - (1+i) = \frac{1}{3}(4+3i)$; c. $z_G - (3+2,5i) = \frac{1}{3}(4+3i)$.

4. Exercice 4 (5 points)

L'annexe se rapporte à cet exercice. Elle sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=e^{-x}\cos(4x)$ et Γ sa courbe représentative tracée dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$ ci-dessous. On considère également la fonction g définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(x)=e^{-x}$ et on nomme C sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $-e^{-x} \le f(x) \le e^{-x}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer les coordonnées des points communs aux courbes Γ et C.

3. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique. En préciser la raison.

b. En déduire le sens de variation de la suite (u_n) et étudier sa convergence.

4. a. Montrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, $f'(x) = -e^{-x}\left[\cos(4x)+4\sin(4x)\right]$.

b. En déduire que les courbes Γ et C ont même tangente en chacun de leurs points communs.

5. Donner une valeur approchée à 10^{-1} près par excès du coefficient directeur de la droite T tangente à la courbe Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Compléter le graphique donné en annexe, en y traçant T et C.