Terminale S

Banque d'exercices 2005

1. Exercice 1 - triangle de Pascal
2. Exercice 2 - fonction et primitive
3. Exercice 3 - propriétés des intégrales
4. Exercice 4 - propriétés des intégrales
5. Exercice 5 - continuité et dérivabilité
6. Exercice 6 - limite de suite
7. Exercice 7 - argument d'un complexe
8. Exercice 8 - propriétés de exp
9. Exercice 9 (spé) - similitude
10. Exercice 10 (spé) - similitude
11. Exercice 11 - cours sur exp
12. Exercice 12 - encadrement de fonction
13. Exercice 13 - convergence de suite
14. Exercice 14 - convergence de suite
15. Exercice 15 - intégrale et aire
16. Exercice 16 (spé) - nombres premiers et congruence
17. Exercice 17 - equation intégrale
18. Exercice 18 - equation de cercle
19. Exercice 19 - rotation et translation
20. Exercice 20 - probas et ln
21. Exercice 21 - equa diff
22. Exercice 22 - suites adjacentes
23. Exercice 23 - equa diff
24. Exercice 24 - distance d'un point à une droite
25. Exercice 25 (spé) - racine cubique de 1
26. Exercice 26 (spé) - divisibilité
27. Exercice 27 - rotation
28. Exercice 28 - lieu de points complexe
29. Exercice 29 (spé) - congruence
30. Exercice 30 - aire d'un rectangle
31. Exercice 31 - limite de suite
32. Exercice 32 - lim de lnx/x
33. Exercice 33 (*) - somme d'entiers
34. Exercice 34 (*) - majorant
35. Exercice 35 (*) - courbes
36. Exercice 36 (*) - inégalité
37. Exercice 37 (*) - equa diff
38. Exercice 38 (*spé)- codage

Avertissement de l' Inspection Générale au lecteur : « Les exercices donnés ici constituent des exemples novateurs. Un sujet de baccalauréat 2005 ne comprendra qu'un nombre limité d'exercices novateurs tels que ceux figurant dans cette liste. »

N. B. : les exercices 33 à 38 sont « étoilés », ce qui laisse à penser qu'ils sont trop difficiles pour être posés le jour du bac… Les titres ont été rajoutés par moi-même pour plus de facilité.

1. Exercice 1 - triangle de Pascal

1. **Démonstration de cours**. Démontrer que, pour tous entiers naturels n et k tels que $1 \le k < n$, on a :

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

2. En déduire que pour tous entiers naturels n et k tels que $2 \le k < n-1$, on a :

$$\binom{n-2}{k-2}+2\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-2}{k}=\binom{n}{k}.$$

3. On considère deux entiers naturels n et k tels que $2 \le k < n-1$. On dispose d'une urne contenant n boules indiscernables au toucher. Deux des boules sont rouges, les autres sont blanches.

On tire au hasard et simultanément k boules de l'urne. On appelle A l'évènement « au moins une boule rouge a été tirée ».

a. Exprimer en fonction de n et de k la probabilité de l'évènement $\overline{A}$, contraire de A. En déduire la probabilité de A.

b. Exprimer d'une autre manière la probabilité de l'évènement A et montrer, à l'aide de la formule obtenue à la question 2, que l'on retrouve le même résultat.

2. Exercice 2 - fonction et primitive

On donne le tableau de variations d'une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On définit la fonction F qui, à tout réel *x*, associe $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

1. Quel est le sens de variation de la fonction F ?

2. Déterminer deux entiers strictement positifs a et b tels que $a \le F(2) \le b$.

3. Etudier la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3. Exercice 3 - propriétés des intégrales

On donne le tableau de variation d'une fonction *f*, … (même tableau qu'au 2).

1. On considère les intégrales $I=\int_0^3 f(t)dt$, $J=\int_{-5}^{-2} f(t)dt$ et $K=\int_{-1}^{1} f(t)dt$.

Pour une seule de ces intégrales, on peut affirmer qu'elle est positive et pour une seule, on peut affirmer qu'elle est négative. Préciser ces deux intégrales et justifier ce choix.

2. a. A l'aide des informations contenues dans le tableau de variations de *f*, donner un encadrement par des nombres entiers de chacune des intégrales $A=\int_0^1 f(t)dt$ et $B=\int_1^2 f(t)dt$.

b. Donner un encadrement de l'intégrale $C=\int_0^2 f(t)dt$.

3. Etudier la limite de $\int_0^x f(t)dt$ lorsque *x* tend vers $+\infty$.

4. Exercice 4 - propriétés des intégrales

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et proposer une démonstration pourla réponse indiquée.

– Les propositions vraies sont des conséquences immédiates de théorèmes du programme de Terminale ; la démonstration consiste à énoncer le théorème.

– Pour les propositions fausses, la démonstration consiste à fournir un contre exemple (ungraphique sera accepté).

– Une réponse non démontrée ne rapporte pas de point.

On considère une fonction f défionie et continue sur $\mathbb{R}$.

1. On a : $\int_1^2 f(x)dx+\int_2^4 f(x)dx=\int_1^4 f(x)dx$.

2. On a : $\int_1^2 (-f(x))dx=-\int_1^2 f(x)dx$.

3. Si *f* est positive sur $\mathbb{R}$, alors pour tout réel t, $\int_0^t f(x)dx$ est un nombre réel positif.

4. Si $\int_0^1 f(x)dx$ est un nombre positif, alors la fonction *f* est positive sur [0 ; 1].

5. Exercice 5 - continuité et dérivabilité

On considère une fonction *f* définie sur un intervalle I et un nombre réel *a* appartenant à I.

1. Rappeler la définition de « *f* est dérivable en *a* ».

2. Dans chacun des cas suivants, indiquer s'il existe une fonction f vérifiant simultanément les deux propriétés. Si la réponse est « oui », donner un exemple (un graphique sera accepté) ; dans le cas contraire, justifier la réponse à l'aide d'un théorème du cours.

– f est continue en a et f est dérivable en a ;

– f est continue en a et f n'est pas dérivable en a ;

– f n'est pas continue en a et f est dérivable en a ;

– f n'est pas continue en a et f n'est pas dérivable en a.

6. Exercice 6 - limite de suite

Soit (u_n) une suite. On considère les propriétés suivantes :

– P_1 : la suite (u_n) est majorée ;

– P_2 : la suite (u_n) n'est pas majorée ;

– P_3 : la suite (u_n) converge ;

– P_4 : la suite (u_n) tend vers $+\infty$;

– P_5 : la suite (u_n) est croissante.

1. Donner la traduction mathématique de la propriété P_1.

2. Si les propriétés P_1 et P_5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (u_n) (ne pas justifier la réponse) ?

3. Si les propriétés P_2 et P_5 sont vraies, que peut-on en conclure pour (u_n) (ne pas justifier la réponse) ?

4. Une suite vérifiant la propriété P_4 vérifie-t-elle nécessairement la propriété P_2 (justifier la réponse) ?

7. Exercice 7 - argument d'un complexe

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ du plan. On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z|=\|\vec{w}\|$ et $\arg(z)=\left(\vec{u},\vec{w}\right)$ défini à $2k\pi$ près.

Dans cet exercice, on prend comme prérequis le résultat suivant :

Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls alors $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ (à $2k\pi$ près).

1. Soit z et z' sont deux nombres complexes non nuls, démontrer que $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')+2k\pi$.

On note A et B les points d'affixes respectives $2i$ et -1. A tout nombre complexe z, distinct de $2i$, on associe le nombre complexe $Z=\dfrac{z+1}{z-2i}$.

2. Donner une interprétation géométrique de l'argument de Z dans le cas où $z\neq -1$.

3. Déterminer et représenter graphiquement, en utilisant la question précédente, les ensembles de points suivants :

a. L'ensemble E des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel strictement négatif.

b. L'ensemble F des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur non nul.

8. Exercice 8 - propriétés de exp

Préciser si chacune des quatre affirmations suivantes est « VRAIE » ou « FAUSSE ». Chaque fois que la réponse est « FAUSSE » une justification doit être donnée.

1. Pour tout nombre réel a et tout nombre réel b, $e^{a+b}=\sqrt{e^{2a}\times e^{2b}}$.

2. Pour tout nombre réel a et tout nombre réel b, $2e^{a+b}=e^{2a}+e^{2b}$.

3. Il existe un nombre réel a et un nombre réel b, tels que $2e^{a+b}=e^{2a}+e^{2b}$.

4. Il existe un nombre réel a et un nombre réel b, tels que $e^{2a}+e^{2b}<2e^{a+b}$.

9. Exercice 9 (spé) - similitude

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $\left(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}\right)$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

– A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;

– B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n).

1. Représenter le triangle OA_0B_0, puis construire les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

2. a. **Démonstration de cours**. Démontrer qu'il existe une similitude directe et une seule qui transforme A_0 en A_1 et B_0 en B_1.

b. Soit s cette similitude : préciser son angle et son rapport, puis vérifier que son centre est O. Démontrer que, pour tout entier naturel n, la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.

3. a. Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.

b. On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4). Démontrer que le triangle A_0B_0 est isocèle en Ω.

c. Calculer la distance A_0B_4.

d. Démontrer que $\Omega A_0 = 4\Omega B_4$.

e. En déduire l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$.

10. Exercice 10 (spé) - similitude

On considère un triangle OA_0B_0 rectangle isocèle en O et tel que la distance A_0B_0 soit égale à $4\sqrt{2}$. On précise de plus que l'angle $\left(\overrightarrow{OA_0}, \overrightarrow{OB_0}\right)$ est un angle droit direct.

On définit alors pour tout entier naturel n les points A_{n+1} et B_{n+1} de la façon suivante :

– A_{n+1} est le milieu du segment $[A_nB_n]$;

– B_{n+1} est le symétrique du point A_{n+1} par rapport à la droite (OB_n).

1. Représenter le triangle OA_0B_0, puis construire les points A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3.

2. Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A_0 en A_1.

a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude s, puis montrer que la similitude s transforme B_0 en B_1.

b. Démontrer que pour tout entier n, la similitude s transforme A_n en A_{n+1} et B_n en B_{n+1}.

3. a. Démontrer que les points O, A_n et A_p sont alignés si et seulement si les entiers n et p sont congrus modulo 4.

b. On désigne par Ω le point d'intersection des droites (A_0B_4) et (B_0A_4). Déterminer la valeur exacte de l'aire du triangle $A_0\Omega B_0$ (tout élément de réponse, par exemple l'exposé d'une méthode ou la détermination d'une valeur approchée, sera pris en compte).

11. Exercice 11 - cours sur exp

Prérequis : la fonction exponentielle, notée exp, a les trois propriétés suivantes :

1. exp est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$;
2. sa fonction dérivée, notée exp', est telle que, pour tout nombre réel x, $\exp'(x) = \exp(x)$;
3. $\exp(0) = 1$.

En n'utilisant que ces trois propriétés de la fonction exp, démontrer successivement que :

– Pour tout nombre réel x, $\exp(x) \times \exp(-x) = 1$.

– Pour tout nombre réel a et tout nombre réel b, $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

12. Exercice 12 - encadrement de fonction

Soit b un nombre réel strictement positif.

1. Exprimer en fonction de b un nombre A_1 tel que pour tout nombre réel x strictement positif supérieur à A_1 on ait $\frac{1}{x} < b$.

2. Exprimer en fonction de b un nombre A_2 tel que pour tout nombre réel x positif supérieur à A_2 on ait $\frac{1}{2x+1} < b$.

3. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]0,\ +\infty[$ telle que pour tout x de cet intervalle on ait $-\frac{1}{2x+1} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.

a. Proposer un nombre réel A, à exprimer en fonction de b, tel que pour tout nombre réel x positif supérieur ou égal à A on ait $f(x) \in]-b\,;b[$.

b. Quelle propriété de la fonction f est démontrée à la question a. ?

c. Proposer une autre justification de cette propriété de la fonction f à l'aide d'un théorème figurant au programme de terminale S. On énoncera ce théorème avec précision.

13. Exercice 13 - convergence de suite

A. **Démonstration de cours**.

Soit (u_n) une suite croissante non majorée.

1. Soit M un nombre réel et n_0 un entier naturel tel que $u_{n_0} \geq M$. Démontrer que pour tout entier naturel n, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq M$.

2. Quelle conséquence peut-on en tirer pour la suite (u_n) ?

3. Enoncer le théorème du cours ainsi démontré.

B. Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes en **justifiant** chaque réponse :

a. Si une suite n'est pas majorée alors elle tend vers $+\infty$.

b. Si une suite est croissante alors elle tend vers $+\infty$.

c. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle n'est pas majorée.

d. Si une suite tend vers $+\infty$ alors elle est croissante.

14. Exercice 14 - convergence de suite

Partie I

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affectés ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affectés. Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Pour chacune des affirmations suivantes répondre sans justification par Vrai ou Faux :

(A) Toute suite bornée est convergente.

(B) Pour toutes suites (u_n) et (v_n) à valeurs strictement positives qui tendent vers $+\infty$, la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ converge vers 1.

(C) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

Partie II

Pour chacune des propositions de la première partie, justifier la réponse donnée :

– dans le cas où la proposition vous paraît fausse : en donnant un contre-exemple.

– dans le cas où la proposition vous paraît exacte : en donnant une démonstration.

15. Exercice 15 - intégrale et aire

Le but de l'exercice est d'établir dans un cas particulier le lien existant entre aire sous la courbe et primitive. On prendra comme prérequis la définition suivante :

> H est une primitive de h sur un intervalle I si et seulement si H est dérivable sur I et si pour tout x de I on a $H'(x) = h(x)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \ln(t^2 + 1)$.

1. Expliquer pourquoi f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

2. Montrer que f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

La fonction f est représentée ci-dessous.

Pour $\alpha \geq 0$, on note $A(\alpha)$ l'aire de la portion de plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et la droite d'équation $x = \alpha$.

3. Soit x_0 un réel strictement positif.

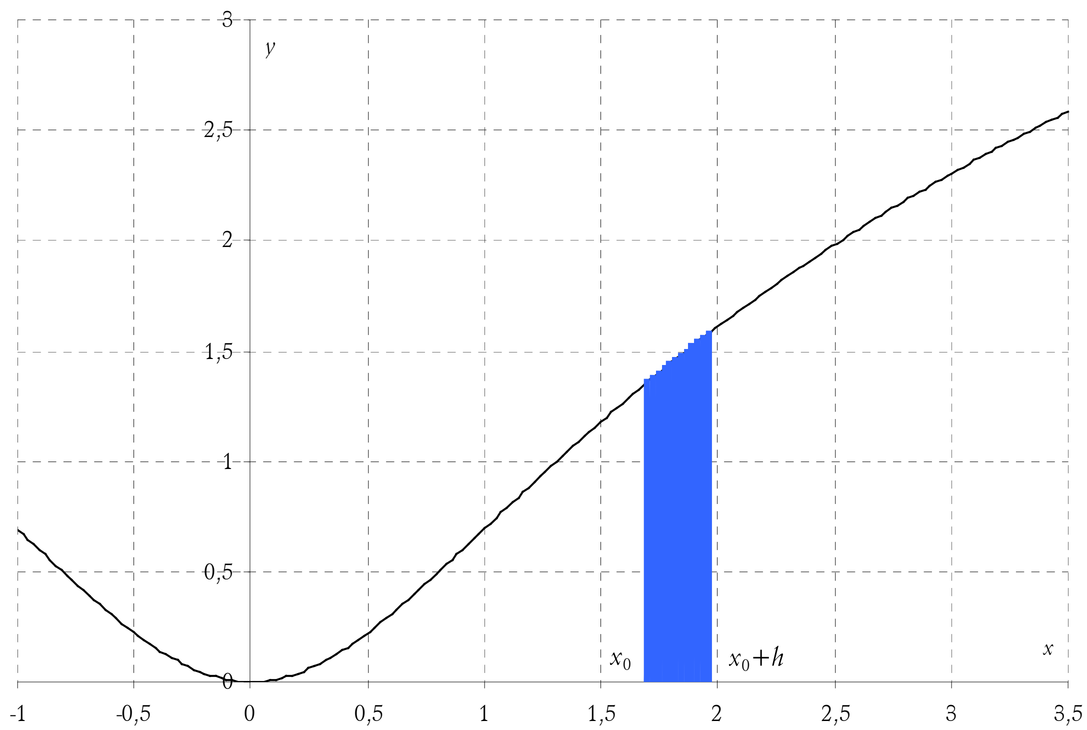
a. Soit h un réel strictement positif. En utilisant des rectangle convenablement choisis, établir l'encadrement

$$\ln(1+x_0^2) \leq \frac{A(x_0+h)-A(x_0)}{h} \leq \ln(1+(x_0+h)^2).$$

b. Quel encadrement peut-on obtenir de la même manière pour $-x_0 \leq h < 0$?

c. **Démontrer** que la fonction A est dérivable en x_0. Quel est le nombre dérivé de A en x_0 ?

4. Quel lien a-t-on établi entre les fonctions A et f sur $]0\,;+\infty[$?



16. Exercice 16 (spé) - nombres premiers et congruence

1. **Démonstration de cours** : démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

2. Soit p un nombre premier strictement plus grand que 2. Démontrer que p est congru à 1 ou à –1 modulo 4. Donner deux exemples de chacun de ces cas.

Le but de ce qui suit est de répondre à la question suivante :

« Les nombres premiers p congrus à –1 modulo 4 sont-ils en nombre fini ? »

Supposons que ce soit le cas : soit n le nombre des nombres premiers congrus à –1 modulo 4, notons $A = p_1p_2 \dots p_n$ le produit de ces nombres et $B = 4A - 1$.

3. Montrer que B est congru à –1 modulo 4.

4. Soit q un diviseur premier de B. Montrer que q est distinct de chacun des nombres p_1, p_2, …, p_n précédents.

Montrer que parmi les diviseurs premiers de B, l'un au moins est congru à –1 modulo 4.

5. Quelle réponse apporter à la question posée ?

17. Exercice 17 - equation intégrale

On cherche les nombres réels a strictement positifs et les fonctions f définies et continues sur l'intervalle $[a\,;+\infty[$, vérifiant, pour tout x supérieur ou égal à a, la relation :

$$\int_a^x f(t)dt = 2\ln x .$$

Démontrer que le problème posé a une et une seule solution que l'on déterminera.

18. Exercice 18 - equation de cercle

Soit a un réel strictement positif.

1. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, rappeler la nature de l'ensemble des points dont les coordonnées $(x\,;y)$ vérifient $x^2+y^2=a^2$.

2. On pose $I(a)=\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. En interprétant $I(a)$ comme une aire déterminer a pour que l'on ait $I(a)=\pi$.

19. Exercice 19 - rotation et translation

On considère le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

1. Soit t la translation de vecteur $\vec{w}=2\vec{u}$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'. Donner l'écriture complexe de la transformation t, c'est-à-dire l'expression de z' en fonction de z.

2. Soit r la transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que $z_1=-iz+4i$.

a. Déterminer un point Ω tel que $r(\Omega)=\Omega$.

b. Démontrer que r est une rotation de centre Ω dont on précisera l'angle.

3. Déterminer la nature de la transformation $r\circ t$.

20. Exercice 20 - probas et ln

Partie I

φ est la fonction définie sur $]0\,;1]$ par $\varphi(x)=-\dfrac{\ln(x)}{\ln(2)}$.

Pour un événement A de probabilité $P(A)$ non nulle, on pose $i(A)=\varphi(P(A))$. En théorie de l'information, ce nombre $i(A)$ est appelé *incertitude de l'événement A*.

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement « la carte tirée est la dame de cœur ». Que valent $P(A)$ et $i(A)$?

2. Soit n un entier naturel non nul. On lance n fois une pièce équilibrée. A est l'événement « obtenir n fois PILE ». Déterminer $i(A)$.

3. Que vaut $i(A)$ lorsque $P(A) = 1$? Commenter le résultat.

4. Si A et B sont deux événements indépendants pour la probabilité P et si $P(A \cap B) \neq 0$, démontrer que $i(A \cap B) = i(A) + i(B)$.

5. Calculer $\lim_{x \to 0} \varphi(x)$. Quelle interprétation peut-on donner de ce résultat en termes d'incertitude ?

Partie II

h est la fonction définie sur [0, 1] par :

$$h(0) = 0 \text{ et, pour tout } x \text{ de }]0, 1],\ h(x) = -x\frac{\ln(x)}{\ln(2)}.$$

On admet que h est continue sur [0, 1].

On définit également la fonction h_1 sur [0, 1] par $h_1(x) = h(x) + h(1 - x)$.

1. Dresser le tableau de variations de h_1.

2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1]$. On appelle incertitude moyenne de X la quantité $h_1(p)$.

a. Donner la valeur de p pour laquelle $h_1(p)$ est maximum.

b. Commenter ce résultat.

21. Exercice 21 - equa diff

Dans une pièce à la température constante de 20°C, à l'instant initial noté 0 la température $\theta(0)$ d'un liquide est égale à 70°C. Cinq minutes plus tard elle est de 60°C.

On admet que la température θ du liquide est une fonction dérivable du temps t, exprimé en minutes, et que sa dérivée $\theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température $\theta(t)$ et celle de la pièce.

On notera a le coefficient de proportionnalité, $a \in \mathbb{R}$.

1. **Démonstration de cours**.

Soit (E) l'équation différentielle $z' = az$.

Prérequis : la fonction $x \to e^{ax}$ est solution de l'équation (E).

Démontrer que toute solution de (E) est de la forme $x \to Ce^{ax}$, où C est une constante réelle.

2. Résoudre l'équation différentielle : $y' = ay - 20a$.

3. Quelle sera la température du liquide 30 minutes après l'instant initial ?

22. Exercice 22 - suites adjacentes

Soit (u_n) une suite telle que les suites de terme général $v_n = 1 + u_n$ et $w_n = 3 - u_n$ soient adjacentes. Etudier la convergence de la suite (u_n) et préciser, le cas échéant, sa limite.

23. Exercice 23 - equa diff

Soit E_1 l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = y$.

Soit E_2 l'ensemble des fonctions solutions de l'équation différentielle $y'' = y$.

Le but de l'exercice est de démontrer qu'il existe une unique fonction f qui appartient à E_2 et qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$.

1. Vérifier que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \to e^{x}$ et $x \to e^{-x}$ sont des éléments de E_2.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, on pose $u = f + f'$.

a. Démontrer que f appartient à E_2 si et seulement si u appartient à E_1.

b. **Démonstration de cours.**

Prérequis :

- la fonction $x \to e^x$ est élément de E_1 ;

- pour tout x réel, $e^x.e^{-x} = 1$.

Démontrer l'unicité de la fonction u élément de E_1 qui vérifie $u(0) = 1$.

3. Soit f un élément de E_2. On pose, pour tout réel x, $g(x) = f(x)e^x$.

a. Démontrer que si f vérifie $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, alors $g'(x) = e^{2x}$.

b. Démontrer qu'il existe une seule fonction f répondant au problème posé et déterminer son expression.

24. Exercice 24 - distance d'un point à une droite

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$.

a. Soient u, v, w, x_0, y_0 des nombres réels tels que $u^2 + v^2 \neq 0$. Etablir une formule donnant la distance du point $M_0(x_0, y_0)$ à la droite d'équation $ux + vy + w = 0$.

b. Soient a, b des réels strictement positifs, on considère les points $A(a, 0)$ et $B(0, b)$. Calculer la distance du point O à la droite (AB).

2. Soient a, b, c des réels strictement positifs ; on considère les points $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ et $C(0, 0, c)$ dans un repère orthonormal $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace.

a. Calculer la distance du point C à la droite (AB).

b. Montrer la relation

$$\text{Aire}(ABC)^2 = \text{Aire}(OAB)^2 + \text{Aire}(OBC)^2 + \text{Aire}(OCA)^2.$$

25. Exercice 25 (spé) - racine cubique de 1

Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$. On désigne par A l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + bj$, où a et b sont des entiers relatifs.

1. Montrer que, pour tout élément z de A, $|z|^2$ est un entier.

2. Quels sont les éléments z non nuls de A tels que $\frac{1}{z}$ soit également élément de A ?

26. Exercice 26 (spé) - divisibilité

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $u_n = 1! + 2! + \ldots + n!$

On donne la décomposition en facteurs premiers des dix premiers termes de la suite (u_n).

$u_1 = 1$	$u_6 = 3^2 \times 97$
$u_2 = 3$	$u_7 = 3^4 \times 73$
$u_3 = 3^2$	$u_8 = 3^2 \times 11 \times 467$
$u_4 = 3 \times 11$	$u_9 = 3^2 \times 131 \times 347$
$u_5 = 3^2 \times 17$	$u_{10} = 3^2 \times 11 \times 40787$

1. Montrer que u_n n'est jamais divisible par 2, par 5 ni par 7.

2. Peut-on affirmer que u_n est divisible par 11 à partir d'un certain rang ?

3. Peut-on affirmer que, à partir d'un certain rang, u_n est divisible par 3^2 mais pas par 3^3 ?

27. Exercice 27 - rotation

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$. On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z|=\|\vec{w}\|$ et $\arg(z)=\left(\vec{u},\vec{w}\right)$ défini à $2k\pi$ près.

Prérequis : si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors $\arg(zz')=\arg(z)+\arg(z')+2k\pi$, k entier relatif.

1. Soient M, N et P trois points du plan, d'affixes m, n et p tels que $m\neq n$ et $n\neq p$.

a. Démontrer que $\arg\left(\dfrac{p-m}{n-m}\right)=\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}\right)$ à $2k\pi$ près.

b. Interpréter géométriquement $\left|\dfrac{p-m}{n-m}\right|$.

2. En déduire la traduction complexe d'une rotation de centre Ω d'affixe ω et d'angle de mesure θ, θ désignant un nombre réel.

28. Exercice 28 - lieu de points complexe

A tout nombre complexe $z=x+iy$ où x et y désignent la partie réelle et la partie imaginaire de z, on associe le nombre complexe $f(z)=e^{y}(\cos(\pi x)+i\sin(\pi x))$.

1. Déterminer et placer, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, les points d'affixes $f(0)$, $f(i)$, $f(-i)$, $f(1+i)$ et $f(1-i)$.

2. Pour tout nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$, démontrer que $f(z)$ est non nul, puis déterminer en fonction de x et y le module et un argument de $f(z)$.

3. a. Démontrer que pour tous les nombres complexes z et z', $f(z+z')=f(z)f(z')$ et $f(z-z')=\dfrac{f(z)}{f(z')}$.

b. Démontrer que pour tout entier relatif n, pour tout nombre complexe z, $f(nz)=(f(z))^{n}$.

4. Soit A le point du plan d'affixe $w = 1 + i$. Soient B, C, et D les points d'affixes respectives $\overline{w}$, $-w$ et $-\overline{w}$.

a. Déterminer l'ensemble L des points du plan dont l'affixe $z = x+\mathrm{i}y$ vérifie $\begin{cases}|x|\leq 1\\ |y|=1\end{cases}$ puis déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe $f(z)$, où z est l'affixe d'un élément de L.

b. Déterminer l'ensemble K des points du plan dont l'a.xe $z = x+\mathrm{i}y$ vérifie $\begin{cases}|x|\leq 1\\ |y|\leq 1\end{cases}$ puis déterminer l'ensemble des points du plan d'affixe $f(z)$, où z est l'affixe d'un élément de K.

29. Exercice 29 (spé) - congruence

Définition de la congruence modulo 11 : on rappelle que si a et b désignent deux entiers relatifs, on dit que a est congru à b modulo 11, et on écrit $a\equiv b[11]$, si et seulement s'il existe un entier relatif k tel que $a = b + 11k$.

1. a. **Démonstration de cours** : démontrer que si $a\equiv b[11]$ et $c\equiv d[11]$ alors $ac\equiv bd[11]$.

b. En déduire que si $a\equiv b[11]$, alors pour tout n entier naturel on a : $a^{n}\equiv b^{n}[11]$.

2. Soit N un entier naturel dont l'écriture en base 10 est $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_1 a_0}$, ce qui signifie que $N=a_0+a_1 10^{1}+\ldots+a_{n-1}10^{n-1}+a_n 10^{n}$.

Etablir que N est divisible par 11 si, et seulement si, le nombre $a_0-a_1+a_2+\ldots+(-1)^{n}a_n$ est multiple de 11.

30. Exercice 30 - aire d'un rectangle

Soit (C) un cercle de rayon 4 cm. Quelle est l'aire maximale d'un rectangle dont les sommets sont sur le cercle (C) ¿

31. Exercice 31 - limite de suite

1. **Démonstration de cours**

Prérequis : définition d'une suite tendant vers $+\infty$.

Une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si pour tout réel A, tous les termes de la suite sont, à partir d'un certain rang, supérieurs à A.

Démontrer le théorème suivant : une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$.

a. Etablir que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que si la suite (u_n) a pour limite un réel l, alors l vérifie la relation $l = l + e^{-l}$.

c. Conclure quand à la convergence de la suite (u_n).

32. Exercice 32 - lim de lnx/x

Le but de l'exercice est de démontrer le résultat de cours suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

On rappelle la définition et le théorème suivants :

Définition : *Soit f une fonction d´efinie sur l'intervalle* $[A, +\infty[$, *où A est un réel positif, et soit L un nombre réel.*

Dire que la fonction f a pour limite L en $+\infty$, *signifie que tout intervalle ouvert contenant L contient tous les nombres f(x) pour x assez grand.*

Théorème : *Soit L un nombre réel, f, g et h des fonctions définies sur l'intervalle* $[A, +\infty[$, *où A est un réel positif. Si f, g, et h vérifient les conditions suivantes :*

– Pour tout x appartenant à l'intervalle $[A, +\infty[$, $g(x) \le f(x) \le h(x)$;

– Les fonctions g et h ont pour limite L en $+\infty$;

alors la fonction f a pour limite L en $+\infty$.

1. Démonstration de cours.

En utilisant la définition précédente, démontrer le théorème énoncé ci-dessus.

2. Application :

a. Etudier les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$, par $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.

b. Montrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$ on a les inégalités $0 \le \ln x \le \sqrt{x}$.

En déduire que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1, +\infty[$ on a $0 \le \dfrac{\ln x}{x} \le \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

c. En déduire la limite de $\dfrac{\ln x}{x}$ en $+\infty$.

33. Exercice 33 (*) - somme d'entiers

Soient n et k deux entiers supérieurs ou égaux à 2.

Montrer que n^k peut s'écrire comme somme de n entiers impairs consécutifs.

34. Exercice 34 (*) - majorant

Si a et b sont deux entiers strictement positifs, on désigne par $m(a, b)$ le plus petit des deux nombres $\sqrt[b]{a}$ et $\sqrt[a]{b}$ et on considère l'ensemble $A = \{ m(a, b) \mid (a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \}$.

Montrer que A est une partie de $\mathbb{R}$ admettant un plus grand élément que l'on déterminera.

35. Exercice 35 (*) - courbes

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $r = (O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. On considère les droites Δ_1 et Δ_2 d'équations respectives, dans le repère r,

$$y = \frac{5}{4}(x+1) \text{ et } y = \frac{5}{4e}(x+5)\,.$$

Déterminer des nombres réels x_1 et x_2, avec $x_1 \neq x_2$, et une fonction exponentielle f, c'est-à-dire une fonction de la forme $x \mapsto Ce^{kx}$, où C et k sont des constantes réelles, telle que la courbe représentative C_f de f soit tangente à Δ_1 au point d'abscisse x_1 et à Δ_2 au point d'abscisse x_2.

36. Exercice 36 (*) - inégalité

Etablir que pour tout couple (x, y) de nombres réels on a l'inégalité

$$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|\,.$$

37. Exercice 37 (*) - equa diff

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que $f(0) = 1$.

1. On suppose vérifiée, pour tout nombre réel x, la relation $f(x) + f'(x) \leq 0$.

Comparer, pour $x \geq 0$, $f(x)$ et e^{-x}.

2. Soit a un réel positif. On suppose à présent que f vérifie la relation $af(x) + f'(x) \leq 0$.

Que peut-on en déduire pour f ?

3. Dans un processus, une certaine quantité est mesurée par une fonction g du temps t, qui vérifie l'équation différentielle :

$$g'(t) + 0,001g(t) + k(t)g^2(t) = 0$$

où k est une fonction positive de t. Déterminer un instant t_0 tel que l'on puisse affirmer que, pour $t \geq t_0$ la valeur de $g(t)$ est inférieure ou égale à 5% de sa valeur initiale $g(0)$.

38. Exercice 38 (*spé)- codage

On considère les dix caractères A, B, C, D, E, F, G, H, I et J auxquels on associe dans l'ordre les nombres entiers de 1 à 10. On note $\Omega = \{1, 2, \ldots, 10\}$. On appelle *message* tout mot, ayant un sens ou non, formé avec ces dix caractères.

1. On désigne par f la fonction définie sur Ω par « $f(n)$ est le reste de la division euclidienne de 5^n par 11 ».

On désire coder à l'aide de f le message « BACF ». Compléter la grille de chiffrement ci-dessous :

Lettre	B	A	C	F
n	2	1	3	6
$f(n)$	3			
Lettre	C			

Peut-on déchiffrer le message codé avec certitude ?

2. On désigne par g la fonction définie sur Ω par « $g(n)$ est le reste de la division euclidienne de 2^n par 11 ». Etablir, sur le modèle précédent, la grille de chiffrement de g. Permet-elle le déchiffrement avec certitude de tout message codé à l'aide de g ?

3. Le but de cette question est de déterminer des conditions sur l'entier a compris entre 1 et 10 pour que la fonction h définie sur E par « $h(n)$ est le reste de la division euclidienne de a^n par 11 » permette de chiffrer et déchiffrer avec certitude un message de 10 caractères.

Soit i un élément de Ω .

a. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que si, pour tout $i \in \Omega$, $i < 10$, a^i n'est pas congru à 1 modulo 11, alors la fonction h permet le déchiffrement avec certitude de tous messages.

b. Montrer que s'il existe $i \in \Omega$, $i < 10$, tel que $a^i \equiv 1[11]$, alors la fonction h ne permet pas de déchiffrer un message avec certitude.

c. On suppose que i est le plus petit entier naturel tel que $1 \leq i \leq 10$ vérifiant $a^i \equiv 1[11]$.

En utilisant la division euclidienne de 10 par i, prouver que i est un diviseur de 10.

d. Quelle condition doit vérifier le nombre a pour permettre le chiffrage et le déchiffrage sans ambiguïté de tous messages à l'aide de la fonction h ? Faire la liste de ces nombres.