Banque d'exercices

Les exercices de Spécialité et l'exercice commun avec les ES sont à la fin.

1. combinatoire

On considère 7 boules numérotées de 1 à 7. L'expérience consiste à en tirer simultanément 3.

1. Soit k un entier vérifiant $3 \le k \le 7$. Combien y a-t-il de tirages de 3 boules dont le plus grand numéro est k ?

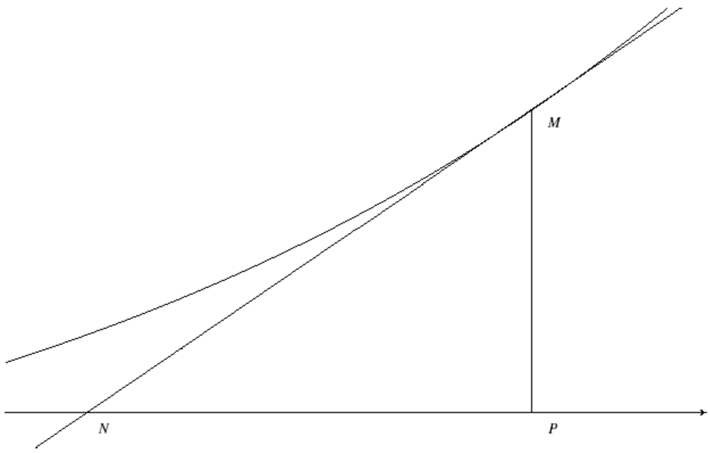
2. En déduire une expression de $\sum_{k=3}^{7} \binom{k-1}{2}$ sous forme d'un unique coefficient binomial.

2. equa diff

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. On désigne par C la courbe représentative de la fonction exponentielle $x \to e^x$. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à C, on considère le point P de coordonnées $(t, 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à C avec l'axe des abscisses.

Montrer que la distance PN est constante.



2. Dans la suite de l'exercice, f désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}$, strictement positive, dérivable et dont la dérivée est strictement positive. Pour tout point M d'abscisse t appartenant à la courbe représentative de f, on considère le point P de coordonnées $(t, 0)$ et le point N, point d'intersection de la tangente en M à la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses.

a. Calculer la distance PN en fonction de $f(t)$ et de $f'(t)$.

b. Déterminer une équation différentielle (E_k) vérifiée par les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, strictement positives, dérivables et dont la dérivée est strictement positive, pour lesquelles la distance PN est une constante k.

c. Déterminer les fonctions f solutions de (E_k)

3. complexes

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0. Pour chaque question, une seule des 4 propositions est exacte. Le candidat doit cocher la case correspondante. Aucune justification n'est demandée.

1. Soit $z\in\mathbb{C}$ vérifiant $\overline{z}+|z|=6+2i$. L'écriture algébrique de z est :

□ $\frac{8}{3}-2i$ □ $-\frac{8}{3}-2i$ □ $-\frac{8}{3}+2i$ □ $\frac{8}{3}+2i$

2. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant $|z-1|=|z+i|$ est la droite d'équation :

□ $y = x - 1$ □ $y = -x$ □ $y = -x + 1$ □ $y = x$

3. Soit n un entier naturel. Le nombre $\left(1+i\sqrt{3}\right)^n$ est réel si, et seulement si, n s'écrit sous la forme :

□ $3k + 1$ □ $3k + 2$ □ $3k$ □ $6k$

(avec k entier naturel)

4. Soit l'équation (E) : $z=\frac{6-z}{3-z}$, $z\in\mathbb{C}$. Une solution de (E) est :

□ $-2-\sqrt{2}i$ □ $2+\sqrt{2}i$ □ $1 - i$ □ $1 - i$

5. Soit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = i$ et $z_B=\sqrt{3}$ dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

L'affixe z_C du point C tel que ABC soit un triangle équilatéral avec $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}(2\pi)$ est :

□ $-i$ □ $2i$ □ $\sqrt{3}+i$ □ $\sqrt{3}+2i$

6. Dans le plan complexe, l'ensemble des points M d'affixe $z = x + iy$ vérifiant la relation $\arg\left(\frac{z+2}{z-2i}\right)=\frac{\pi}{2}$ est inclus dans :

□ La droite d'équation $y = -x$

□ Le cercle de centre I $(1 + i)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$

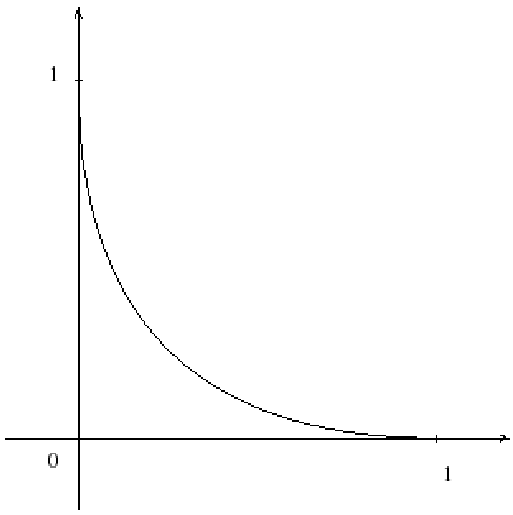
□ La droite d'équation $y = x$

□ Le cercle de diamètre $[AB]$, A et B étant les points d'affixes respectives $z_A = -2$ et $z_B = 2i$.

4. une courbe

Soit **f** la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $f(x)=x-2\sqrt{x}+1$.

Cette fonction est dérivable sur $]0\,;1]$ et sa dérivée f' vérifie $f'(1) = 0$. La courbe représentative C de la fonction *f* dans un repère orthonormal est donnée ci-contre.



1. a. Montrer que le point M de coordonnées (x, y) appartient à C si et seulement si $x > 0$, $y > 0$ et $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$.

b. Montrer que C est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. a. Si C était un arc de cercle, quel pourrait être son centre ? Quel pourrait être son rayon ?

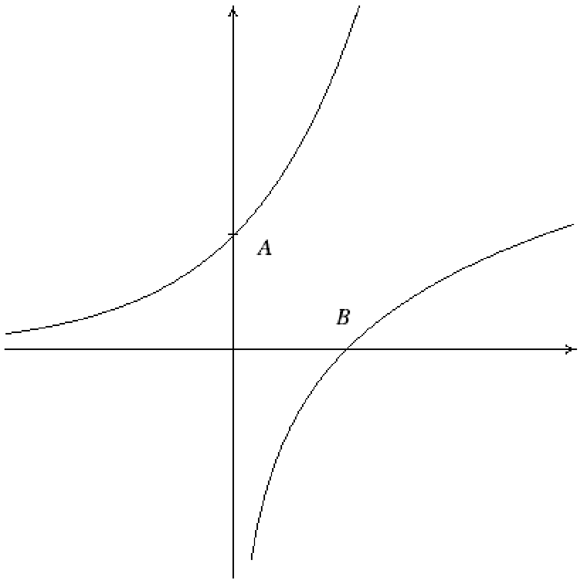
b. La courbe C est-elle un arc de cercle ?

5. Ln et Exp

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On note Γ et Δ les courbes représentatives respectives des fonctions exponentielle et logarithme népérien.

Soit A le point de Γ d'abscisse 0 et B le point de Δ d'abscisse 1.



1. a. Ecrire les équations de la tangente D à la courbe Γ au point A et de la tangente T à la courbe Δ au point B.

b. Montrer que les droites D et T sont parallèles. Quelle est leur distance ?

2. a. Démontrer que la courbe Γ est située entièrement « au-dessus » de D.

b. Démontrer que la courbe Δ est située entièrement « en dessous » de T.

c. On désigne par M un point quelconque de Γ et par N un point quelconque de Δ. Expliquer pourquoi $MN\geq\sqrt{2}$.

6. exponentielle

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-2{,}1e^{x}+1{,}1x+1{,}6$.

1. Faire apparaître sur l'écran de la calculatrice graphique la courbe représentative de cette fonction dans la fenêtre $[-5\,;4]$ x $[-4\,;4]$.

Reproduire l'allure de la courbe obtenue sur la copie.

2. D'après cette représentation graphique, que pourrait-on conjecturer :

a. Sur les variations de la fonction f ?

b. Sur le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$?

3. On se propose maintenant d'étudier la fonction f.

a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x} - 2{,}1e^x + 1{,}1 > 0$.

b. Etudier les variations de la fonction f.

c. Déduire de cette étude le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

4. On veut représenter, sur l'écran d'une calculatrice, la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-0{,}05\ ;\ 0{,}15]$, de façon à visualiser les résultats de la question 3.

Quelles valeurs extrêmes de l'ordonnée y peut-on choisir pour la fenêtre de la calculatrice ?

7. suite récurrente

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier dans chaque cas.

1. Pour tout n, $0 \le v_n \le 1$.

2. Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente.

3. Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante.

4. Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente.

8. géométrie espace

Dans cet exercice, les questions sont indépendantes.

Pour chaque question, une seule des trois propositions a), b) ou c) est exacte. On demande d'indiquer laquelle, sans justification.

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte le nombre de points affecté ; une réponse inexacte enlève la moitié du nombre de points affecté.

Le candidat peut décider de ne pas répondre à certaines de ces questions. Ces questions ne rapportent aucun point et n'en enlèvent aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O\ ;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\left\|\overrightarrow{MA}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB}\right\|$ est :

a) l'ensemble vide   b) un plan   c) une sphère

2. On considère les points $E(0\ ;\ 1\ ;\ -2)$ et $F(2\ ;\ 1\ ;\ 0)$. Les coordonnées du barycentre G de $(E\ ;\ 1)$ et $(F\ ;\ 3)$ sont :

a) $G\ (6\ ;\ 4\ ;\ -2)$ b) $G\ (1{,}5\ ;\ 1\ ;\ -0{,}5)$ c) $G\ (0{,}5\ ;\ 1\ ;\ 1{,}5)$

3. Soit d la droite de représentation paramétrique $x = 2 - t\ ;\ y = 3t\ ;\ z = -3,\ t \in \mathbb{R}$. On considère les points $A(2\ ;\ 3\ ;\ -3)$, $B(2\ ;\ 0\ ;\ -3)$ et $C(0\ ;\ 6\ ;\ 0)$. On a :

a) $d = (AB)$ b) $d = (BC)$ c) $d \neq (AB)$ et $d \neq (BC)$ et $d \neq (CA)$

4. Les droites de représentations paramétriques respectives

$$x = 2 + t\ ;\ y = 1 - t\ ;\ z = 1 + t,\ t \in \mathbb{R},$$
$$x = -t_0\ ;\ y = -2 - 1{,}5t_0\ ;\ z = 3 + t_0,\ t_0 \in \mathbb{R}$$

admettent comme point commun :

a) $I(3\ ;\ 0\ ;\ 2)$ b) $J(2\ ;\ 1\ ;\ 1)$ c) $K(0\ ;\ 2\ ;\ -3)$

5. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$x = 1\ ;\ y = 1 + 2t\ ;\ z = 1 + t,\ t \in \mathbb{R},$$
$$x = 3 - 2t_0\ ;\ y = 7 - 4t_0\ ;\ z = 2 - t_0,\ t_0 \in \mathbb{R}$$

sont :

a) parallèles b) sécantes c) non coplanaires

6. La droite de représentation paramétrique $x = -4t$; $y = 1 + 3t$; $z = 2 + 2t$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan d'équation $x - 2y + 5z - 1 = 0$ sont :

a) orthogonaux b) parallèles c) ni orthogonaux ni parallèles

7. L'ensemble des points tels que $x - y + 2z - 1 = 0$ et $-2x + 4y - 4z + 1 = 0$ est :

a) l'ensemble vide b) une droite c) un plan

9. fonction trigo

1. Etudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos x + x$.

En déduire que l'équation $\cos x + x = 0$ a une unique solution. En donner une valeur approchée à 10^{-3} près.

2. On considère l'équation (E) $\sin x - \frac{x}{2} = 0$, x réel.

a. Montrer que toutes les solutions de cette équation appartiennent à l'intervalle $[-2 ; 2]$.

b. Donner, en le justifiant, le nombre de solutions de l'équation (E).

c. Donner une valeur approchée, à 10^{-3} près par défaut, de la plus grande solution.

10. distance point - plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Déterminer une équation du plan P passant par le point $A(1 ; 0 ; 1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Soit P_0 le plan d'équation $x + 2y - z + 1 = 0$ et M le point de coordonnées $(0 ; 1 ; 1)$.

a. Sachant que deux plans sont perpendiculaires si un vecteur non nul normal à l'un est orthogonal à un vecteur non nul normal à l'autre, démontrer que les plans P et P_0 sont perpendiculaires.

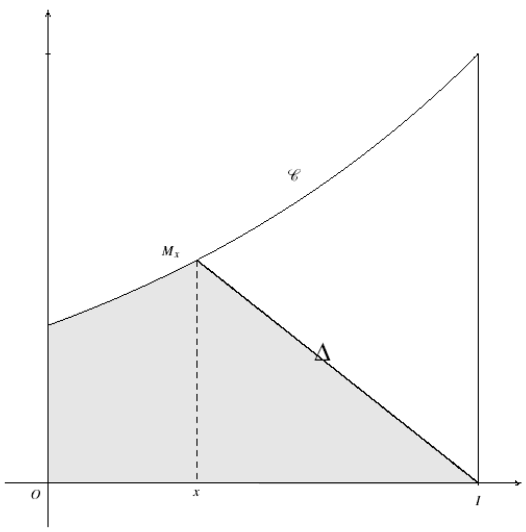
b. Calculer les distances d et d_0 du point M aux plans P et P_0 respectivement.

3. a. Donner une représentation paramétrique de la droite D intersection des plans P et P_0.

b. Déterminer les coordonnées du point H de D tel que la droite (MH) soit perpendiculaire à la droite D.

c. Vérifier que $MH^2 = d^2 + d_0^2$.

11. aire



Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On note I le point de coordonnées (1 ; 0).

Soient f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; 1] par $f(x)=e^{x-1}$ et C sa courbe représentative dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On note Δ la portion de plan comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Le but de l'exercice est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à l'intervalle [0 ; 1] tel que, si A est le point de C d'abscisse α, le segment $[IA]$ partage Δ en deux régions de même aire.

Pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on note M_x le point de coordonnées $(x, f(x))$ et T_x le domaine délimité par la droite (IM_x), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe C.

On désigne par $g(x)$ l'aire de T_x.

1. Pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], calculer $g(x)$ en fonction de x.

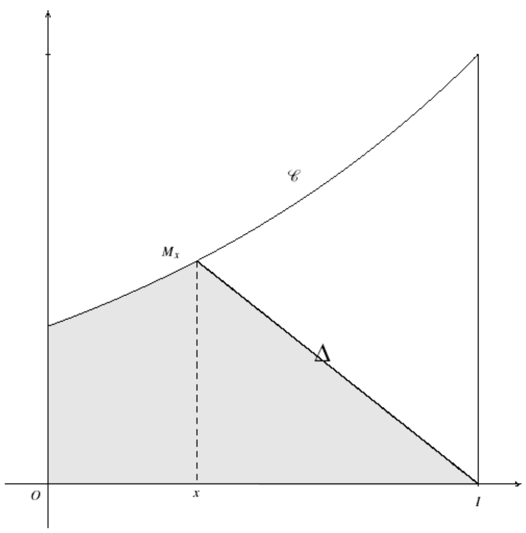
2. Etudier les variations de la fonction g sur [0 ; 1].

3. a. Par des considérations d'aires, montrer que $g(0)\le\frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt$.

b. Montrer qu'il existe un unique réel α de [0 ; 1] tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ.

4. Trouver une valeur approchée de α à 10^{-3} près par défaut.

12. aire



Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

On note I le point de coordonnées (1, 0).

Soient f une fonction positive, strictement croissante et dérivable sur [0 ; 1], C sa courbe représentative dans le repere $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ et Δ la portion de plan comprise entre C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Le but du problème est de prouver l'existence d'un unique réel α appartenant à l'intervalle [0 ; 1] tel que, si A est le point de C d'abscisse α, le segment $[IA]$ partage Δ en deux régions de même aire.

Pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], on note M_x le point de coordonnées $(x, f(x))$ et T_x le domaine délimité par la droite (IM_x), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la courbe C.

On désigne par F la fonction définie sur [0 ; 1] par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ et par $g(x)$ l'aire de T_x.

1. Exprimer, pour tout x appartenant à l'intervalle [0 ; 1], $g(x)$ en fonction de x, $f(x)$ et $F(x)$.

2. *Démonstration de cours*. Démontrer que F est dérivable et a pour dérivée f.

3. Etudier les variations de la fonction g sur [0, 1].

4. a. Par des considérations d'aires, montrer que $g(0) \leq \frac{1}{2}\int_0^1 f(t)dt$.

b. Montrer qu'il existe un unique réel α de [0 ; 1] tel que $g(\alpha)$ soit égal à la moitié de l'aire de Δ .

13. équa diff

A. Solutions d'une équation différentielle.

On considère l'équation différentielle : (A) $y' = -10y + 6$ où y désigne une fonction de la variable t, dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. *Démonstration de cours*. Démontrer l'existence et l'unicité de la solution f de l'équation différentielle (A) telle $f(0) = 0$.

2. Vérifier que la solution f de l'équation différentielle (A) telle que $f(0) = 0$ est $f : t \to \frac{3}{5}\left(1-e^{-10t}\right)$.

B. Etablissement d'un courant dans une bobine.

Aux bornes d'une bobine de résistance R (exprimée en ohms) et d'inductance L (exprimée en henrys), on branche, à la date $t = 0$, un générateur de force électromotrice E (exprimée en volts). L'unité de temps est la seconde.

L'intensité du courant dans le circuit (exprimée en ampères) est une fonction dérivable du temps, notée i. A la date $t = 0$ l'intensité est nulle.

Au cours de l'établissement du courant, la fonction i est solution de l'équation différentielle : Li' + Ri = E (ou $L\frac{di}{dt}+Ri=E$)

Valeurs numériques : dans toute la suite, on prend R = 5, L = $\frac{1}{2}$, E = 3.

1. Déduire des questions précédentes l'expression de $i(t)$ pour $t > 0$.

2. Déterminer $\lim_{t\to+\infty} i(t)$.

14. suite récurrente

Soit I l'intervalle [0 ; 1]. On considère la fonction f définie sur I par $f(x)=\frac{3x+2}{x+4}$.

1. Etudier les variations de f et en déduire que, pour tout x élément de I, $f(x)$ appartient à I.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1}=f(u_n)=\frac{3u_n+2}{u_n+4}$.

Montrer que, pour tout n, u_n appartient à I.

On se propose d'étudier la suite (u_n) par deux méthodes différentes.

Première méthode :

3. a. Représenter graphiquement f dans un repère orthonormal d'unité graphique 10 cm.

b. En utilisant le graphique précédent, placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1, u_2 et u_3.

Que suggère le graphique concernant le sens de variation de (u_n) et sa convergence ?

c. Etablir la relation $u_{n+1}-u_n=\frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ et en déduire le sens de variation de la suite (u_n).

d. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

e. Prouver que la limite l de la suite (u_n) vérifie $l = f(l)$ et calculer l.

Deuxième méthode :

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

4. a. Prouver que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$.

b. Calculer v_0 et exprimer v_n en fonction de n.

c. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n) et sa limite l.

15. géométrie espace

Dans l'espace muni du repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points :

$$A(2 ; 0 ; 0),\ B(-1 ; \sqrt{3} ; 0) \text{ et } C(-1 ; -\sqrt{3} ; 0)$$

1. Placer sur une figure les points A, B et C dans le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Montrer que le triangle ABC est équilatéral et que O est son centre.

3. a. Déterminer l'ensemble des points M de l'espace équidistants des points A et B.

b. Déterminer l'ensemble des points N de l'espace équidistants des points B et C.

c. En déduire que l'ensemble des points P de l'espace équidistants des points A, B et C est l'axe $(O ; \vec{k})$.

4. Montrer qu'il existe un unique point D dont la troisième coordonnée est positive tel que le tétraèdre $ABCD$ soit régulier et calculer ses coordonnées.

5. Soit M un point quelconque du segment $[CD]$. On pose $\overline{CM} = \lambda \overline{CD}$ avec $\lambda \in [0 ; 1]$.

a. Montrer que $\cos \widehat{AMB} = \dfrac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$.

On définit une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par la relation $f(\lambda) = \dfrac{2\lambda^2 - 2\lambda + 1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)} = 1 - \dfrac{1}{2(\lambda^2 - \lambda + 1)}$.

b. Etudier les variations de la fonction f.

c. En déduire la position de M pour laquelle l'angle $\widehat{AMB}$ est maximum.

d. Quelle est la valeur de ce maximum ?

16. suite récurrente

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans ! On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par $f(x) = kx(1 - x)$, k étant un paramètre qui dépend de l'environnement (k réel).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million.

L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0{,}3$.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_n + 1 = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1. Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite l vérifie la relation $f(l) = l$.

2. Supposons $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.

a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \le u_n \le 1$.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

3. Supposons maintenant $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.

a. Etudier les variations de la fonction f sur $[0 ; 1]$ et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0 ; \frac{1}{2}\right]$.

b. En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,

– montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le \frac{1}{2}$;

– établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

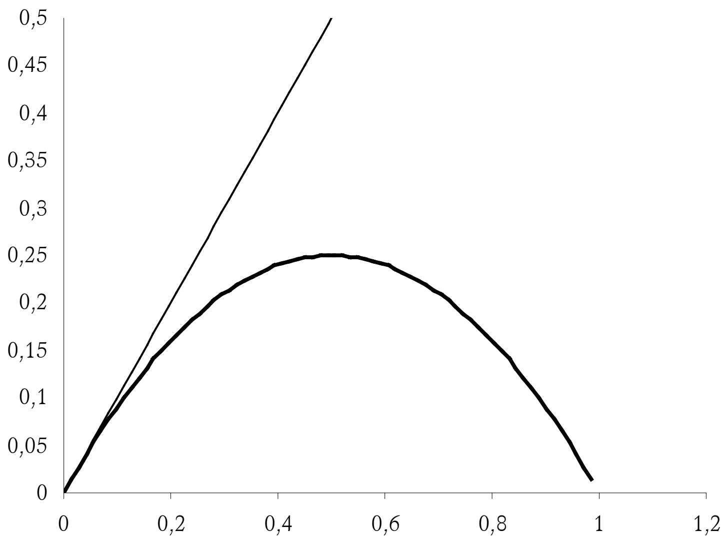
d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

4. On a représenté sur les feuilles annexes la fonction f dans les deux cas étudiés ci-dessus ainsi que la droite d'équation $y = x$. Le troisième graphique correspond au cas où $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.

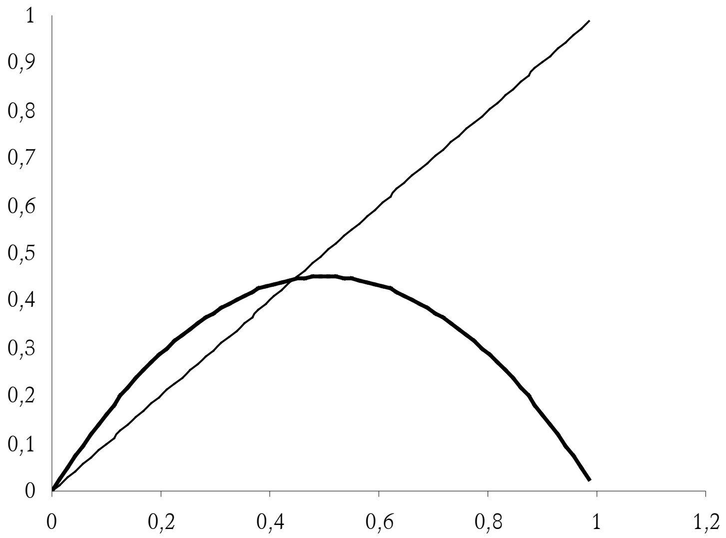
a. Illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en 1. et 2. en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives u_0, u_1, u_2,. . .

b. En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l'évolution de la population dans le troisième cas.

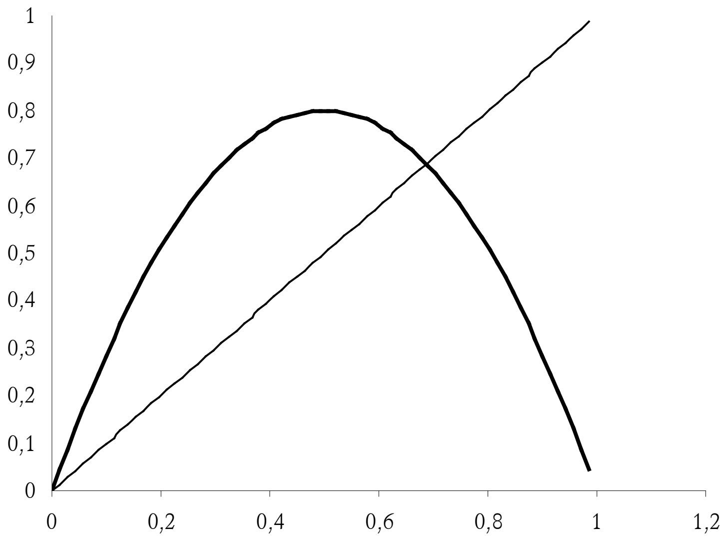
1er cas : $u_0 = 0{,}4$ et $k = 1$.



2e cas : $u_0 = 0{,}3$ et $k = 1{,}8$.



3e cas : $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.

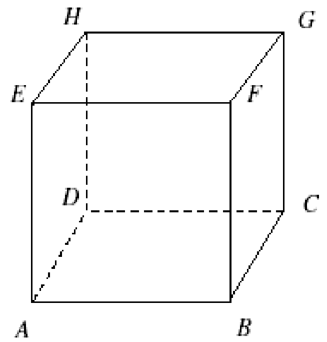


17. géométrie espace

Soit *ABCDEFGH* un cube de côté 1.

On choisit le repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, avec $\vec{i} = \overrightarrow{AB}, \vec{j} = \overrightarrow{AD}, \vec{k} = \overrightarrow{AE}$.

On appelle I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CD]$, $[DH]$, $[HE]$, $[EF]$ et $[FB]$.



1. Déterminer les coordonnées des points I, K, M.

2. Montrer que les six points I, J, K, L, M et N sont coplanaires, dans un plan que l'on notera P (on donnera une équation du plan P dans le repère choisi).

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est un vecteur normal au plan P.

4. Montrer que les projetés orthogonaux des points I, J, K, L, M et N

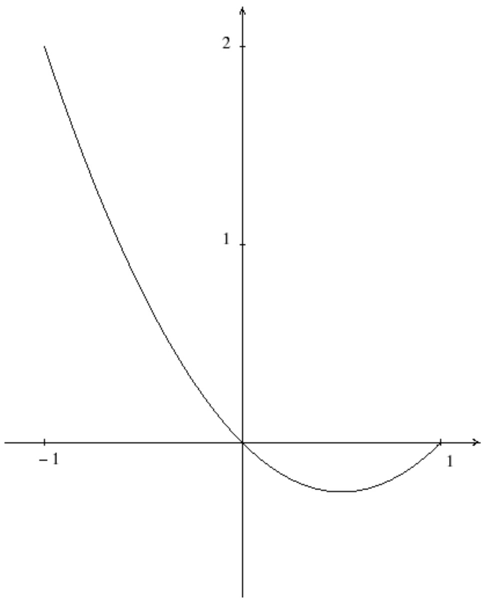
sur la droite (AG) sont confondus en un même point. On appellera T ce point.

Déterminer la position du point T sur le segment $[AG]$.

5. Montrer que $IJKLMN$ est un hexagone inscriptible dans un cercle dont on précisera le centre et le rayon et montrer que tous ses côtés ont même longueur.

6. On considère la pyramide ayant pour base cet hexagone et pour sommet le point G. Quelle fraction du volume du cube représente le volume de cette pyramide ?

18. courbe et intégrale



Les questions sont indépendantes. Il est demandé de justifier toutes les réponses fournies.

1. Dans chacun des cas suivants, proposer une fonction f qui vérifie les propriétés données. On donnera l'expression de $f(x)$.

a. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ae^{2x}+be^{x}+c$, la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ et l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions, 0 et ln 2.

b. f est définie sur $]0, +\infty[$, $f(2) = 4$ et, pour tout x et tout y réels strictement positifs, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

c. f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et la valeur moyenne de f sur $[-2, 2]$ est 0.

2. Soit g une fonction définie et dérivable, de dérivée g' continue sur $[-1, 1]$. La courbe représentative de g est donnée ci-contre.

Les affirmations suivantes sont-elles cohérentes avec le schéma :

a. $\int_0^1 g'(x)dx = 0$?

b. $\int_0^1 g(x)dx > -\frac{1}{2}$?

19. suites

Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM). Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question il y a deux conclusions correctes. Le candidat doit cocher **au plus deux cases** (celles qu'il juge correctes). Aucune justification n'est demandée.

A chaque question est affecté un certain nombre de points. Chaque réponse exacte rapporte la moitié des points affectés ; chaque réponse fausse enlève le quart des points affectés. Cocher trois cases ou plus à une question, ou n'en cocher aucune, rapporte zéro point à cette question.

Si, par application de ce barème, le total des points de l'exercice est négatif, il est ramené à zéro.

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) qui vérifient la propriété suivante :

« Pour tout entier naturel n strictement positif : $u_n \le v_n \le w_n$ ».

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors :

☐ la suite (u_n) est majorée

☐ La suite (w_n) tend vers $-\infty$

☐ la suite (u_n) tend vers $-\infty$

□ la suite (w_n) n'a pas de limite.

2. Si $u_n > 1$, $w_n = 2u_n$ et $\lim(u_n) = l$, alors :

□ $\lim (v_n) = l$

□ La suite (w_n) tend vers $+\infty$

□ $\lim (w_n - u_n) = l$

□ On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Si $\lim (u_n) = -2$ et $\lim (w_n) = 2$, alors :

□ La suite (v_n) est majorée

□ $\lim (v_n) = 0$

□ la suite (v_n) n'a pas de limite

□ On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

4. Si $u_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2 + 3}{n^2}$ alors :

□ $\lim (w_n) = 0$

□ $\lim (v_n) = 2$

□ $\lim (u_n) = 2$

□ la suite (v_n) n'a pas de limite.

20. exp+suite+intégrale

Partie A

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}e^{1-x}$. Elle est dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$. On note f' sa dérivée.

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. *Démonstration de cours*. Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \to \dfrac{e^x}{x}$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra pour cela justifier et exploiter l'écriture, pour tout x réel strictement positif, $f(x) = \dfrac{e}{\sqrt{x}}\dfrac{x}{e^x}$). Interpréter graphiquement le résultat.

3. Pour x élément de $]0, +\infty[$, calculer $f'(x)$.

4. Déduire des questions précédentes le tableau de variation de f.

5. Tracer la courbe C (unité graphique : 2 cm).

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(t)dt$.

1. Interpréter géométriquement u_n.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $f(n+1) \le u_n \le f(n)$.

3. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

4. Prouver la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Partie C

On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur $[1, +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)dt$

1. a. Montrer que F est dérivable sur $[1, +\infty[$ et calculer $F'(x)$.

b. En déduire le sens de variation de F.

2. a. Démontrer que, pour tout réel t positif, $t + 2 > 2\sqrt{2}\sqrt{t}$.

b. En déduire que, pour tout x de l'intervalle $[1, +\infty[$, $F(x) \le \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\displaystyle\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt$.

c. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout x appartenant à $[1, +\infty[$, $\int_1^x (t+2)e^{1-t}dt = 4-(x+3)e^{1-x}$.

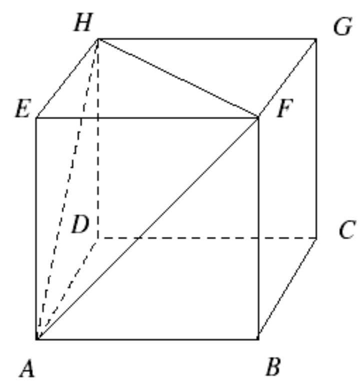
d. En déduire que, pour tout x appartenant à $[1, +\infty[$, $0 \le F(x) \le \sqrt{2}$.

3. On note, pour tout entier naturel n non nul, S_n la somme des $n-1$ premiers termes de la suite (u_n). Exprimer S_n à l'aide d'une intégrale. Montrer que la suite (S_n) converge et donner un encadrement de sa limite.

21. géométrie espace

On considère un cube *ABCDEFGH*, d'arête de longueur a (a réel strictement positif).

Soit I le point d'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH).



1. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires suivants : $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AF}$.

2. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux.

On admettra de même que les vecteurs $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux.

3. En déduire que le point I est le projeté orthogonal de E sur le plan (AFH).

4. a. Justifier les résultats suivants : les droites (AF) et (EH) sont orthogonales, ainsi que les droites (AF) et (EI).

b. En déduire que la droite (AF) est orthogonale à la droite (HI).

c. Etablir de même que la droite (AH) est orthogonale à la droite (FI).

5. Que représente le point I pour le triangle AFH ?

22. géométrie espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points A, B, C et S de coordonnées respectives :

$$A(-1, 0, 1) ; B(1, 4, -1) ; C(3, -4, -3) ; S(4, 0, 4).$$

1. Démontrer que le triangle ABC est un triangle rectangle en A.

2. a. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

3. a. Démontrer que O est le barycentre des points A, B, C affectés de coefficients que l'on déterminera.

b. En déduire que O est situé dans le triangle ABC.

4. Calculer le volume V du tétraèdre $SABC$.

23. équa diff (corrigé)

On se propose d'étudier les fonctions f dérivables sur $[0 ; +\infty[$ vérifiant la condition

$$(1) \begin{cases} \text{pour tout } x \in [0 ; +\infty[\; f(x)f'(x) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Partie A

On suppose qu'il existe une fonction f qui vérifie (1).

La méthode d'Euler permet de construire une suite de points (M_n) proches de la courbe représentative de la fonction f. On choisit le pas $h = 0,1$.

On admet que les coordonnées $(x_n,\ y_n)$ des points M_n obtenus en appliquant cette méthode avec ce pas vérifient :

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases} et \begin{cases} x_{n+1} = x_n + 0,1 \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{0,1}{y_n} \end{cases} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Calculer les coordonnées des points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 (on arrondira au millième les valeurs trouvées).

Partie B

On se propose de démontrer qu'une fonction vérifiant (1) est nécessairement strictement positive sur $[0\ ;+\infty[$.

1. Montrer que si la fonction f vérifie (1) alors f ne s'annule pas sur $[0\ ;+\infty[$.

2. On suppose que la fonction f vérifie la condition (1) et qu'il existe un réel a strictement positif tel que $f(a) < 0$.

En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0\ ; a]$.

3. Conclure.

Partie C : Existence et unicité de la fonction f.

1. Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Déterminer une primitive de la fonction uu' sur cet intervalle.

2. En déduire que si f est telle que, pour tout x de $[0\ ;+\infty[$, $f(x)f'(x) = 1$ alors il existe une constante C telle que :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0\ ;+\infty[,\ (f(x))^2 = 2x + C.$$

3. On rappelle que $f(0) = 1$. Déterminer l'expression de $f(x)$ pour x réel positif.

4. En déduire les valeurs arrondies au millième de $f(0,1)$, $f(0,2)$, $f(0,3)$, $f(0,4)$, $f(0,5)$, puis les comparer avec les valeurs obtenues par la méthode d'Euler.

Correction

Partie A

$M_0(0,1)$, $M_1(0+0,1\ ;1+\dfrac{0,1}{1})=(0,1\ ;1,1)$, etc. Le mieux est d'utiliser Excel :

n	x_n	y_n	$f(x)$
0	0	1	1
1	0,1	1,1	1,09544512
2	0,2	1,19090909	1,18321596
3	0,3	1,27487856	1,26491106
4	0,4	1,3533174	1,34164079
5	0,5	1,4272099	1,41421356
6	0,6	1,49727667	1,4832397
7	0,7	1,5640646	1,54919334
8	0,8	1,62800058	1,61245155
9	0,9	1,68942562	1,67332005
10	1	1,74861733	1,73205081
11	1,1	1,80580537	1,78885438
12	1,2	1,86118233	1,84390889
13	1,3	1,91491161	1,8973666

Partie B

1. Si la fonction f vérifie (1) alors $f(x)f'(x)=1$; si f s'annule sur $[0\ ;+\infty[$, alors il y aura une valeur a de x pour laquelle $f(a)f'(a)=0$, ce qui est impossible.

2. f est continue, et il y a un a tel que $f(a) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que comme on a $f(0) = 1$ et $f(a) < 0$, il doit exister une valeur de x entre 0 et a telle que f s'annule.

3. Comme f ne s'annule pas, elle a un signe constant, soit celui de $f(0)$; elle est donc positive.

Partie C

1. Une primitive de la fonction uu' est $\frac{1}{2}u^2$ ou $\frac{1}{2}u^2+\text{constante}$.

2. On intègre donc $f(x)f'(x) = 1$, ce qui donne $\frac{1}{2}[f(x)]^2=x+K$, soit $[f(x)]^2=2x+C$.

3. $f(0) = 1$ donne $[f(0)]^2=1=2.0+C\Rightarrow C=1\Rightarrow f(x)^2=2x+1\Rightarrow f(x)=\pm\sqrt{2x+1}$.

Comme f est positive, on prend la racine positive, soit $f(x)=\sqrt{2x+1}$.

4. Les valeurs calculées ont été mises dans le tableau.

24. complexes (corrigé)

PREMIERE PARTIE

On note j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. Montrer les propriétés suivantes de j :

(a) $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $j^3 = 1$

(c) $1 + j + j^2 = 0$ (d) $-j^2=e^{\frac{i\pi}{3}}$.

2. Dans un repère orthonormal direct du plan, on considère les points M, N, P d'affixes respectives m, n, p.

a. Montrer que, si le triangle MNP est équilatéral direct, alors $m - n = -j^2(p - n)$.

b. Etablir la propriété suivante :

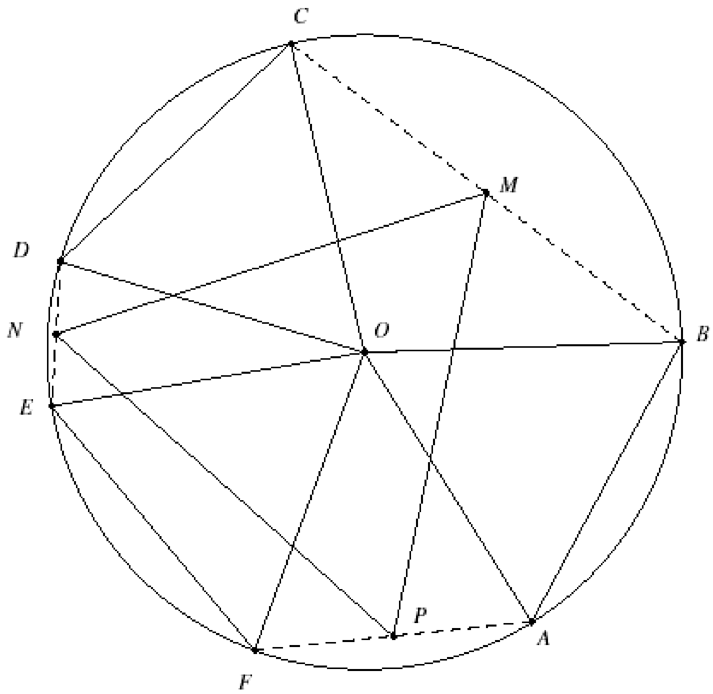
Le triangle MNP est équilatéral direct si, et seulement si, $m + nj + pj^2 = 0$.

DEUXIEME PARTIE

On considère un cercle du plan de centre O et des points A, B, C, D, E, F de ce cercle tels que les angles $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OD})$, $(\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OF})$ aient la même mesure $\frac{\pi}{3}$.

Soit M, N, P les milieux respectifs des cordes $[BC]$, $[DE]$, $[FA]$.

Montrer que le triangle MNP est équilatéral direct.



Correction

PREMIERE PARTIE

1. (a) $j=e^{\frac{2i\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; (b) $j^3=\left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^3=e^{i2\pi}=1$;

(c) $\left(1+j+j^2\right)\left(1-j\right)=1-j^3=1-1=0\Rightarrow 1+j+j^2=0$; (d) $-j^2=e^{-i\pi}e^{\frac{i4\pi}{3}}=e^{i\frac{\pi}{3}}$.

2. a. Si le triangle *MNP* est équilatéral direct, alors M est l'image de P par la rotation de centre centre BN et d'angle $\frac{\pi}{3}$: $m-n=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(p-n\right)\Leftrightarrow m-n=-j^2\left(p-n\right)$.

b. Il faut donc établir la réciproque : si $m+nj+pj^2=0$ alors le triangle *MNP* est équilatéral direct. Or on a $1+j+j^2=0\Leftrightarrow j=-1-j^2$ d'où $m+nj+pj^2=0\Leftrightarrow m+n\left(-1-j^2\right)+pj^2=0\Leftrightarrow m-n=-j^2\left(p-n\right)$, ce qui correspond bien à un triangle équilatéral direct.

DEUXIEME PARTIE

Prenons *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* les affixes de *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F*, alors $b=e^{i\frac{\pi}{3}}a=-j^2a,\ d=e^{i\frac{\pi}{3}}c=-j^2c,\ f=e^{i\frac{\pi}{3}}e=-j^2e$. Les points *M*, *N*, *P* ont alors pour affixes $m=\frac{b+c}{2}=\frac{-aj^2+c}{2},\ n=\frac{d+e}{2}=\frac{-cj^2+e}{2},\ p=\frac{f+a}{2}=\frac{-ej^2+a}{2}$. Calculons alors :

$$m+nj+pj^2=\frac{c-aj^2}{2}+j\frac{e-cj^2}{2}+j^2\frac{a-ej^2}{2}=\frac{c-aj^2+ej-cj^3+aj^2-ej^4}{2}=\frac{c-aj^2+ej-c+aj^2-ej}{2}=0.$$

C'est bon.

25. probabilité continue

Un quincaillier achète des ampoules à trois fournisseurs dans les proportions suivantes : 20 % au premier fournisseur, 50 % au deuxième fournisseur et 30 % au troisième fournisseur.

Le premier fournisseur fabrique 97 % d'ampoules sans défaut, le deuxième fournisseur fabrique 98 % d'ampoules sans défaut, le troisième fournisseur fabrique 95 % d'ampoules sans défaut.

1. On choisit une ampoule au hasard dans le stock. On note

D l'événement « l'ampoule est défectueuse »,

F_1 l'événement « l'ampoule provient du premier fournisseur »,

F_2 l'événement « l'ampoule provient du deuxième fournisseur » et

F_3 l'événement « l'ampoule provient du troisième fournisseur ».

a. Calculer la probabilité de l'événement D, notée P(D).

b. Sachant que l'ampoule choisie est défectueuse, quelle est la probabilité P_D(F1) qu'elle provienne du premier fournisseur ?

Donner la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-3} près de P_D(F1).

2. On suppose que la probabilité qu'une ampoule soit sans défaut est de 0,969.

On monte 12 ampoules sur un lustre. Calculer la probabilité *R* qu'une ampoule au plus soit défectueuse. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près de *R*.

3. La durée de vie en heures d'une ampoule, notée *T*, suit une loi de durée de vie sans vieillissement (ou loi exponentielle) de paramètre λ = 1/50 000 = 2.10^{-5}.

Selon cette loi, pour tout *x* de [0 ; $+\infty$[, $P(T\le x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda t}dt$.

a. Quelle est la probabilité P_1 qu'une ampoule dure plus de 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_1.

b. Quelle est la probabilité P_2 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_2.

c. Quelle est la probabilité P_3 qu'une ampoule dure plus de 50 000 heures, sachant qu'elle a déjà duré 25 000 heures ? Donner la valeur exacte de P_3.

26. géométrie espace

L'espace est rapporté à un repère orthonormal repère orthonormé repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On étudie le tétraèdre *OABC*, où les points *A*, *B* et *C* sont définis par leurs coordonnées : $A(0, 0, 2)$, $B(\sqrt{3}, 1, 0)$ et $C(\sqrt{3}, -1, 0)$.

Partie A. Géométrie analytique dans un tétraèdre

1. a. Faire une figure représentant le repère et le tétraèdre.

b. Déterminer la nature géométrique et calculer les dimensions de chacune des faces du tétraèdre.

2. On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(2, 0, \sqrt{3})$.

a. Vérifier que le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (*ABC*).

b. En déduire une équation du plan (*ABC*).

Partie B. étude d'une section plane

Soit *J* le milieu de l'arête [*BC*]. Le point *N* est un point mobile du segment [*OJ*]. On appelle (P) le plan passant par le point *N* et orthogonal à la droite (*OJ*).

1. On pose $t = ON$. Vérifier que t appartient à l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$.

2. On se propose de déterminer la nature de la section plane du tétraèdre *OABC* par le plan (P). Le plan (P) coupe :

– l'arête [*OC*] au point *R* ;
– l'arête [*AC*] au point *S* ;
– l'arête [*AB*] au point *T* ;
– l'arête [*OB*] au point *U*.

a. Démontrer que les droites (*ST*), (*BC*) et (*RU*) sont parallèles. Démontrer que les droites (*RS*), (*OA*) et (*TU*) sont parallèles.

b. Démontrer que le quadrilatère *RSTU* est un rectangle.

c. Déterminer avec soin les dimensions du rectangle *RSTU* en fonction du nombre réel *t* (on précisera en particulier les différents triangles dans lesquels sont menés les calculs).

3. a. Soit $S(t)$ l'aire de la section plane définie à la question B. 2. Démontrer que $S(t)=\frac{4}{3}t(\sqrt{3}-t)$.

b. étudier les variations de la fonction *S*, définie sur l'intervalle $[0, \sqrt{3}]$ par $S(t)$.

c. Pour quelle valeur du nombre réel *t* l'aire $S(t)$ est-elle maximale ? Quelle est alors la nature géométrique particulière de la section plane étudiée ?

4. a. On rappelle que le volume *V* du tétraèdre *OABC* est égal à l'intégrale $\int_0^{\sqrt{3}} S(t)dt$. Calculer *V* par cette méthode.

b. Calculer *V* en utilisant l'aire d'une face et la hauteur correspondante du tétraèdre.

c. Vérifier la cohérence des deux résultats.

27. adéquation à une loi équirépartie (commun avec ES)

Un meunier a besoin, pour sa farine, d'un mélange de quatre variétés différentes de grains de blé, d'égales quantités chacunes et notées 1, 2, 3, 4.

1. Il veut savoir si, dans son silo, les différentes variétés sont bien mélangées. Pour cela, il prélève, à la sortie du silo, un échantillon de 100 grains de blé rendus radioactifs par des marqueurs différents selon les variétés. Il obtient les résultats suivants :

Variété	1	2	3	4
Nombre de grains radioactifs	18	27	35	20

Le meunier veut savoir si ces données sont vraisemblables lorsqu'on fait l'hypothèse d'un mélange homogène des quatre variétés, ce qui correspond à un quart des marqueurs pour chaque variété.

On appelle f_i la fréquence dans l'échantillon de la variéte i et on pose $d^2 = 400\sum_{i=1}^{4}\left(f_i - \frac{1}{4}\right)^2$.

Calculer la valeur de d^2.

2. On suppose l'équiprobabilité de la présence d'un grain de blé de chaque variété et on simule 10 000 séries de 100 tirages de grains de blé.

Pour chaque série de 100 tirages, on calcule d^2. Le tableau suivant donne le nombre de séries pour lesquelles la valeur de d^2 est strictement supérieure à l'entier j :

j	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre des séries pour lesquelles $d^2 > j$	3915	2618	1715	1114	728	467	306	180

Lire la valeur du 9e décile, arrondie à l'entier le plus proche, puis celle du 95e centile.

3. Si l'hypothèse d'équiprobabilité est vraie :

a. Peut-on affirmer avec un risque d'erreur de 10 % que le mélange étudié à la question 1. est homogène ?

b. Même question avec un risque d'erreur de 5 %.

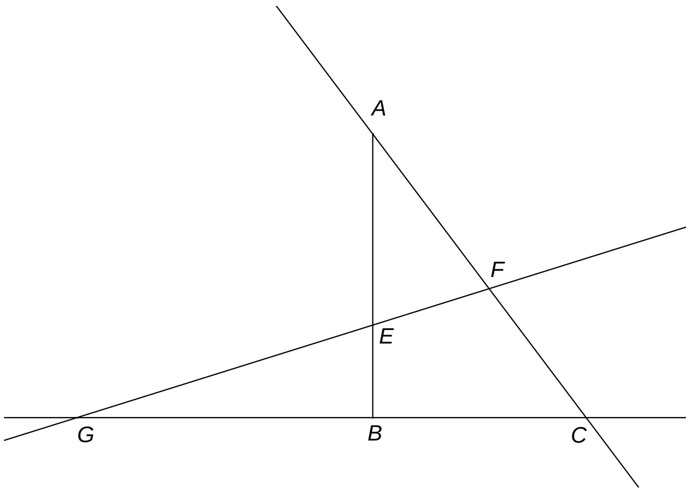
c. Que peut-on dire si quelqu'un demande un risque d'erreur de 0 % ?

Note personnelle : il vaut mieux changer les données du tableau si on le donne aux élèves…

28. spécialité - géométrie

PARTIE I

Soit ABC un triangle rectangle en B, direct : $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}$. Soit E un point du segment $[AB]$. Par le point E on mène une droite d qui coupe le segment $[AC]$ en un point F et la droite (BC) en un point G (voir figure ci-contre). On suppose que les points E, F, G sont distincts des points A, B, C.



Le cercle Γ circonscrit au triangle ABC et le cercle Γ' circonscrit au triangle BEG se coupent en deux points distincts B et K.

1. Justifier l'existence d'une similitude plane directe S telle que S(A) = C et S(E) = G.

Déterminer l'angle de S.

2. Soit Ω le centre de S.

a. Montrer que Ω appartient aux cercles Γ et Γ'.

b. Prouver que Ω est différent de B.

c. Que peut-on en déduire pour Ω ?

PARTIE II

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2 cm. Les affixes respectives des points A, B, C, E, F et G sont données par :

$$z_A = 2 + 4\mathrm{i}\,,\ z_B = -1 - 2\mathrm{i}\,,\ z_C = 3 - 4\mathrm{i}\,,\ z_E = 0,\ z_F = \frac{5}{2},\ z_G = -5.$$

On admettra que le point F est le point d'intersection du segment $[AC]$ et de la droite (GE) et que les conditions de la partie I sont vérifiées.

1. Placer ces points sur une figure et, à l'aide des résultats de la partie I, construire le point Ω, centre de la similitude S.

2. Soit S' la similitude plane directe telle que S'$(A) = E$ et S'$(C) = G$. Déterminer l'écriture complexe de S' et déterminer l'affixe du centre Ω' de S'.

3. Montrer que les points Ω et Ω' sont confondus.

29. spécialité - arithmétique

L'exercice propose cinq affirmations numérotées de 1 à 5.

Pour chacune de ces affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Si un nombre est divisible par 4, alors il est divisible par 8.

2. Si un nombre est divisible par 2 et par 3, alors il est divisible par 6.

3. Si un nombre est divisible par 4 et par 6, alors il est divisible par 24.

4. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $a + b$ et $a - b$ sont premiers entre eux.

5. Si deux entiers a et b sont premiers entre eux, alors les entiers $2a + b$ et $3a + 2b$ sont premiers entre eux.

30. spécialité - arithmétique, codage

Cet exercice, trop long pour un exercice de spécialité, est présenté dans son intégralité pour respecter sa cohérence ainsi que le travail de l'auteur.

1. a. Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que $7u - 13v = 1$.

b. En déduire deux entiers relatifs u_0 et v_0 tels que $14u_0 - 26v_0 = 4$.

c. Déterminer tous les couples (a, k) d'entiers relatifs tels que $14a - 26k = 4$.

2. On considère deux entiers naturels a et b. Pour tout entier n, on note $\varphi(n)$ le reste de la division euclidienne de $an + b$ par 26.

On décide de coder un message, en procédant comme suit : à chaque lettre de l'alphabet on associe un entier compris entre 0 et 25, selon le tableau :

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Nombre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Nombre	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Pour chaque lettre α du message, on détermine l'entier n associé puis on calcule $\varphi(n)$. La lettre α est alors codée par la lettre associée à φ(n).

On ne connaît pas les entiers a et b, mais on sait que la lettre F est codée par la lettre K et la lettre T est codée par la lettre O.

a. Montrer que les entiers a et b sont tels que : $\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}$.

b. En déduire qu'il existe un entier k tel que $14a - 26k = 4$.

c. Déterminer tous les couples d'entiers (a, b), avec $0 \leq a \leq 25$ et $0 \leq b \leq 25$, tels que

$$\begin{cases} 5a+b=10 \text{ modulo } 26 \\ 19a+b=14 \text{ modulo } 26 \end{cases}.$$

3. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Coder le message « GAUSS ».

b. Soit n et p deux entiers naturels quelconques. Montrer que, si $\varphi(n) = \varphi(p)$, alors $17(n - p) = 0$ modulo 26.

En déduire que deux lettres distinctes de l'alphabet sont codées par deux lettres distinctes.

4. On suppose que $a = 17$ et $b = 3$.

a. Soit n un entier naturel. Calculer le reste de la division euclidienne de $23\varphi(n) + 9 - n$ par 26.

b. En déduire un procédé de décodage.

c. En déduire le décodage du message « KTGZDO ».

31. spécialité - arithmétique

Des nombres étranges (part one)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens.

Cet exercice propose d'en découvrir quelques-unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1.

Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, …

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. A quelle condition sur k le nombre 3 apparaît-il dans la décomposition du rep-unit N_k ? Justifier brièvement la réponse.

3. Pour $k > 1$, le rep-unit N_k est défini par $N_k = \sum_{i=0}^{k-1} 10^i = 1+10+100+...+10^{k-1}$.

Justifier l'égalité : $9N_k = 10^k - 1$ pour tout entier $k > 1$.

4. Le tableau ci-dessous donne les restes de la division par 7 de 10^k, pour k entier compris entre 1 et 8.

k	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division de 10^k par 7	3	2	6	4	5	1	3	2

Soit k un entier strictement positif. Démontrer que : « $10^k \equiv 1(7)$ » équivaut à « k est multiple de 6 ».

En déduire que 7 divise N_k si et seulement si k est multiple de 6.

32. spécialité - arithmétique

Des nombres étranges (part two)!

Les nombres 1 ; 11 ; 111 ; 1111 ; etc. sont des nombres que l'on appelle rep-units (répétition de l'unité). Ils ne s'écrivent qu'avec des chiffres 1. Ces nombres possèdent de nombreuses propriétés qui passionnent des mathématiciens. Cet exercice propose d'en découvrir quelques unes.

Pour k entier strictement positif, on note N_k le rep-unit qui s'écrit à l'aide de k chiffres 1. Ainsi $N_1 = 1$, $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, …

1. Citer deux nombres premiers inférieurs à 10 n'apparaissant jamais dans la décomposition d'un rep-unit. Justifier brièvement la réponse.

2. Donner la décomposition en facteurs premiers de N_3, N_4 et N_5.

3. Soit n un entier strictement supérieur à 1. On suppose que l'écriture décimale de n^2 se termine par le chiffre 1.

a. Montrer que, dans son écriture décimale, n se termine lui-même par 1 ou par 9.

b. Montrer qu'il existe un entier m tel que n s'écrive sous la forme $10m + 1$ ou $10m - 1$.

c. En déduire que $n^2 \equiv 1(20)$.

4. a. Soit $k > 2$. Quel est le reste de la division de N_k par 20 ?

b. En déduire qu'un rep-unit distinct de 1 n'est pas un carré.