France

1. Exercice 1

4 points

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix de vente des appartements anciens à Paris au quatrième trimestre des années 2000 à 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice : y_i	100	108,5	120,7	134,9	154,8	176,4	193,5	213,6

Source : INSEE

1. Calculer le pourcentage d'augmentation de cet indice de l'année 2000 à l'année 2007.

2. Construire le nuage de points $M_i\left(x_i\ ; y_i\right)$ dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal défini de la manière suivante :

- sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour représenter une année.
- sur l'axe des ordonnées, on placera 100 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 10 unités.

3. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer le point G dans le plan (P).

4. L'allure de ce nuage permet de penser qu'un ajustement affine est adapté.

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite (d) d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.

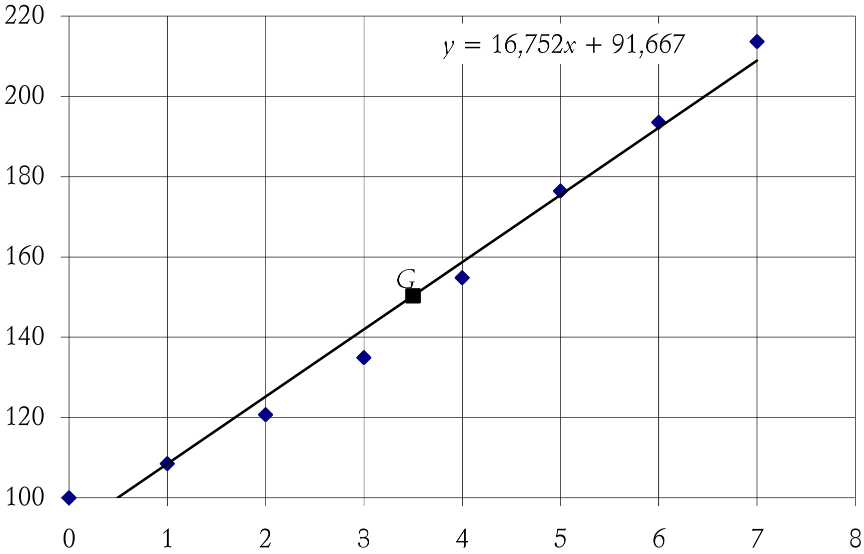
b. Tracer la droite (d) dans le plan (P).

5. En supposant que cet ajustement affine reste valable pour les deux années suivantes, estimer l'indice du prix de vente des appartements anciens de Paris au quatrième trimestre 2009. Justifier la réponse.

Correction

1. =(213,6–100)*100/100=113,6 %.

2. $=16,75x+91,67$.



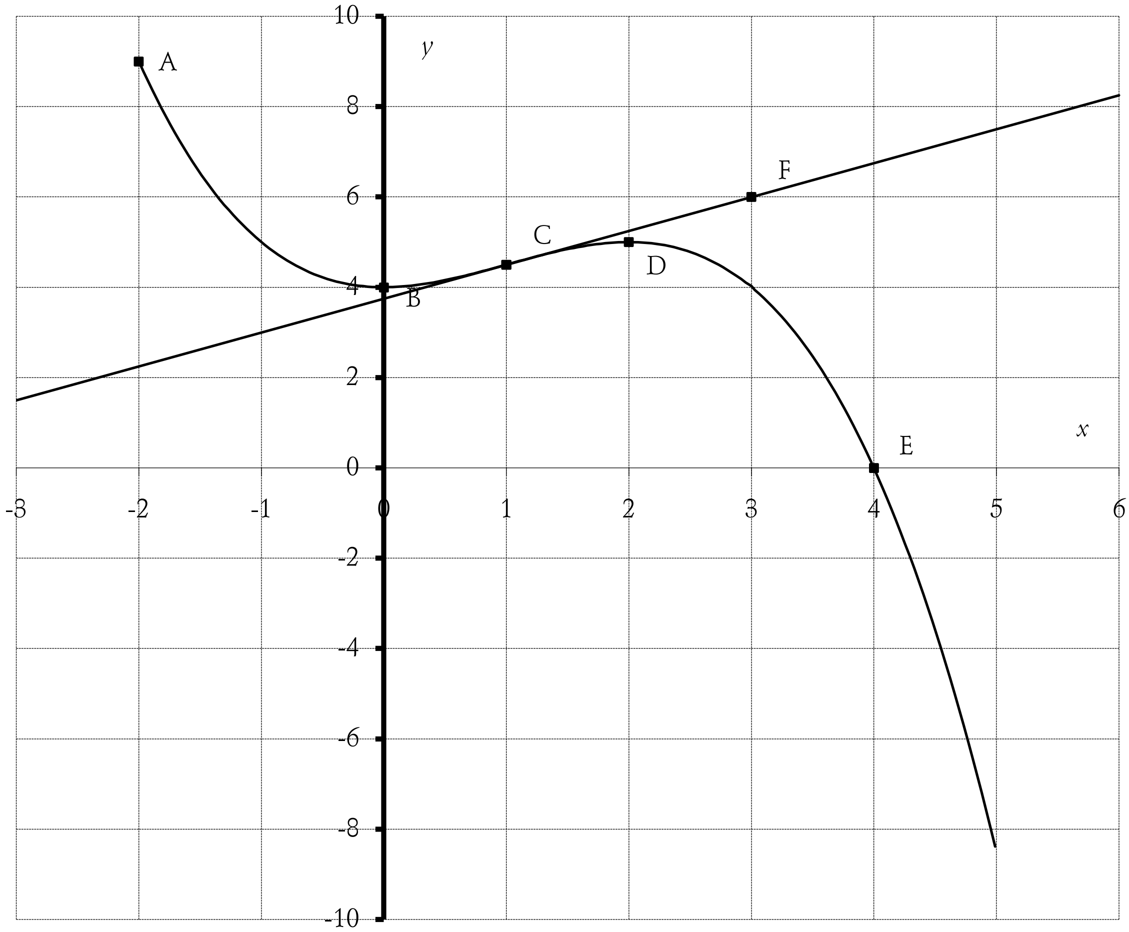
3. G apour coordonnées (3,5 ; 105,3).

4. a & b. Voir la figure.

5. Pour $x=9$, on a $y=16,75\times 9+91,67=242,44$.

2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points



Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle [–2 ; 5], décroissante sur chacun des intervalles [–2 ; 0] et [2 ; 5] et croissante sur l'intervalle [0 ; 2].

On note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle [–2 ; 5].

La courbe (Γ) représentative de la fonction f est tracée ci-dessus dans le plan muni d'un repère orthogonal. Elle passe par les points $A(-2\ ;\ 9)$, $B(0\ ;\ 4)$, $C(1\ ;\ 4{,}5)$, $D(2\ ;\ 5)$ et $E(4\ ;\ 0)$.

En chacun des points B et D la tangente à la courbe (Γ) est parallèle à l'axe des abscisses. On note F le point de coordonnées (3 ; 6). La droite (CF) est la tangente à la courbe (Γ) au point C.

1. À l'aide des informations précédentes et de la figure, préciser sans justifier :

a. les valeurs de $f(0)$, $f'(1)$ et $f'(2)$;

b. le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle [–2 ; 5] ;

c. le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x de l'intervalle [–2 ; 5].

2. On considère la fonction g définie par $g(x)=\ln\left(f(x)\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a. Expliquer pourquoi la fonction g est définie sur l'intervalle [–2 ; 4[.

b. Calculer $g(-2)$, $g(0)$ et $g(2)$.

c. Préciser, en le justifiant, le sens de variations de la fonction g sur l'intervalle [–2 ; 4[.

d. Déterminer la limite de la fonction g lorsque x tend vers 4.

Interpréter ce résultat pour la représentation graphique de la fonction g.

e. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Correction

1. a. $f(0)=4$ (ordonnée de B), $f'(1)=\dfrac{y_F-y_C}{x_F-x_C}=\dfrac{6-4,5}{3-1}=0,75$ (pente de la droite FC), $f'(2)=0$ (tangente horizontale en D) ;

b. $f'(x)$ est négatif pour $-2\le x\le 0$ puis pour $2\le x\le 5$ et positif si $0\le x\le 2$;

c. $f(x)$ est positif pour $-2\le x\le 4$ (la courbe est au-dessus de l'axe Ox) et négatif après 4.

2. On considère la fonction g définie par $g(x)=\ln(f(x))$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

a. Pour que g existe, f doit être strictement positive, donc x appartient à l'intervalle $[-2 ; 4[$.

b. $g(-2)=\ln f(-2)=\ln 9=\ln 3^2=3\ln 2$, $g(0)=\ln f(0)=\ln 4=2\ln 2$ et $g(2)=\ln f(2)=\ln 5$.

c. $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ est du signe de f' puisque f est >0. Donc mêmes variations que f sur cet intervalle.

d. Lorsque x tend vers 4, f tend vers 0 en restant positif, donc g tend vers $-\infty$. Il y a une asymptote vertivcale en 4.

e. Dresser le tableau de variations de la fonction g.

x	-2		0		2		4
$g(x)$	$3\ln 2$	↘	$2\ln 2$	↗	$\ln 5$	↘	$-\infty$

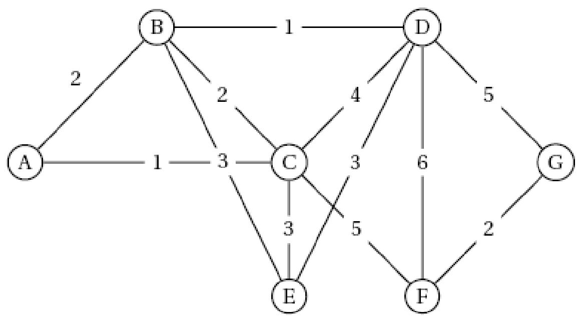
3. *Exercice 2 (spécialistes)*

5 points

Le graphe ci-contre représente le plan d'une ville.

Le sommet A désigne l'emplacement des services techniques.

Les sommets B, C, D, E, F et G désignent les emplacements de jardins publics. Une arête représente l'avenue reliant deux emplacements et est pondérée par le nombre de feux tricolores situés sur le trajet.



Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

On s'intéresse au graphe non pondéré.

1. Répondre sans justification aux quatre questions suivantes :

a. Ce graphe est-il connexe ?

b. Ce graphe est-il complet ?

c. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ?

d. Ce graphe admet-il un cyle eulérien?

2. Déterminer, en justifiant, le nombre chromatique de ce graphe.

Partie II

On s'intéresse au graphe pondéré. Proposer un trajet comportant un minimum de feux tricolores reliant A à G. La réponse sera justifiée par un algorithme.

Correction

Partie I

1.a. Oui b. Non c. Oui d. Non

2. CDEF est un sous-graphe complet d'ordre 4. Le nombre chromatique est donc supérieur ou égal à 4. On trouve une coloration avec 4 couleurs, par exemple

Première couleur C et G, Deuxième couleur : D et A, Troisième couleur : F et B, Quatrième couleur : E. Le nombre chromatique est donc 4.

Partie II

L'algorithme de Djikstra donne comme chemin le plus court ACEFG avec 7 feux.

4. Exercice 3

5 points

Une salle de jeu comporte deux consoles identiques proposant le même jeu.

Un jour l'une des deux est déréglée.

Les joueurs ne peuvent savoir laquelle des deux est déréglée.

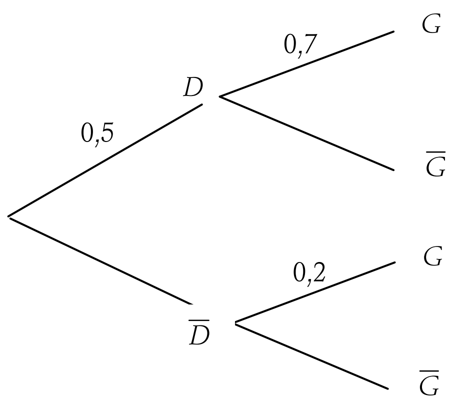
1. Ce jour-là, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et il joue une partie sur cette console.

On note :

D l'évènement « le joueur choisit la console déréglée » et $\overline{D}$ l'évènement contraire ;

G l'évènement « le joueur gagne la partie » et $\overline{G}$ l'évènement contraire.

Cette situation aléatoire est modélisée par l'arbre incomplet suivant, dans lequel figurent certaines probabilités.



Ainsi, 0,7 est la probabilité que le joueur gagne sachant qu'il a choisi une console déréglée.

a. Reproduire cet arbre sur la copie et le compléter.

b. Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur choisit la console déréglée et il gagne ».

c. Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur choisit la console non déréglée et il gagne ».

d. Montrer que la probabilité que le joueur gagne est égale à 0,45.

e. Calculer la probabilité que le joueur ait choisit la console déréglée sachant qu'il a gagné.

2. Trois fois successivement et de façon indépendante, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et joue une partie.

Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur gagne exactement deux fois ». Le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au millième.

Correction

b. « le joueur choisit la console déréglée et il gagne » est l'événement $D\cap G$, sa probabilité est

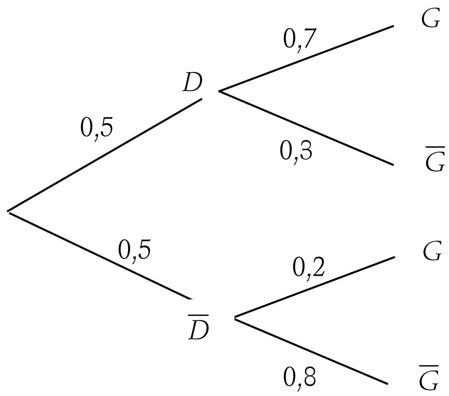
$p(D\cap G)=p(D)\times p_D(G)=0{,}5\times 0{,}7=0{,}35$.

c. « le joueur choisit la console non déréglée et il gagne ».

$p(\overline{D}\cap G)=p(\overline{D})\times p_{\overline{D}}(G)=0{,}5\times 0{,}2=0{,}1$.

d. $p(G)=p(\overline{D}\cap G)+p(D\cap G)=0{,}35+0{,}10=0{,}45$.

e. $p_G(D)=\dfrac{p(D\cap G)}{p(G)}=\dfrac{0{,}35}{0{,}45}=\dfrac{7}{9}$.



2. Schéma de Bernoulli avec $n=3$ et $p=0{,}45$. $p(X=2)=\binom{3}{2}\times 0{,}45^2\times 0{,}55\approx 0{,}334$.

5. Exercice 4

6 points

Partie A : Etude d'une fonction

On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle [0,5 ; 8] par $f(x)=20(x-1)e^{-0{,}5x}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur l'intervalle [0,5 ; 8].

1. a. Démontrer que pour tout nombre réel *x* de l'intervalle [0,5 ; 8], $f'(x)=10(-x+3)e^{-0{,}5x}$.

b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle [0,5 ; 8] et en déduire le tableau de variations de la fonction *f*.

2. Construire la courbe représentative (C) de la fonction *f* dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm sur l'axe des ordonnées.

3. Justifier que la fonction *F* définie sur l'intervalle [0,5 ; 8] par $F(x)=\dfrac{-40(x+1)}{e^{0{,}5x}}$ est une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle [0,5 ; 8].

4. Calculer la valeur exacte de l'intégrale $I=\int_{1{,}5}^{5} f(x)\,dx$.

Partie B : Application économique

Une entreprise produit sur commande des bicyclettes pour des municipalités. La production mensuelle peut varier de 50 à 800 bicyclettes. Le bénéfice mensuel réalisé par cette production peut être modelisé par la fonction *f* de la partie A de la façon suivante :

si, un mois donné, on produit *x* centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise ce même mois.

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle.

1. a. Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise ce mois-là un bénéfice de 7 989 euros.

b. Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 408 bicyclettes un mois donné.

2. *Pour cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et le modèle précédent. Justifier chaque réponse.

a. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?

b. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum. Préciser alors ce bénéfice à l'euro près.

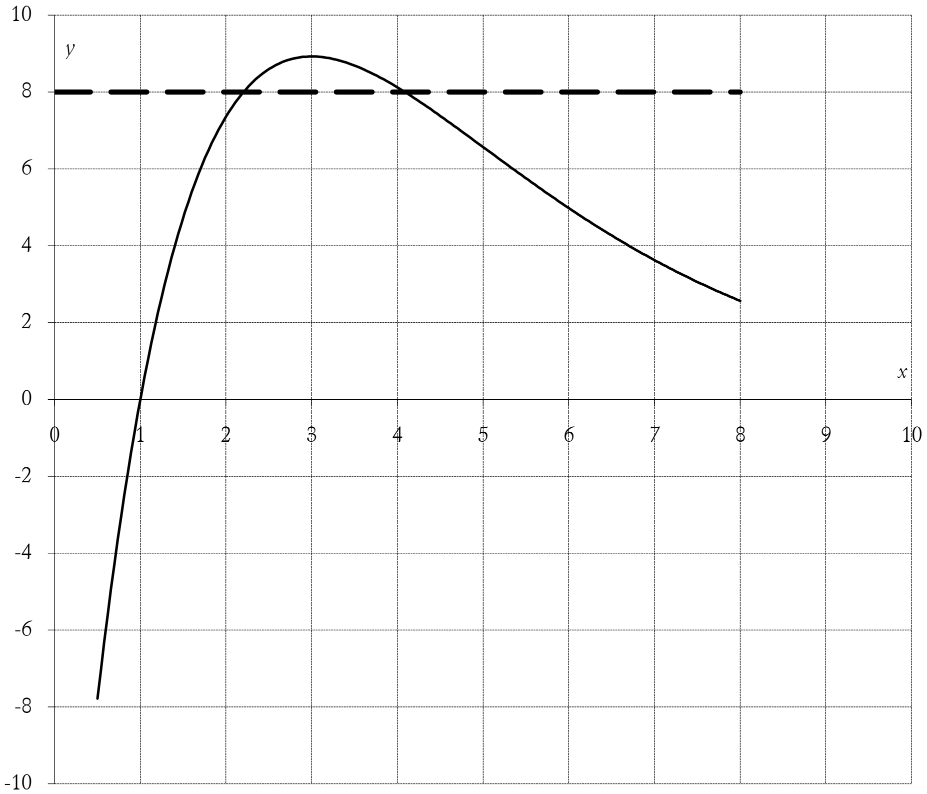
c. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice supérieur à 8 000 euros ?

<u>Correction</u>

Partie A : Etude d'une fonction

1. a. $$f'(x)=20\left[(x-1)'e^{-0,5x}+(x-1)\left(-0,5e^{-0,5x}\right)\right]=20\left[e^{-0,5x}-0,5xe^{-0,5x}+0,5e^{-0,5x}\right]$$
$$=10\times 2\times(-0,5x+1,5)e^{-0,5x}=10(-x+3)e^{-0,5x}$$

b. Le signe de la fonction f' est celui de $-x+3$ puisque l'exponentielle est toujours >0. f est croissante jusqu'à 3, décroissante après.



2.

3. $F'(x)=\left(\dfrac{-40(x+1)}{e^{0,5x}}\right)'=\left(-40(x+1)e^{-0,5x}\right)'=-40\left[1.e^{-0,5x}-0,5(x+1)e^{-0,5x}\right]=-40(-0,5x+0,5)e^{-0,5x}$, soit *f*.

4. $I=\int_{1,5}^{5}f(x)dx=F(5)-F(1,5)=-240e^{-2,5}+100e^{-0,75}\approx 27,53$.

Partie B : Application économique

1. a. Si l'entreprise produit 220 bicyclettes, x = 2,2 et $f(2,2)=7,989$, soit un bénéfice de 7 989 euros.

b. Une production de 408 bicyclettes : $x=4,08$, $f(4,08)=8,0097$, soit un bénéfice de 8 010 euros.

2. a. Pour ne pas travailler à perte, f doit être positive, soit $x \geq 1$, elle doit produire au moins 100 vélos.

b. Pour réaliser un bénéfice maximum elle doit produire 3.100=300 vélos, ce qui lui rapporte 8 925 euros.

c. En traçant la droite $y=8$ sur le figure, ,on voit que *f* est supérieur à 8 (et donc le bénéfice à 8000) lorsque *x* est compris entre 2,3 et 4, soit une production comprise entre 230 et 400 vélocypèdes…