Statistiques-Terminale ES

1. Amérique du sud 2006 (5 points)

Tous les résultats numériques seront arrondis à l'unité près sauf indication contraire.

Une machine est achetée 3 000 euros.

Le prix de revente y, exprimé en euros, est donné en fonction du nombre x d'années d'utilisation par le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5
y_i	3 000	2 400	1 920	1 536	1 229	983

A Ajustement affine

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal du plan. Les unités graphiques seront de 2 cm pour une année sur l'axe des abscisses et de 1 cm pour 200 euros sur l'axe des ordonnées.

2. Calculer le pourcentage de dépréciation du prix de revente après les trois premières années d'utilisation.

3. Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés.

Donner une équation de la droite de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

Représenter la droite dans le repère précédent.

B Ajustement non affine

On pose $z = \ln(y)$ et on admet qu'une équation de la droite de régression de z en x est donnée par :

$z = -0{,}22x + 8{,}01$. ¿¿

2. Amérique 2007 (5 points)

Dans tout l'exercice, le détail des calculs n'est pas demandé. Les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

On rappelle que l'image d'un réel x par la fonction exponentielle peut être notée exp(x) = e^x.

On veut étudier l'évolution des records de l'épreuve d'athlétisme du 100 mètres masculin.

Pour cela on cherche un ajustement des records pour en prévoir l'évolution.

On donne dans le tableau suivant certains records, établis depuis 1900.

Année	1900	1912	1921	1930	1964	1983	1991	1999
Rang de l'année, x_i	0	12	21	30	64	83	91	99
Temps en secondes, y_i	10,80	10,60	10,40	10,30	10,06	9,93	9,86	9,79

1. Étude d'un modèle affine

Construire le nuage de point $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ avec i compris entre 1 et 8, associé à cette série statistique double. On prendra comme unité graphique 1 cm pour dix ans en abscisse et 1 cm pour un dixième de seconde en ordonnées. *On commencera les graduations au point de coordonnées (0 ; 9).*

Peut-on envisager un ajustement affine à court terme ¿ Cet ajustement permet-il des prévisions pertinentes à long terme sur les records futurs ¿

2. Étude d'un modèle exponentiel

Après étude, on choisit de modéliser la situation par une autre courbe. On effectue les changements de variables suivants : $X = e^{-0{,}00924x}$ et $Y = \ln y$ .On obtient le tableau :

$X_i = e^{-0{,}00924x_i}$	1	0,895	0,824	0,758	0,554	0,464	0,431	0,401
$Y_i = \ln y_i$	2,380	2,361	2,342	2,332	2,309	2,296	2,288	2,281

Donner une équation de la droite de régression de Y en X obtenue par la méthode des moindres carrés.

En déduire que l'on peut modéliser une expression de y en fonction de x sous la forme suivante :

$y = \exp\left(ae^{-0,00924x} + b\right)$ où a et b sont deux réels à déterminer.

A l'aide de cet ajustement, quel record du 100 mètres peut-on prévoir en 2010 ?

Calculer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression suivante :

$f(t) = \exp\left(0,154e^{-0,00924t} + 2,221\right)$.

Que peut-on en conclure, en utilisant ce modèle, quand aux records du cent mètres masculin à très long terme.

3. Amérique 2010 (5 points)

Craignant une propagation de grippe infectieuse, un service de santé d'une ville de 50 000 habitants a relevé le nombre de consultations hebdomadaires concernant cette grippe dans cette ville pendant 7 semaines.

Ces semaines ont été numérotées de 1 à 7. On a noté x_i les rangs successifs des semaines et y_i le nombre de consultations correspondant :

Rang de la semaine : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de consultations : y_i	540	720	980	1320	1800	2 420	3 300

Tracer le nuage de points sur une feuille de papier millimétré, on prendra 2 cm pour une unité en x et 1 cm pour 200 en y. Un modèle d'ajustement affine a été rejeté par le service de santé. Pourquoi ?

Pour effectuer un ajustement exponentiel, on décide de considérer les $z_i = \ln y_i$.

Reproduire et compléter le tableau suivant sur votre copie en arrondissant les z_i à 0,01 près. Il n'est pas demandé de tracer le nuage de points correspondant.

Rang de la semaine: x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$							

Trouver à la calculatrice l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés reliant z et x (les coefficients obtenus par la calculatrice seront donnés à 0,1 près) puis déduire y en fonction de x (on donnera le résultat sous la forme $y = e^{ax+b}$, a et b étant deux réels).

En utilisant ce modèle, trouver par le calcul :

- Une estimation du nombre de consultations à la 10^{e} semaine (arrondir à l'unité).
- La semaine à partir de laquelle le nombre de consultations dépassera le quart de la population.

Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

En observant les valeurs données par le modèle exponentiel grâce à un tableau obtenu à l'aide d'une calculatrice, expliquer si ce modèle reste valable sur le long terme

4. Amérique 2011 (5 points)

Le glacier d'Aletsch, classé à l'UNESCO, est le plus grand glacier des Alpes ; situé dans le sud de la Suisse, il alimente la vallée du Rhône.

Pour étudier le recul de ce glacier au fil des années, une première mesure a été effectuée en 1900 : ce glacier mesurait alors 25,6 km.

Des relevés ont ensuite été effectués tous les 20 ans : le recul du glacier est mesuré par rapport à la position où se trouvait initialement le pied du glacier en 1900. Les mesures successives ont été relevées dans le tableau ci-dessous. On note t la durée, en années, écoulée depuis 1900, et r le recul correspondant, mesuré en kilomètres.

Année de mesure :	1900	1920	1940	1960	1980	2000
Durée t écoulée (depuis 1900) :	0	20	40	60	80	100
Recul r (en km) :	0	0,3	0,6	1	1,6	2,3

Mesures déduites de : The Swiss Glaciers, Yearbooks of the Glaciological Commission of the Swiss

Par exemple, en 1940 ($t = 40$), le recul du glacier par rapport à 1900 a été de 0,6 km : la longueur du glacier était donc de 25,6 – 0,6 = 25 km.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

Partie A Étude d'un modèle affine

1. Tracer le nuage de points dans le repère donné en annexe (durée t en abscisse, distance r en ordonnée).

2. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de r en fonction de t, puis tracer cette droite dans le repère précédent.

3. À partir du modèle affine obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a. Le recul puis la longueur du glacier en 2011.

b. L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

Partie B Utilisation d'un modèle exponentiel

Le résultat du 3. b. de la partie A étant peu en accord avec la plupart des autres études, les glaciologues considèrent un autre modèle : le modèle exponentiel.

On pose $y = \ln(r)$. On rappelle que $\ln(r)$ désigne le logarithme népérien du recul r.

1. Recopier puis compléter le tableau suivant sur votre copie (pour permettre le calcul de y, la durée 0 de l'année 1900 a été exclue du tableau.

Durée t (à partir de 1900)	20	40	60	80	100
$y = \ln(r)$					

2. a. À l'aide de la calculatrice, donner l'équation de la droite d'ajustement affine par la méthode des moindres carrés de y en fonction de t.

b. En déduire que r en fonction de t.

3. En utilisant le modèle obtenu précédemment, estimer par le calcul :

a. Le recul puis la longueur du glacier en 2011.

b. L'année de disparition du glacier (arrondir à l'unité).

5. Centre étranger 1995 (12 points)

Le but du problème est de déterminer le prix d'équilibre d'un produit. (On rappelle que le prix d'équilibre d'un produit est obtenu lorsque l'offre et la demande sont égales).

Une étude faite sur ce produit a donné les résultats suivants (le prix au kilogramme est exprimé en francs et les quantités offre et demande sont exprimées en milliers de kilogrammes)

Prix proposé x_i	0,30	0,35	0,45	0,65	0,80	1
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25
Offre z_i	1,25	1,30	1,30	1,50	1,55	1,60

Dans ce problème, on utilisera, pour les calculs statistiques, les fonctions de la calculatrice, le détail de ces calculs n'est pas demandé). Tous les résultats numériques seront donnés en valeurs décimales arrondies à 10^{-2} près.

1. Représentation graphique

Le plan (P) est rapporté au repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 10 cm pour 1 franc en abscisse et 2 cm pour 1 millier de kilogrammes en ordonnée.

1. Représenter sur le même graphique les nuages de points associés respectivement aux séries statistiques (x_i ; y_i) et (x_i ; z_i).

Pour ces représentations, on recommande de prendre le papier millimétré dans le sens de la largeur et de figurer par des signes différents (croix ou points par exemple) les points de coordonnées (x_i ; y_i) et ceux de coordonnées (x_i ; z_i) respectivement.

2. Étude de la demande

La forme du nuage de points associé à la série (x_i ; y_i) permet d'envisager un ajustement exponentiel de y en x. On pose donc $Y_i = \ln y_i$.

a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i ; Y_i). Un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de Y en x est-il satisfaisant ? Pourquoi ?

b. Donner alors une équation de la droite de régression de Y en x sous la forme $Y = ax + b$.

En déduire en utilisant l'égalité $Y = \ln y$ une estimation de la demande y, en fonction de x prix au kilogramme.

6. Centres étrangers (10 points)

Le tableau ci-dessous décrit le nombre moyen y d'objets qu'un ouvrier commençant à travailler sur une chaîne de montage produit en un jour, le $\boldsymbol{x}^{\text{ième}}$ jour où il travaille sur cette chaîne.

x_i	1	3	5	7	9
y_i	27	41	46	48	49

A. Dans cette partie, on utilisera pour les calculs statistiques les fonctions de la calculatrice (le détail des calculs n'est pas demandé).

1. Le plan P est muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour un jour en abscisse et 1 cm pour 5 objets en ordonnée.

Dans le plan P représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i).

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage et le placer sur le graphique précédent.

3. a. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation linéaire de la série statistique (x_i , y_i).

b. Donner une équation de la droite (d) de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

Représenter la droite (d) sur le graphique précédent.

c. Un ajustement affine de ce nuage de points est-il acceptable ? Justifier la réponse.

B. 1. Soit alors la fonction numérique f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $f(x) = 50 - 34e^{-0,4x}$.

On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan P.

a. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

b. Déterminer la limite de f au voisinage de $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. Dans la situation du A, on constate une stabilisation de la quantité d'objets produits en un jour après un certain temps de manipulation de la machine.

Une étude permet de considérer que le nombre d'objets produits par un ouvrier le $x^{\text{ième}}$ jour où il travaille sur cette chaîne est modélisé par une expression de la forme : $50 - ae^{bx}$ ou a et b sont des réels.

Soit g la fonction numérique définie sur l'intervalle [0 ; 100] par $g(x) = 50 - ae^{bx}$.

a. Déterminer les réels a et b pour que la courbe représentant la fonction g dans le plan P passe par les points A et B de coordonnées respectives (1 ; 27) et (9 ; 49).

On donnera de a la valeur exacte puis une valeur entière approchée à une unité près. On donnera de b la valeur exacte puis une valeur décimale approchée à 10^{-1} près.

b. En considérant que, pour x entre 0 et 100, $f(x)$ est une bonne approximation de $g(x)$, estimer le nombre d'objets que devrait produire un ouvrier le 15$^{\text{ème}}$ jour où il travaille sur la chaîne.

7. Centres étrangers 1997 (5 points)

Dans cet exercice, les calculs peuvent être effectués à la calculatrice ; leur détail n'est pas exigé.

Le tableau ci-dessous donne la charge maximale y_i en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur x_i en mètre, de la flèche.

Longueur x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
Charge y_i	10	9	8	7	6	5,5	5	4,5	4	3,5	3,2

Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près.

1. a. Représenter le nuage de points $M(x_i\ ;\ y_i)$ à l'aide d'un repère orthogonal $(O\ ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unités 1 cm pour 2 mètres en abscisses et 1 cm pour une tonne en ordonnées.

b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.

c. Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. Construire cette droite sur le graphique précédent.

d. Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres. Que peut-on dire ?

2. On pose $z_i = \dfrac{1}{y_i}$.

a. Recopier et compléter le tableau suivant (les z_i seront arrondis à 10^{-3} près)

x_i	16,5	18	19,8	22	25	27	29	32	35	39	41,7
z_i	0,100										

b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et z puis une équation de la droite de régression de z en x par la méthode des moindres carrés (les résultats numériques seront arrondis à 10^{-4} près).

c. En se fondant sur les résultats obtenus en 2. b., calculer la valeur de z correspondant à $x = 26$; en déduire la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 26 mètres.

Ce résultat vous paraît-il plus satisfaisant que celui de 1. d. ? Pourquoi ?

8. Centres étrangers 1999 (4 points)

Aucun détail des calculs effectués à la calculatrice n'est exigé dans cet exercice.

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffre d'affaires réalisé à l'exportation par une entreprise.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	100	101	107	122	127	139	136	157	165

x_i désigne le rang de l'année, y_i désigne l'indice du chiffre d'affaires à l'exportation rapporté à la base 100 en 1990.

1. a. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série double dans un repère orthogonal. On prendra :

- pour origine le point (0 ; 100),

- pour unités : 1,5 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm pour 10 points d'indice sur l'axe des ordonnées.

b. Calculer les coordonnées du point moyen G associé à cette série statistique et placer ce point sur le graphique. (On donnera la valeur décimale arrondie au dixième de l'ordonnée de G).

2. Déterminer la valeur décimale arrondie au centième du coefficient de corrélation linéaire de la série double. Ce résultat permet-il d'envisager un ajustement affine ? Pourquoi ?

3. Soit D la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

a. Donner la valeur décimale arrondie au dixième du coefficient directeur de la droite D.

b. En utilisant les coordonnées du point moyen G, donner une équation de la droite D. Tracer cette droite sur le graphique précédent.

c. En supposant que l'évolution du chiffre d'affaires se poursuive de la même façon au cours des années suivantes, estimer l'indice du chiffre d'affaires de cette entreprise en l'an 2001 (on en donnera la valeur arrondie à l'unité).

9. Inde 2001 (4 points)

Le tableau suivant indique, en millions, la population de la France métropolitaine d'après les recensements depuis 1946.

Année	Rang x_i de l'année	Population y_i
1946	0	40,439
1954	8	42,706
1962	16	46,425
1968	22	49,712

1975	29	52,592
1982	36	54,335
1990	44	56,615
1999	53	58,416

Le détail des calculs statistiques effectués avec une calculatrice n'est pas demandé. Les nombres à déterminer seront arrondis à trois décimales.

1. Quel est le coefficient de corrélation linéaire entre x et y ? Un ajustement affine est-il envisageable ?

Le plan est rapporté à un repère orthogonal, les unités graphiques étant : 0,25 cm sur l'axe des abscisses ; 1 cm sur l'axe des ordonnées, la graduation des ordonnées débutant à 40.

2. Construire le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$.

3. Indiquer les coordonnées du point moyen G associé à la série (x, y) et placer ce point sur le graphique précédent.

4. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés. Tracer cette droite (D) sur le graphique précédent.

5. En supposant que cette évolution de la population se poursuive, donner une estimation de la population en 2005.

10. Inde 2002 (4 points)

On donne les valeurs d'un indice boursier au premier de chaque mois entre janvier et septembre 2001.

Date	1/01	1/02	1/03	1/04	1/05	1/06	1/07	1/08	1/09
Rang x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice y_i	7100	6900	6800	6600	6500	6350	6400	6250	6000

Les calculs seront effectués à l'aide de la calculatrice. Aucun détail de ces calculs n'est demandé.

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$.

On prendra 1 cm pour deux unités en abscisse et 1 cm pour 200 points d'indice en ordonnées, en commençant au point (0; 5 000).

2. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i\ ;\ y_i)$ arrondi à 0,01.

3. On considère que ce coefficient justifie un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Donner une équation de la droite D d'ajustement affine de $\boldsymbol{y}$ en $\boldsymbol{x}$ (les coefficients étant arrondis à 0,01). Tracer D dans le repère.

4. On suppose que la tendance se poursuit.

a. En utilisant cet ajustement, donner une estimation à 10 points près de cet indice boursier au 1er janvier 2002.

b. Calculer le mois à partir duquel on peut estimer que cet indice sera inférieur à 5 000. Comment peut-on vérifier ce résultat graphiquement ?

11. Inde 2004 (7 points)

1. On considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(x)=(ax+b)e^{-\frac{x}{3}}+3$ où a et b sont deux réels que l'on se propose de déterminer.

On sait que f admet un maximum au point d'abscisse 4 et que le point A(0 ; 2) appartient à la courbe C représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ d'unités graphiques 2 cm en abscisses et 5 cm en ordonnées.

a. Soit f' la fonction dérivée de f. Déterminer $f'(x)$ pour x appartenant à $[0\,;+\infty[$.

b. Montrer que $a = 1$ et $b = -1$.

2. Étude de la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)e^{-\frac{x}{3}}+3$.

a. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b. En déduire l'existence d'une asymptote D à la courbe C en $+\infty$. Étudier la position de D par rapport à C.

c. Étudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.

3. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8

$f(x)$									

On arrondira les valeurs au centième.

b. Tracer la courbe C et la droite D.

4. Étude économique

Les dépenses de téléphone, en milliers d'euros, de la société TOUPACHER sont consignées dans le tableau suivant : x_i désigne le rang de l'année et y_i désigne la dépense.

Année	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003
x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	1,97	3,02	3,49	3,71	3,80	3,76	3,65	3,55	3,50

On recherche une fonction qui rende compte relativement correctement du phénomène.

On dira qu'une fonction f est **acceptable** si pour chaque valeur x, on a : $\left|f\left(x_i\right)-y_i\right|\le 10^{-1}$.

a. Représenter le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$ dans le repère précédent.

b. Montrer que la fonction f est acceptable.

c. Le responsable financier affirme que « si l'évolution des dépenses se poursuit selon ce modèle, on pourrait espérer retrouver une facture de téléphone inférieure à 3000 euros ».

Êtes-vous d'accord avec cette affirmation ? Justifier.

12. Inde 2005 (5 points)

Le tableau suivant donne la population d'une ville nouvelle entre les années 1970 et 2000.

Année	1970	1975	1980	1985	1990	1995	2000
Rang de l'année x	0	5	10	15	20	25	30
Population en milliers d'habitants y	18	21	25	30	36	42	50

Représenter le nuage de points associé à ce tableau avec le rang x de l'année en abscisse et la population y en ordonnée.

Partie A : Un ajustement affine

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis au centième).

2. Tracer cette droite sur le graphique.

3. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

Partie B : Un ajustement exponentiel

L'allure du nuage incite à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$ par $f\left(x\right)=ae^{bx}$ où a et b sont des réels.

1. Déterminer a et b tels que $f(0) = 18$ et $f(30) = 50$. On donnera une valeur arrondie de b au millième.

2. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2003, à un millier près.

3. Tracer la courbe représentative de f sur le graphique.

4. La population en 2003 était de 55 milliers. Lequel des deux ajustements vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

Partie C : Calcul d'une valeur moyenne

On considère maintenant que, pour une année, la population est donnée en fonction du rang x par $f\left(x\right)=18e^{0,034x}$.

1. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur [0 ; 30] ; on donnera le résultat arrondi au dixième.

2. À l'aide d'une lecture graphique, déterminer l'année au cours de laquelle la population atteint cette valeur moyenne ?

13. Inde 2007 (5 points)

Le rang x_i = 1 est donné pour l'année 1998. La consommation est exprimée en milliers d'euros.

Année	1998	2000	2001	2002	2004
Rang de l'année x_i	1	3	4	5	7
Consommation en milliers d'euros	28,5	35	52	70,5	100,5

1. Représenter le nuage de points $P_i(x_i\ ;\ y_i)$ dans un repère orthogonal du plan (on prendra 1 cm comme unité en abscisses et 1cm pour 10 000 € en ordonnées).

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage ; le placer dans le repère précédent.

3. On réalise un ajustement affine de ce nuage par la droite D d'équation $y = 12{,}5\,x + b$ qui passe par le point G.

Déterminer la valeur de b. Tracer la droite D dans le repère précédent.

4. Déterminer, à l'aide de l'ajustement précédent, la consommation estimée des ménages de cette ville en 2005.

5. En réalité, un relevé récent a permis de constater qu'en 2005 la consommation réelle des ménages de cette ville était de $y_8 = 140\ 000$ €.

Déterminer, en pourcentage, l'erreur commise par l'estimation précédente par rapport à la valeur exacte (on donnera un résultat à l'aide d'un nombre entier en effectuant un arrondi).

6. Un nouvel ajustement de type exponentiel semble alors plus adapté.

a. Recopier et compléter le tableau suivant sachant que $z = \ln y$. Les résultats seront arrondis au centième.

xi	1	3	4	5	7	8
$z_i = \ln y_i$	3,35	...	...	...	...	4,94

b. Déterminer l'équation réduite de la droite de régression de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés à l'aide de la calculatrice; cette équation est de la forme $z = cx + d$; on donnera les arrondis des coefficients c et d à 10^{-2}.

En déduire que : $y = 20{,}49\ \mathrm{e}^{0,23x}$.

c. Estimer alors, à l'aide de ce nouvel ajustement, la consommation des ménages de cette ville en 2007 à 100 € près.

14. Inde 2008 (4 points)

Un centre d'appel comptait en 2001 soixante-six employés. Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre d'employés en fonction du rang de l'année.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre d'employés y_i	66	104	130	207	290	345	428

On cherche à étudier l'évolution du nombre y d'employés en fonction du rang x de l'année. Une étude graphique montre qu'un ajustement affine ne convient pas.

On pose alors $z = \sqrt{y} - 3$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant *(on donnera les résultats sous forme décimale, arrondis au centième)*

Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
z_i	5,12						

2. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ z_i)$ associé à cette série statistique, dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unité graphique 1 cm.

Un ajustement affine vous paraît-il approprié ? Justifier la réponse.

3. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (*on donnera les coefficients sous forme décimale, arrondis au centième*).

Tracer cette droite sur le graphique précédent.

En utilisant cet ajustement, à partir de quelle année peut-on prévoir que l'effectif de ce centre d'appel dépassera 900 employés ?

15. Inde 2009 (5 points)

Partie 1

Sachant qu'il y avait 13 millions de cotisants au régime général de retraites en France métropolitaine en 1975 et 16,6 millions de cotisants en 2005, calculer le pourcentage d'augmentation du nombre de cotisants entre 1975 et 2005. On arrondira le résultat à 0,1 % près.

Partie 2

Le tableau ci-dessous donne le nombre de retraités en France métropolitaine entre1975 et 2005 :

Année	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6
Nombre de retraités (en millions) y_i	4,1	5,0	5,9	7,4	8,3	9,7	10,7

Source : INSEE / Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse 2007

1. Sur une feuille de papier millimétré, représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ associé à la série statistique dans un repère orthogonal d'unités graphiques 2 cm en abscisse (pour les rangs d'année) et 1 cm en ordonnée (pour 1 million de retraités).

2. a. Calculer les coordonnées du point moyen G de cette série statistique.

b. Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation réduite de la droite d d'ajustement de y en x par la méthode des moindres carrés (on arrondira les coefficients au dixième).

c. Placer le point G et tracer la droite d dans le repère construit à la première question.

d. En utilisant l'ajustement trouvé à la question 2, déterminer par un calcul une estimation du nombre de retraités en 2010.

Partie 3

On utilisera les données des parties 1 *et* 2*. Dans cette partie, les résultats seront donnés sous forme de pourcentage, arrondis au dixième.*

On appelle rapport démographique de l'année n le rapport $R_n = \dfrac{\text{nombre de cotisants de l'année } n}{\text{nombre de retraités de l'année } n}$.

1. Calculer le taux d'évolution de R_n entre 1975 et 2005.

2. Entre 2005 et 2010, une étude montre que le nombre de cotisants devrait augmenter de 6,4 % et que le nombre de retraités devrait augmenter de 12,1 %. Calculer le taux d'évolution du rapport démographique entre 2005 et 2010.

Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation

16. Inde 2011 (5 points)

Le responsable d'un site Internet s'intéresse au nombre de pages visitées sur son site chaque semaine.

Partie A

Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées, exprimé en milliers, durant chacune des quatre semaines suivant l'ouverture du site.

Semaine : x_i	1	2	3	4
Nombre de pages visitées en milliers : y_i	40	45	55	70

Ainsi, au cours de la deuxième semaine après l'ouverture du site, 45 000 pages ont été visitées.

1. a. Représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ associé à cette série statistique dans un repère orthogonal. L'allure de ce nuage suggère-t-elle un ajustement affine ?

b. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage puis placer ce point sur le graphique.

c. On appelle (d) la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Parmi les deux propositions ci-dessous, une seule correspond à l'équation réduite de la droite (d). Préciser laquelle, en utilisant le point moyen G :

$$y = 9x + 29 \qquad y = 10x + 27{,}5$$

c. Tracer la droite (d) sur le graphique.

2. En supposant que cet ajustement reste valable pendant les deux mois qui suivent l'ouverture du site, donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site.

Partie B

Le responsable décide de mettre en place, au cours de la quatrième semaine suivant l'ouverture du site, une vaste campagne publicitaire afin d'augmenter le nombre de visiteurs du site.

Il étudie ensuite l'évolution du nombre de pages du site visitées au cours des trois semaines suivant cette opération publicitaire.

Le tableau ci-dessous donne le nombre de pages visitées au cours des sept semaines suivant l'ouverture du site.

Semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7
Nombre de pages visitées en milliers : y_i	40	45	55	70	95	125	175

1. Compléter le nuage de points par les trois nouveaux points définis dans le tableau précédent.

Compte tenu de l'allure du nuage, un ajustement exponentiel semble approprié. Pour cela on pose $z = \ln y$.

2. On donne ci-dessous les valeurs de $z_i = \ln(y_i)$ pour $1 \le i \le 7$, les résultats étant arrondis au centième.

Semaine x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln(y_i)$	3,69	3,81	4,01	4,25	4,55	4,83	5,16

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite d'ajustement de z en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

On donnera la réponse sous la forme $z = ax + b$, en arrondissant les coefficients a et b au centième.

b. En déduire la relation $y = \alpha e^{\beta x}$, où 27,94 et 0,25 sont des valeurs approchées au centième des réels α et β respectivement.

c. À l'aide de ce nouvel ajustement, donner une estimation du nombre de pages visitées au cours de la huitième semaine suivant l'ouverture du site.

Combien de semaines auraient été nécessaires pour atteindre ce résultat sans campagne publicitaire ? (on utilisera l'ajustement obtenu dans la partie A).

17. Métropole 1998 (10 points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1950 à 1985.

t_i désigne le rang de l'année et p_i la population en millions d'habitants.

Année	1950	1955	1960	1965	1970	1975	1980	1985
Rang de l'année t_i	0	5	10	15	20	25	30	35
p_i	8	8,9	9,9	11	12	13,5	15	16,6

A. Exploitation des données - Recherche d'un modèle

1. Représenter le nuage de points $M_i(t_i\,;\,p_i)$ associé à la série statistique dans un repère orthogonal.

Sur l'axe des abscisses, choisir 2 cm pour 5 unités (5 ans).

Sur l'axe des ordonnées, placer 8 à l'origine, puis choisir 2 cm pour une unité (1 million d'habitants).

2. Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction dont la courbe est voisine du nuage de points.

On pose : $y_i = \ln p_i$.

Le détail des calculs statistiques n'est pas demandé.

a. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut du coefficient de corrélation linéaire r de la série $(t_i\,;\,y_i)$.

b. Déterminer une équation de la droite de régression de y en t. Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près.

c. En déduire l'expression de la population p en fonction du rang t de l'année.

B. Étude du modèle exponentiel

On admet que la fonction f définie sur [0 ; 35] par : $f(t) = 8e^{0,02t}$ est une modélisation satisfaisante de l'évolution de la population (en millions d'habitants) de 1950 à 1985.

1. Étudier le sens de variation de f sur [0 ; 35] et dresser le tableau de variation complet de f sur cet intervalle.

2. Construire soigneusement la courbe représentative de f, notée (C), dans le repère du A. Qu'observe-t-on ?

3. On pose $I = \int_0^{35} f(t)dt$. Donner une valeur approchée de I arrondie à 10^{-2} près.

En déduire la population moyenne m du pays durant ces 35 années et la représenter sur le graphique.

4. Calculer le rapport : $\dfrac{f(t+1) - f(t)}{f(t)}$ et en donner une interprétation en terme de pourcentage.

5. Si le modèle exponentiel étudié dans le B restait valable après 1985, en quelle année la population aurait-elle dépassé les 19 millions d'habitants ?

18. Métropole 2000

Le tableau suivant, publié en août 1999 dans une revue économique, donne la part du temps partiel au sein de la population active (les valeurs pour 2000 et 2004 sont le résultat d'une estimation).

Année x_i	1980	1985	1990	1995	1997	2000	2004
Part du temps partiel en % : y_i	8,3	11	12	15,6	16,8	18	20

On étudie la série statistique (x_i, y_i) pour $1980 \le x_i \le 1997$. Les calculs seront effectués à la calculatrice.

1. Représenter dans un repère orthogonal le nuage de points de coordonnées (x_i, y_i) pour : $1980 \le x_i \le 1997$.

On prendra 1 cm pour une part de 2 % en ordonnée, 2 cm pour 5 ans en abscisse en prenant pour origine le point (1980 ; 0).

2. Déterminer les coordonnées de G, point moyen de la série statistique (x_i, y_i). Le placer sur le graphique.

3. a. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} près du coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, y_i). Un ajustement affine est-il justifié ?

b. Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres carrés (a et b arrondis à 10^{-3} près). Dessiner cette droite sur le graphique.

c. Peut-on considérer que les estimations pour 2000 et 2004 faites par la revue ont été réalisées en utilisant l'équation obtenue à la question 3.b. ?

19. Métropole 2001 (5 points)

Le prix de vente des terrains à bâtir dans la même commune rurale est donné par le tableau suivant :

Année	1980	1985	1987	1990	1995	1997	2000
Rang de l'année x_i	0	5	7	10	15	17	20
Prix du m² en francs y_i	58,8	60,9	62,1	67,5	71,7	73	73,8

1. Quelle est, en pourcentage, l'augmentation du prix du m² entre 1980 et 2000 ?

2. Représenter le nuage de point $M_i(x_i, y_i)$ dans un repère orthogonal où 5 cm représentent 10 ans en abscisses, 5 cm représentent 10 francs en ordonnées.

3. Déterminer le point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.

4. Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, y_i) à 0,01 près.

On considère que ce coefficient justifie un ajustement affine par la méthode des moindres carrés. Ecrire une équation de la droite d'ajustement affine de y en x, notée (D) (les coefficients sont arrondis à 0,01). Tracer (D).

5. Estimer à 1 millier de francs près le prix d'un terrain de 1500 m² en 2003.

20. Métropole 2002

Les résultats numériques seront obtenus à l'aide de la calculatrice ; aucun détail des calculs statistiques n'est demandé.

Le tableau suivant donne la dépense, en millions d'euros, des ménages en produits informatiques (matériels, logiciels, réparations) de 1990 à 1998.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Dépense y_i	398	451	423	501	673	956	1077	1255	1427

Source INSEE

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (x_i, y_i) et le point moyen dans un repère orthogonal tel que 2 cm représentent une année en abscisse et 1 cm représente 100 millions d'euros en ordonnée (ainsi 398 sera représenté par 3,98 cm).

2.a. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série (x_i, y_i). Un ajustement affine paraît-il justifié ?

b. Écrire une équation de la droite d'ajustement affine D de y en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3}). Représenter D dans le repère précédent.

c. En utilisant cet ajustement affine, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.

3. L'allure du nuage permet d'envisager un ajustement exponentiel. On pose $z_i = \ln y_i$

a. Recopier et compléter le tableau suivant où z_i est arrondi à 10^{-3} :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
z_i	5,986	6,111	6,047	6,217					

b. Donner la valeur arrondie à 10^{-3} du coefficient de corrélation linéaire de la série(x_i, z_i).

Écrire une équation de la droite d'ajustement affine de z en x par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3})

c. En utilisant cet ajustement, donner une estimation de la dépense des ménages (arrondie à un million d'euros) en produits informatiques en 2000.

4. En 2000 les ménages ont dépensé 68,9 milliards d'euros pour la culture, les loisirs et les sports et 3,1% de ces dépenses concernent les produits informatiques.

Avec lequel des deux ajustements l'estimation faite est-elle la meilleure ?

21. Métropole 2003 (4 points)

Les guichets d'une agence bancaire d'une petite ville sont ouverts au public cinq jours par semaine : mardi, mercredi, jeudi, vendredi et samedi.

Le tableau ci-dessous donne la répartition journalière des 250 retraits d'argent liquide effectués aux guichets une certaine semaine.

Jour de la semaine	mardi	mercredi	jeudi	vendredi	samedi
Rang i du jour	1	2	3	4	5
Nombre de retraits	37	55	45	53	60

On veut tester l'hypothèse « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine ». On suppose donc que le nombre des retraits journaliers est égal à $\frac{1}{5}$ du nombre des retraits de la semaine.

On pose $d_{obs}^2 = \sum_{i=1}^{5}\left(f_i - \frac{1}{5}\right)^2$ où f_i est la fréquence des retraits du i$^{\text{ème}}$ jour.

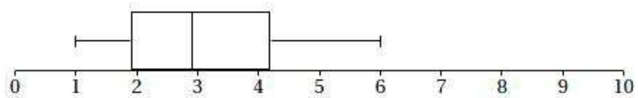
1. Calculer les fréquences des retraits pour chacun des cinq jours de la semaine.

2. Calculer alors la valeur de $1000d_{obs}^2$ (la multiplication par 1 000 permet d'obtenir un résultat plus lisible).

3. En supposant qu'il y a équiprobabilité des retraits journaliers, on a simulé 2000 séries de 250 retraits hebdomadaires.

Pour chaque série, on a calculé la valeur du 1 000 d_{obs}^2 correspondant. On a obtenu ainsi 2000 valeurs de 1000 d_{obs}^2 .

Ces valeurs ont permis de construire le diagramme en boîte ci-dessous où les extrémités des « pattes » correspondent respectivement au premier décile et au neuvième décile.



Lire sur le diagramme une valeur approchée du neuvième décile.

En argumentant soigneusement la réponse, dire si pour la série observée au début, on peut affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 10 %, que « le nombre de retraits est indépendant du jour de la semaine » ?

22. Métropole 2005 (5 points)

En 2004, une caisse de retraite propose à ses adhérents un barème de rachat d'un trimestre de cotisation des années antérieures selon le tableau suivant :

Âge de l'adhérent en années	54	55	56	57	58
Rang x_i	0	1	2	3	4
Montant y_i du rachat d'un trimestre de cotisation en euros	2229	2285	2340	2394	2449

(Source : CARMF Mai 2004)

1. Calculer l'augmentation en pourcentage du montant du rachat d'un trimestre entre un salarié de 54 ans et un salarié de 58 ans. On donnera le résultat arrondi à l'unité.

2. Sur votre copie, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal :

– sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour une unité ;

– sur l'axe des ordonnées, on placera 2200 à l'origine et on choisira 1cm pour 20 euros.

3. Dans cette question, les calculs effectués à la calculatrice ne seront pas justifiés. Le nuage de points permet de penser qu'un ajustement affine est justifié.

a. Donner une équation de la droite de régression (D) de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés.

b. Représenter la droite (D) dans le repère précédent.

c. Quel serait avec cet ajustement affine le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans ?

d. En fait le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié âgé de 60 ans est de 2555 euros et le montant du rachat d'un trimestre après 60 ans est calculé de la façon suivante : à partir de 60 ans, le montant du rachat baisse de 3% par an.

Calculer le montant du rachat d'un trimestre pour un salarié ayant 65 ans.

23. Métropole 2006 (3 points)

Une enquête menée pour le compte d'une entreprise a permis d'établir le nombre d'acheteurs d'un produit X selon le montant de son prix de vente. Les résultats de l'enquête sont résumés dans le tableau ci-dessous dans lequel :

• x_i désigne le prix de vente unitaire (en euros) du produit X ;

• y_i le nombre d'acheteurs en milliers.

x_i	1	1,50	2	3	4
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

1. Représenter sur votre copie le nuage de points associé à la série $(x_i\,;\,y_i)$ dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan (unités graphiques : 4 cm pour 1euro en abscisse et 2 cm pour 1 000 acheteurs en ordonnée).

2. On recherche un ajustement affine de la série $(x_i\,;\,y_i)$.

a. Donner l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

Les calculs seront faits à la calculatrice et les valeurs cherchées seront arrondies au centième ; on ne demande aucune justification.

b. Tracer cette droite dans le même repère que précédemment.

c. Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 euros.

24. Métropole 2007 (5 points)

Partie A

Dans un pays européen, le montant des recettes touristiques, exprimées en millions d'euros, est donné dans le tableau ci-dessous :

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005
Rang de l'année x_i	0	1	2	3	4	5
Montant des recettes touristiques y_i en millions d'euros	24 495	26 500	29 401	33 299	33 675	34 190

1. On utilise un ajustement affine.

Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients, obtenus à l'aide de la calculatrice, seront arrondis au centième.

2. En supposant que cet ajustement est valable jusqu'en 2007, calculer le montant que l'on peut prévoir pour les recettes touristiques de l'année 2007, arrondi au million d'euros.

Partie B

On considère la fonction f définie pour tout nombre entier n par $f(n) = e^{10,13+0,07n}$.

On utilise cette fonction pour modéliser l'évolution des recettes touristiques de ce pays européen.

Ainsi $f(n)$ représente le montant des recettes touristiques (exprimés en millions d'euros) de ce pays européen pour l'année $2000+n$.

1. Selon ce modèle, calculer le montant des recettes touristiques que l'on peut prévoir pour l'année 2007. Arrondir le résultat au million d'euros.

2. a. Déterminer le nombre entier n à partir duquel $f(n) > 45\,000$.

b. En déduire l'année à partir de laquelle, selon ce modèle, le montant des recettes touristiques dépasserait 45 000 millions d'euros.

25. Métropole 2008 (9 points)

On se propose d'étudier l'évolution des ventes d'un modèle de voiture de gamme moyenne depuis sa création en 1999.

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie I

Le tableau suivant dorme le nombre annuel, exprimé en milliers, de véhicules vendus les cinq premières années de commercialisation :

Année	1999	2000	2001	2002	2003
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	81,3	92,3	109,7	128,5	131,2

1. Dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal d'unités graphiques 1 cm pour une année sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 10 milliers de véhicules vendus sur l'axe des ordonnées, représenter le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$ pour i entier variant de 0 à 4.

2. L'allure du nuage de points permet d'envisager un ajustement affine.

a. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.

b. Déterminer l'équation $y = ax + b$ de la droite (D) d'ajustement affine de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés.

c. Placer le point G et tracer la droite (D) sur le graphique précédent.

d. En utilisant l'ajustement affine du b., donner une estimation du nombre de véhicules vendus en 2007.

3. Le tableau suivant donne le nombre annuel de véhicules vendus, exprimé en milliers, de 2003 à 2007 :

Année	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	4	5	6	7	8
Nombre annuel de véhicules vendus en milliers : y_i	131,2	110,8	101,4	86,3	76,1

a. Compléter le nuage de points précédent à l'aide de ces valeurs.

b. L'ajustement précédent est-il encore adapté ? Justifier la réponse.

c. On décide d'ajuster le nuage de points associé à la série statistique $(x_i\,;\,y_i)$, pour i entier variant de 4 à 8, par une courbe qui admet une équation de la forme $y = e^{cx+d}$.

Déterminer les réels c et d pour que cette courbe passe par les points A(4 ; 131,2) et B(8 ; 76,1).

On donnera la valeur exacte, puis l'arrondi au millième de chacun de ces nombres réels.

Partie II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [4 ; 10] par : $f(x) = e^{-0,136x+5,421}$.

On suppose que f modélise en milliers l'évolution du nombre annuel de véhicules vendus à partir de l'année 2003.

1. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [4 ; 10].

2. Tracer la courbe (C) représentative de la fonction f dans le même repère que le nuage de points.

3. L'entreprise décide d'arrêter la fabrication du modèle l'année où le nombre annuel de véhicules vendus devient inférieur à 65 000.

a. Résoudre algébriquement dans l'intervalle [4 ; 10] l'inéquation $f(x) < 65$. En quelle armée l'entreprise doit-elle prévoir cet arrêt ?

b. Retrouver graphiquement le résultat précédent en laissant apparents les traits de construction nécessaires.

26. Métropole 2009 (4 points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice des prix de vente des appartements anciens à Paris au quatrième trimestre des années 2000 à 2007.

Année	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7
Indice : y_i	100	108,5	120,7	134,9	154,8	176,4	193,5	213,6

Source : INSEE

1. Calculer le pourcentage d'augmentation de cet indice de l'année 2000 à l' année 2007.

2. Construire le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan (P) muni d'un repère orthogonal défini de la manière suivante :

• sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 2 cm pour représenter une année.

• sur l'axe des ordonnées, on placera 100 à l'origine et on choisira 1 cm pour représenter 10 unités.

3. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage. Placer le point G dans le plan (P).

4. L'allure de ce nuage permet de penser qu'un ajustement affine est adapté.

a. À l'aide de la calculatrice, déterminer une équation de la droite (d) d'ajustement de y en x, obtenue par la méthode des moindres carrés. Les coefficients seront arrondis au centième.

b. Tracer la droite (d) dans le plan (P).

5. En supposant que cet ajustement affine reste valable pour les deux années suivantes, estimer l'indice du prix de vente des appartements anciens de Paris au quatrième trimestre 2009. Justifier la réponse.

27. Métropole 2010 (5 points)

Pour i nombre entier variant de 0 à 8, on définit le tableau suivant qui donne les valeurs du SMIC horaire brut, exprimé en euros, de 2001 à 2009 (source INSEE).

On se propose d'en étudier l'évolution :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
SMIC horaire brut (en euros), y_i	6,67	6,83	7,19	7,61	8,03	8,27	8,44	8,71	8,82

Dans tout l'exercice les pourcentages seront arrondis à 0,01 % et les valeurs du SMIC horaire brut au centime d'euro.

Partie A : Observation des données

1. Pour i entier variant de 0 à 8, représenter le nuage de points $M_i(x_i\ ;\ y_i)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal défini de la façon suivante :

- sur l'axe des abscisses, on placera 0 à l'origine et on choisira 1 cm pour 1 année,
- on graduera l'axe des ordonnées en commençant à 6 et on choisira 5 cm pour 1 euro.

2. Calculer le pourcentage d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2009.

3. Démontrer qu'une valeur approchée du pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2001 et 2005 est 4,75 %.

On observe sur le graphique un changement de tendance à partir de 2005 : le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut est alors de 2,4 % environ.

En supposant que cette nouvelle tendance se poursuive, on désire estimer la valeur du SMIC horaire brut en 2012.

Dans la suite de l'exercice, on ne s'intéresse qu'au sous-nuage constitué des cinq derniers points M_4, M_5, M_6, M_7 et M_8 du nuage précédent.

Partie B : Modélisation de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)_{4\leq i\leq 8}$ par un ajustement exponentiel

En observant le pourcentage annuel moyen d'augmentation de la valeur du SMIC horaire brut entre 2005 et 2009, on estime à $8,03\times 1,024^n$ la valeur, exprimée en euros, du SMIC horaire brut pour l'année $2005+n$, n désignant un entier naturel.

On considère que ce nouveau modèle reste valable jusqu'à l'année 2016.

1. Calculer une estimation de la valeur du SMIC horaire brut en 2012.

2. À partir de quelle année la valeur du SMIC horaire brut dépassera-t-elle 10 euros ?

28. Métropole 2011 (5 points)

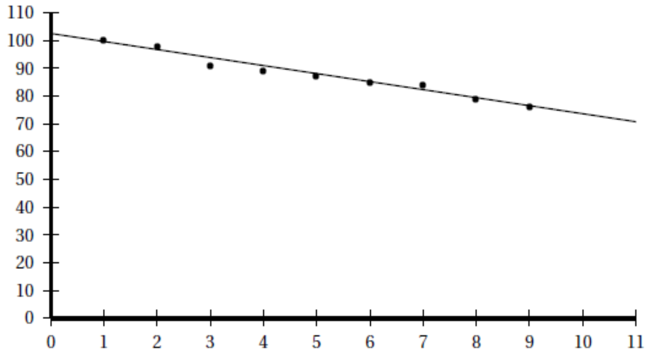
La Caisse Nationale de l'Assurance Maladie des Travailleurs Salariés (CNAMTS) publie, chaque année, des statistiques sur les accidents du travail en France. Celles-ci permettent d'obtenir divers indicateurs, notamment l'indice de fréquence (nombre moyen d'accidents du travail avec arrêt pour 1000 salariés).

Le tableau ci-dessous donne l'évolution de l'indice de fréquence pour le secteur du BTP (Bâtiment et Travaux Publics) en France, au cours des années 2001 à 2009 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Indice de fréquence : y_i	100,3	98,9	91,6	89,5	87,6	85,4	84,0	79,9	76,0

1. Premier ajustement

Grâce à un logiciel, un élève a obtenu le nuage de points représentant la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ et, par la méthode des moindres carrés, la droite d'ajustement de y en x dont une équation est $y = -2{,}89x + 102{,}59$ (les coefficients sont arrondis à 0,01).



a. En supposant que cet ajustement affine est valable jusqu'en 2012, déterminer une estimation de l'indice de fréquence en l'année 2012.

b. Quel serait le pourcentage d'évolution entre 2007 et 2012 de l'indice de fréquence selon ce modèle ? On arrondira le résultat à 10^{-2}.

2. Deuxième ajustement

Un autre élève envisage un ajustement exponentiel de la série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$. On pose $z_i = \ln y_i$.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous (les valeurs de *zi* seront arrondies à 10^{-3}).

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$z_i = \ln y_i$	4,608	4,594	4,517						

À l'aide de la calculatrice, déterminer, par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite d'ajustement de z en x sous la forme $z = ax + b$, les coefficients a et b étant arrondis à 10^{-4}.

En déduire une expression de y en fonction de x sous la forme $y = Ke^{-0{,}0328x}$, K étant une constante arrondie à 10^{-1} près.

3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

La stratégie européenne de santé au travail a fixé comme objectif une réduction de 25 % de l'indice de fréquence entre 2007 et 2012. Peut-on prévoir d'atteindre cet objectif selon les deux ajustements précédents, que l'on suppose valables jusqu'en 2012 ?