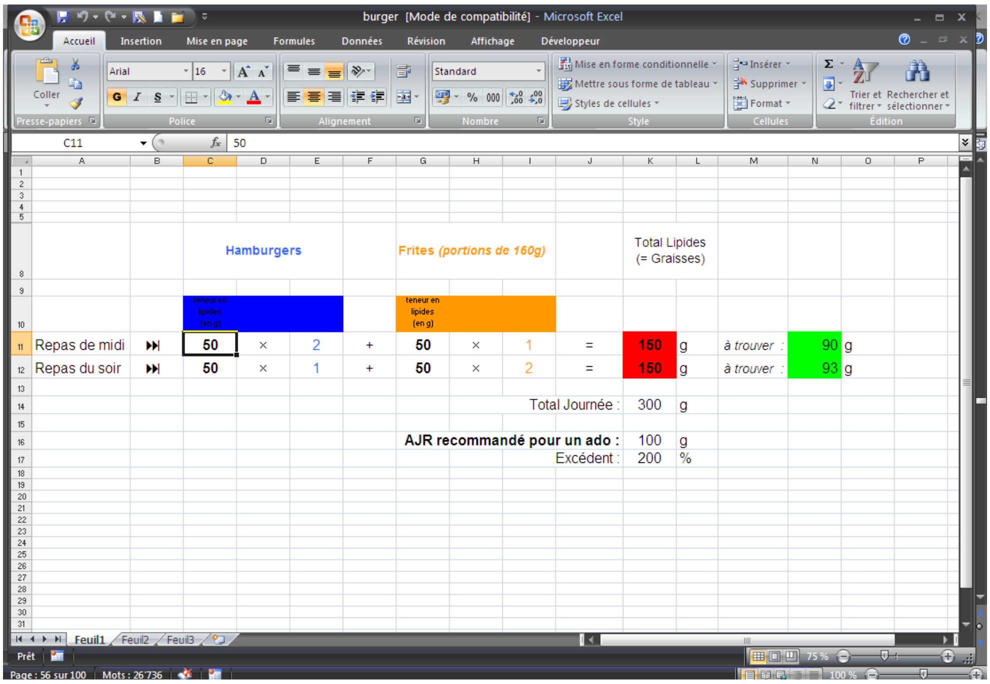
FONCTIONS

1.1. Exercices de démarrage

1.1.1. Un repas équilibré ?



Un lycéen se rend dans un fast-food où il mange deux « big rapidmachinchose », hamburgers géants (1 acheté = 1 offert avec sa carte de lycéen) et une grande portion de frites (160 g). Ce repas constitue un apport de 90 g de lipides.

En fin d'après-midi, après une sortie au cinéma avec des amis, il effectue un nouveau passage au fast-food où cette fois il consomme un hamburger et deux portions de frites. Ce diner constitue un apport de 93g de lipides.

1. En vous aidant du tableur et en testant des valeurs, retrouvez la teneur en lipides (en g) d'un hamburger et d'une portion de frites.

2. Que remarquez-vous quant à l'apport journalier total en lipides du lycéen par rapport à l'apport journalier recommandé (AJR) ?

3. En l'absence du tableur, comment pourrions-nous faire pour retrouver ces teneurs ?

4. Une cuillerée à soupe d'huile végétale constitue un apport d'environ 3,3 g de lipides. Combien de cuillerées d'huile devriez-vous avaler pour absorber l'équivalent en lipides d'un hamburger ?

1.1.2. Image numérique

Une image numérique est constituée d'une multitude de petits carrés appelés pixels. Plus le nombre de pixels est important, plus l'image est détaillée.

La « définition » d'une image numérique se calcule en multipliant le nombre de pixels dans sa longueur par le nombre de pixels dans sa largeur.

La qualité d'un type appareil photo numérique dépend du nombre maximum de pixels de l'image numérique qu'il peut enregistrer.

Type d'appareil	Définition
moins de 1 Mpix (format VGA)	640 × 480
1 Mpix	1280 × 960
3 Mpix	2048 × 1536
4 Mpix	2304 × 1728
8 Mpix	3250 × 2450

Exemple : le 8 Mpix, l'appareil le plus performant du tableau, crée des photos dont la longueur comporte 3250 pixels et la largeur 2450 pixels. L'image comporte alors un nombre total de 3250 × 2450 = 7 962 500 pixels.

Il est possible d'obtenir un tirage papier d'une image numérique. Les cinq formats standards de tirage papier, en centimètres, sont :

1	2	3	4	5
6 × 8	13 × 17	20 × 27	30 × 40	50 × 70

1. Quels sont les formats papier qui permettent d'obtenir une image numérique entière et non déformée ?

2. Dans quel format papier et pour quelle définition numérique le pixel est-il le plus grand ? Peut-on alors le distinguer à l'œil nu ?

Exemples de questions pour guider individuellement l'élève dans la phase de recherche

* Comparer le résultat des produits de la seconde colonne (le nombre obtenu correspond au nombre de pixels constituant une image) avec l'information de la première colonne (arrondir les résultats obtenus au million).

* Pour que l'image ne soit pas déformée, les proportions de la photographie numérique doivent être les mêmes quel que soit l'appareil utilisé. Calculer, pour chaque appareil, le rapport $\frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}}$ de l'image numérique. Que peut-on dire de ces rapports ?

Exemples de questions d'approfondissement :

* Une photo est tirée sur papier 30 × 40 à partir d'un enregistrement effectué avec un appareil 3 Mpix. Calculer l'aire de cette photo en cm^2 et le nombre de pixels par cm^2.

* Est-il possible de voir ces petits carrés à l'œil nu ? Pour effectuer ce type de tirage papier un appareil plus performant est-il nécessaire ?

* La même photo est projetée à l'aide d'un vidéo projecteur sur un écran de 4 m × 3 m. Calculer l'aire de la projection d'un pixel sur l'écran. La qualité de l'image est-elle satisfaisante ?

1.1.3. Pour économiser l'eau

On dit que pour économiser l'eau il vaut mieux prendre une douche qu'un bain. Est-ce vrai ? toujours vrai ? souvent vrai ?

Première étape : un débat

Amener les élèves à exprimer leur point de vue, pour faire émerger l'idée que cela dépend de plusieurs paramètres : le volume d'eau utilisée pour le bain, le débit d'eau de la pomme de douche, la durée de la douche.

Deuxième étape possible : l'expérience

Évaluer le volume d'eau du bain et le débit de la pomme de douche, après mise au point individuelle ou collective d'un protocole.

Troisième étape :

Utiliser les paramètres observés par chacun pour calculer la durée de la douche à ne pas dépasser pour utiliser moins d'eau qu'avec un bain et l'économie (ou la dépense) réalisée si la douche ne dure que 15 minutes.

Modélisation

On utilise le logiciel GEOGEBRA pour apporter une réponse globale à la question posée.

La quantité d'eau dépensée pour prendre un bain est supposée égale à 200 litres.

On appelle a le débit d'eau de la pomme de douche, exprimé en litres par minute.

On se propose de déterminer la durée de la douche, en minutes, à ne pas dépasser pour utiliser moins de 200 litres d'eau et l'économie (ou la dépense) réalisée si la douche ne dure que 15 minutes.

1. On modélise la situation précédente en traçant dans le plan rapporté à un repère orthogonal convenable :

* la droite d d'équation $y = 200$;

* la droite D d'équation $y = ax$;

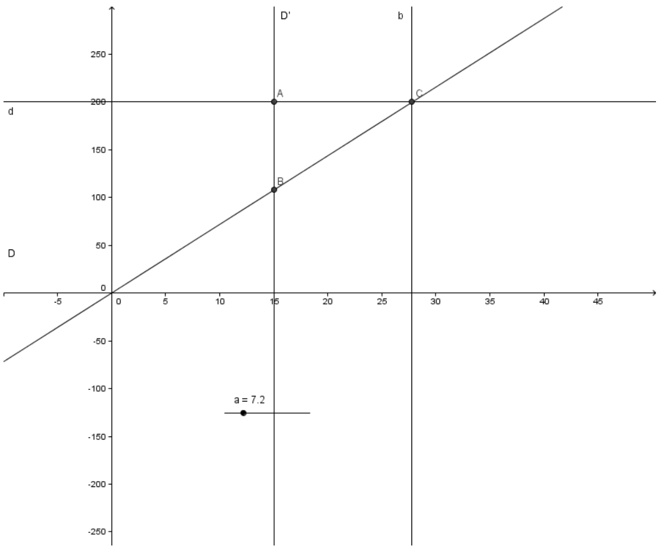
* la droite D' d'équation $x = 15$.

2. Soit C le point d'intersection des droites d et D. Que représente l'abscisse de C ?

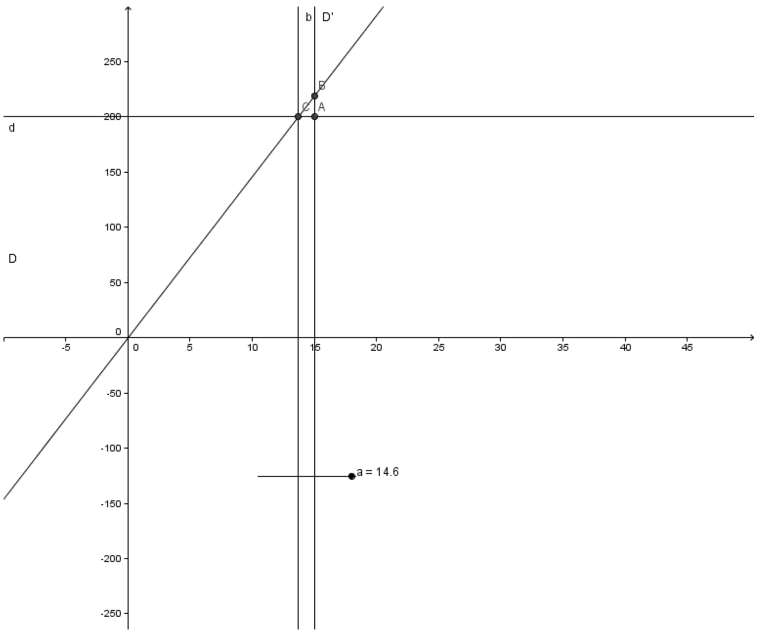
3. Soit A le point d'intersection des droites d et D' et B le point d'intersection des droites D et D'. Dans le graphique 1 ci-dessous obtenu pour $a = 7{,}2$ que représente la longueur AB ?

4. Même question, dans le graphique 2 ci-dessous obtenu pour $a = 14{,}6$.

Graphique 1



Graphique 2



1.1.4. Boire ou conduire…

Partie A

À un instant donné, le taux d'alcoolémie correspond à la quantité d'alcool pur contenu dans un litre de sang. Il s'exprime en grammes (d'alcool pur) par litre (de sang) : g/l.

Après ingestion d'alcool, le taux d'alcool dans le sang augmente et atteint très rapidement son maximum. Ce taux maximum d'alcoolémie peut être estimé par la formule suivante (*formule deWidmark*) :

$$T = \frac{A}{P \times K}$$

où T est le taux maximum d'alcoolémie, P est lamasse de la personne, en kilogrammes, K est le coefficient de diffusion : il est de 0,7 pour les hommes et de 0,6 pour les femmes, A est la masse d'alcool pur ingéré, en grammes.

On estime qu'un verre de boisson alcoolisée (un verre de vin, 25 cl de bière, un verre d'apéritif, ...) contient environ 30 g d'alcool pur. Par exemple un homme de 60 kg ayant absorbé 4 verres de boisson alcoolisée atteint un taux maximum d'alcoolémie de : $\frac{40}{60 \times 0,7} \approx 0,95$.

1. Estimer le taux maximum d'alcoolémie d'un homme de 70 kg qui a bu un apéritif et quatre verres de vin.

Arrondir le résultat au centième.

2. Estimer la masse d'alcool ingéré par une femme de 50 kg présentant un taux maximum d'alcoolémie de 1,02 g/l.

Partie B

Le taux d'alcoolémie d'une personne varie aussi en fonction du temps. Le graphique ci-dessous représente l'évolution du taux d'alcoolémie, en fonction du temps, d'un homme de 80 kg ayant consommé plusieurs boissons alcoolisées en peu de temps.

L'origine des temps (l'heure 0) est le moment de l'ingestion, c'est-à-dire de la prise d'alcool.

1. a. Combien de temps après l'ingestion le taux maximum d'alcoolémie est-il atteint ?

b. Quel est le taux maximum d'alcoolémie de cet homme ?

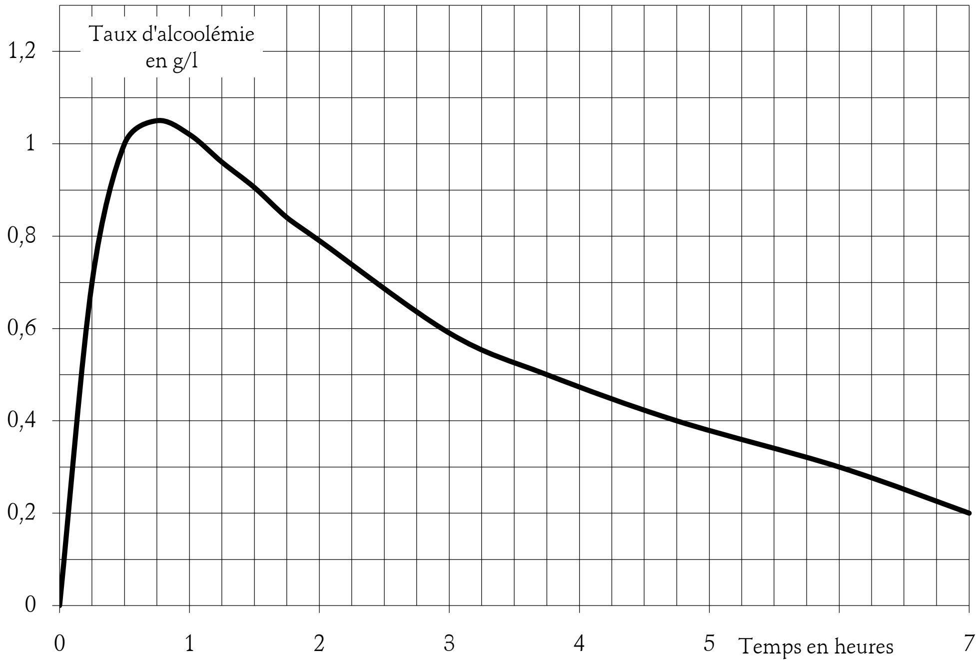
2. a. Quel est le taux d'alcoolémie de cet homme 3 heures après l'ingestion d'alcool ?

b. Quel est le pourcentage de diminution du taux d'alcoolémie 3 heures après ingestion d'alcool par rapport à sa valeur maximum ? Arrondir le résultat à 1 %.

3. En France, selon la législation en vigueur, le taux d'alcoolémie autorisé pour conduire un véhicule ne doit pas dépasser 0,5 g/l.

a. Deux heures après l'ingestion d'alcool, pourquoi la personne observée ne peut-elle pas prendre le volant ?

b. Combien de temps après l'ingestion d'alcool cette personne peut-elle prendre le volant ?

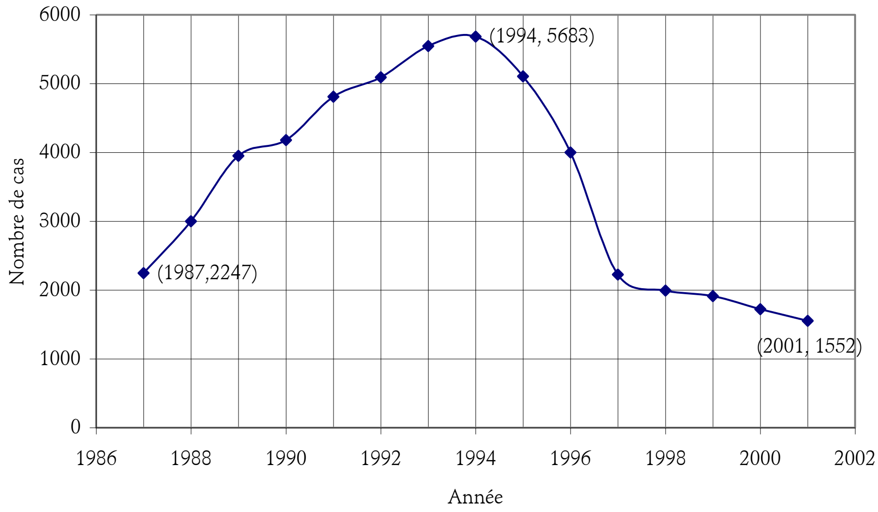


D'après Bac 1 L Maths Info novembre 2007, Amérique du Sud

1.1.5. Maladie

L'évolution d'une maladie entre 1987 et 2001 est modélisée par une fonction *f* dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :

Nouveaux cas de maladie par année de diagnostic



1. Tracer le tableau de variations de cette fonction sur l'intervalle [1987 ; 2001].

2. Sur quelle période y a-t-il une augmentation du nombre de nouveaux cas de maladie ?

3. Quel est le nombre maximum de nouveaux cas déclarés ? En quelle année ?

4. On a relevé le nombre des nouveaux cas entre 1998 et 2001 dans le tableau suivant :

Année	1998	1999	2000	2001
Nombre de nouveaux cas	1908	1777	1668	1552

De quel pourcentage le nombre de nouveaux cas varie-t-il entre 1998 et 1999, entre 1999 et 2000, puis entre 2000 et 2001 ? Arrondir les pourcentages à l'unité.

5. On suppose qu'à partir de 2001 le nombre de nouveaux cas de maladie diminue chaque année de 7 %.

Quel est le nombre de nouveaux cas de maladie que l'on peut estimer pour 2003 ? Pour 2004 ?

D'après Bac 1 L Maths Info novembre 2007, Nouvelle Calédonie

1.1.6. Stocker-déstocker

Deux entreprises, Alsatrans et Nortrans, utilisent des méthodes différentes pour déterminer le nombre de commandes à passer dans l'année afin que le coût total de stockage soit minimal, sans qu'il y ait rupture de stock. La possession d'un stock de marchandises entraîne des frais : le « coût de possession ». Chaque commande passée entraîne des frais : le « coût de passation ». Le coût total de stockage est la somme de ces deux coûts.

I. L'entreprise Alsatrans calcule le nombre d'articles à commander à chaque commande en utilisant la formule :

$$Q=\sqrt{\frac{2a\times c}{P\times t}}$$

où :

Q est le nombre d'articles à commander à chaque commande,

a est le coût de passation d'une commande,

c est le nombre d'articles commandés en 1 an,

P est la prix d'achat d'un article en francs,

t est le taux annuel de possession.

1. Calculer le nombre d'articles à commander à chaque commande dans les conditions suivantes :

a	c	P	t
280 F	1 500	30 F	20 %

Donner le résultat à l'unité près par excès.

2. En déduire le nombre de commandes à passer dans l'année.

II. 1. L'entreprise Nortrans assure pour le compte d'un client la gestion des stocks dans le cadre d'une prestation de transport élargie.

Le coût de possession du stock est donné par la formule : $g(n) = \frac{8\,000}{n}$ où n est le nombre de commandes passé dans l'année. Le coût de passation est 320 F par commande.

Compléter le tableau suivant, la troisième colonne correspondant au cas général où la valeur de n n'est pas donnée.

Nombre de commandes dans l'année	2	10	n
Coût de possession (en F)			
Coût de passation pour l'année (en F)			
Coût total de stockage (en F)			

2. Soit la fonction *f* définie sur l'intervalle [2 ; 10] par $f(x) = \frac{8\,000}{x} + 320x$.

a. Tracer la représentation graphique de la fonction *f*.

b. Dresser, d'après cette représentation, le tableau de variation de la fonction *f* sur l'intervalle [2 ; 10]. Les valeurs de $f(2)$ et $f(10)$ sont à mettre dans ce tableau.

c. Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	3	4	5	6	8
$f(x)$					

3. a. Déduire de l'étude précédente le nombre de commandes que l'entreprise Nortrans doit passer dans l'année afin d'obtenir un coût total de stockage minimum. Donner le montant de ce coût minimum.

b. Déterminer graphiquement les différents nombres de commandes à passer dans l'année pour lesquels le coût de stockage est inférieur à 3 600 F (laisser apparents les traits permettant la lecture graphique et donner le résultat à l'aide d'une phrase).

1.1.7. Consommation d'essence

A. La consommation d'essence C d'un véhicule peut s'exprimer en fonction de la vitesse v sous la forme :

$$C(v) = av + \frac{b}{v}, \ v \text{ en km/h et } C \text{ en L}$$

Deux essais ont donné les résultats suivants :

v	100	80
C	7,5	6,675

1. Ecrire le système à deux équations deux inconnues permettant de déterminer a et b et montrer qu'il est équivalent à : $\begin{cases} 750 = 10\,000a + b \\ 534 = 6\,400a + b \end{cases}$.

2. Résoudre ce système et déterminer a et b.

B. Dans la suite du problème on admet que la consommation d'essence C est définie par la fonction :

$$C(v) = 0{,}06v + \frac{150}{v}$$

1. Tracer la représentation graphique de la fonction C sur l'intervalle [20 ; 130].

2. A partir de cette représentation dresser le tableau de variation de la fonction C.

3. A l'aide de cette représentation compléter le tableau ci-dessous :

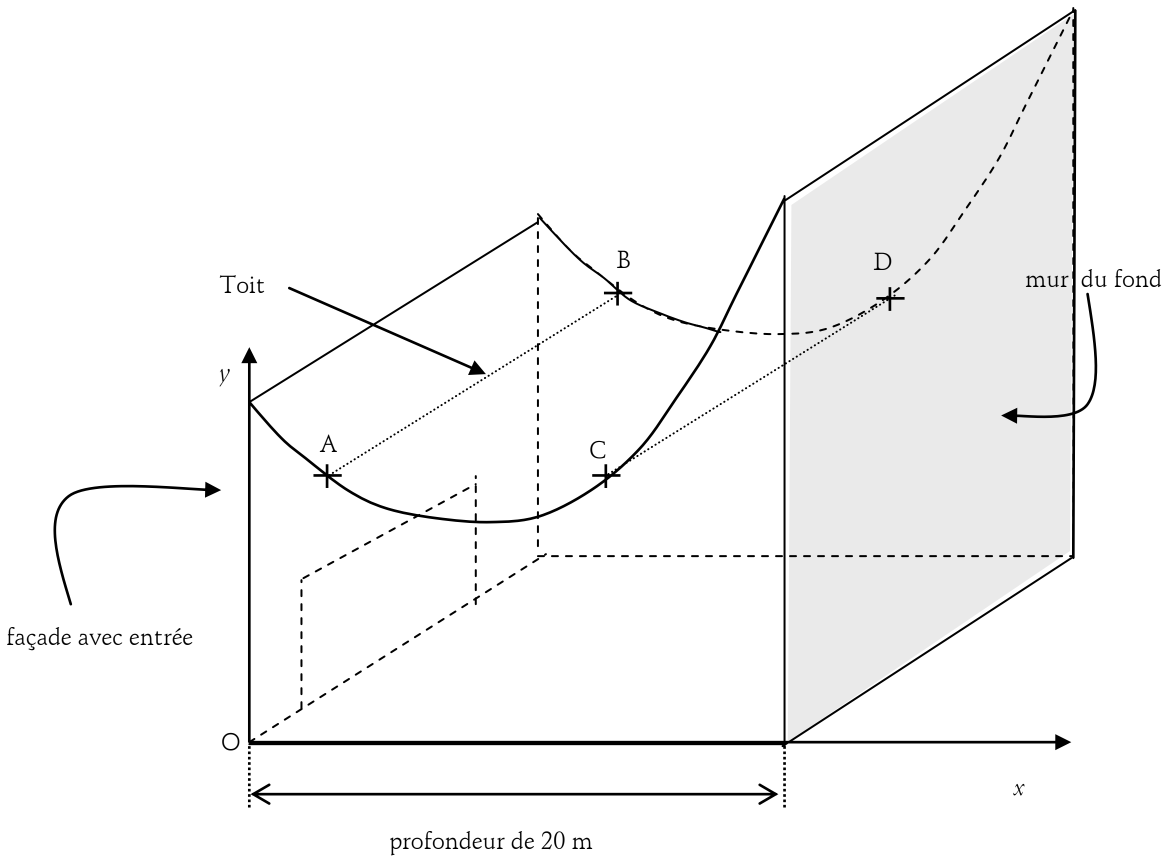
v(km/h)	20	30		50			120	130	
C (L)			6		6,5	7			10

4. A quelle vitesse faut-il rouler pour que la consommation soit minimale ; quelle est cette consommation ?

D'après Bac Pro maintenance auto, Nouvelle Calédonie, juin 2003

1.1.8. Hall d'expositions

Le schéma ci-dessous représente le bâtiment d'un hall d'expositions.



Sur le schéma, la vue de face est munie du repère orthonormal (Ox, Oy), où l'unité de longueur est le mètre.
Le profil du plafond correspond alors à la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 20] par

$$f(x) = 0{,}05x^2 - 0{,}8x + 8.$$

1. Etude de fonction.

1.1. Déterminer le sens de variation de la fonction f

1.2. Pour quelle valeur de x, f est-elle minimale ? On notera α cette valeur.

1.3. Calculer $f(\alpha)$. A quoi correspond cette valeur pour le hall d'expositions ?

2. Tracer la courbe représentative de la fonction f à l'échelle 1/100.

2.1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 6$. Laisser apparents les traits permettant la lecture.

2.2. Le hall d'exposition est éclairé par deux rangées de points lumineux ancrés dans le plafond à la hauteur de 6 m ; elles sont représentées sur le schéma par les segments [AB] et [CD].

Déduire de ce qui précède les coordonnées des points A et C, exprimées en mètre et arrondies au centimètre.

D'après Bac Pro aménagement-finition Polynésie 2004

1.1.9. Les prix barrés

On dispose de l'extrait d'un catalogue publicitaire distribué par un hypermarché en janvier 2008. Il s'agit de trouver comment sont obtenus les prix réduits.

On note x les prix barrés des produits et y les nouveaux prix affichés.

1. En utilisant un tableur-grapheur ou une calculatrice graphique, représenter graphiquement les points de coordonnées (x ; y). Le placement des points présente-t-il une particularité ? Si oui, laquelle ?

2. À l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une propriété liant les valeurs de x à celles de y, puis une formule donnant y en fonction de x.

3. En utilisant les résultats précédents, conclure en indiquant par une phrase comment sont obtenus les prix réduits.

Extrait du catalogue publicitaire de l'hypermarché

1.2. Exercices d'approfondissement

1.2.1. Le Golden Gate Bridge

Le Golden Gate Bridge est un pont suspendu qui enjambe le Golden Gate, détroit marquant la jonction entre la baie de San Francisco et l'océan Pacifique. Il relie ainsi la ville de San Francisco à la ville de Sausalito. Sa construction, qui s'est heurtée à de nombreuses complications, a débuté en 1933 pour s'achever en 1937.

Le Golden Gate Bridge a été jusqu'en 1964 le pont suspendu le plus long du monde, et constitue aujourd'hui le monument le plus célèbre de San Francisco. Il est en outre très aisément reconnaissable par sa couleur « orange international » et par l'architecture de ses deux tours.

Problème : Comment modéliser les câbles porteurs principaux à l'aide de fonctions de référence ?

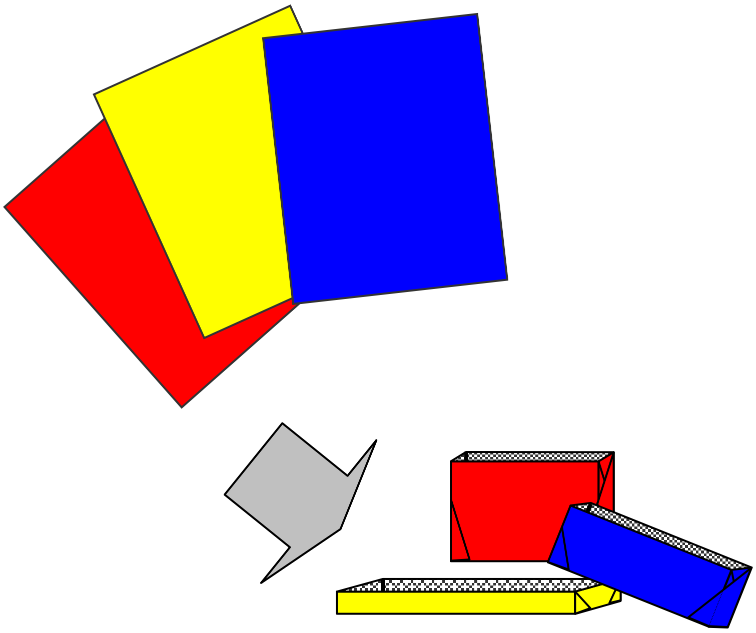
Quelques pistes

1. Par quel terme serait-on tenté de qualifier la forme du câble supérieur ?
2. À l'aide de Geogebra, tenter de trouver une courbe qui se superpose au mieux à ce câble (golden_gate.ggb) .
3. De quelle fonction cette courbe est-elle la représentation ?
4. À partir du logiciel et du schéma, déterminer l'échelle de ce dernier. Pourrait-on définir l'expression algébrique de la fonction représentant le vrai câble ? De quel(s) élément(s) ne faudrait-il pas oublier de tenir compte ?

1.2.2. La plus grande boîte

Avec une feuille de papier de format A4 (21 cm × 29,7 cm) il est possible de fabriquer des boîtes sans couvercle, de dimensions différentes, en pliant simplement les 4 angles.

L'objectif est de ranger un maximum d'objets dans la boîte. Existe-t-il un pliage donnant un volume plus grand que tous les autres ?



Exemples de questions pour guider individuellement l'élève dans la phase de recherche :

* Comment faire pour fabriquer une boîte sans couvercle ?

* Comment calculer le volume de la boîte que vous avez fabriqué ? Existe-t-il une formule ?

* Quelle sont les hauteurs minimale et maximale que peut avoir une boîte ?

* Comment procéder pour savoir si le volume varie en fonction de la hauteur ?

* Comment décrire la variation des valeurs obtenues ?

Exemples de questions d'approfondissement :

* Est-il possible, sans plier tous les angles, de fabriquer une autre boîte sans couvercle ?

* Si oui, a-t-elle un plus grand volume ?

1.2.3. Le parallélogramme tournant

Un rectangle ABCD est tel que AB = 5 et BC = 3. M est un point du segment [AB]. On construit les points N, P et Q respectivement sur [BC], [CD] de [DA] tels que AM = BN = CP = DQ.

On veut étudier la façon dont l'aire du quadrilatère MNPQ varie suivant la position du point M sur [AB], et savoir en particulier pour quelle position de M l'aire du quadrilatère MNPQ est minimale.

I. Conjectures

1. Faire une figure. On appelle x la longueur du segment [AM], a l'aire du parallélogramme.
2. Entre quelles valeurs doit varier x pour que les points N, P et Q correspondent à l'énoncé ? Quelles sont les coordonnées du point M' position extrême de M autre que A ? Placer M' et redéfinir M comme appartenant à [AM'].
3. Quelle est la valeur maximale de l'aire ? Pour quelle valeur de x ? Justifier.
4. Quelle est la valeur minimale de l'aire ? Pour quelle valeur de x ?
5. Placer le point F d'abscisse x et d'ordonnée a dans le repère. Créer le lieu de F quand M se déplace sur le segment [AM'].
6. Quelle est la valeur de l'aire pour $x = 1$? pour $x = 3$?
7. Quel est le sens de variation de a ?

II. Démonstration de la conjecture concernant la valeur minimale de l'aire

1. Soit x la longueur du segment [AM]. Calculer en fonction de x l'aire a du parallélogramme.

2. Montrer que a peut s'écrire $2(x-2)^2+7$.

3. Pour quelle valeur de x cette expression est-elle minimale ? Quelle est alors la valeur de a ? Démontrer la réponse.

1.2.4. Avec des fonctions

$ABCD$ est un parallélogramme tel que $AB = 8$, $AD = 4$ et $\widehat{BDA} = \frac{\pi}{2}$.

Soit M un point libre du segment $[AB]$. On pose $AM = x$, avec $x \in [0\,;8]$.

La parallèle à la droite (DB) passant par M coupe le segment $[AD]$ en N. On cherche la position de M afin que le triangle CMN, de base $[MN]$, ait une hauteur de même longueur que cette base.

1. Faire la figure à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

2. a. Tracer la hauteur $[CH]$ relative à la base $[MN]$. Déterminer la nature du quadrilatère $BDNH$.

On pose $MN = f(x)$ et $CH = g(x)$.

3. a. Toujours en utilisant votre logiciel préféré, tracer en utilisant l'outil « lieu de points », pour $x \in [0\,;8]$, les courbes représentatives des fonctions f et g.

b. Trouver la (les) positions de M tel que $MN = CH$.

4. a. Exprimer $MN = f(x)$ en fonction de x. Exprimer $CH = g(x)$ en fonction de x

b. Représenter sur un même graphique, dans un repère orthonormal, les fonctions f et g. Préciser leur ensemble de définition et leur sens de variation. Dresser leurs tableaux de variation.

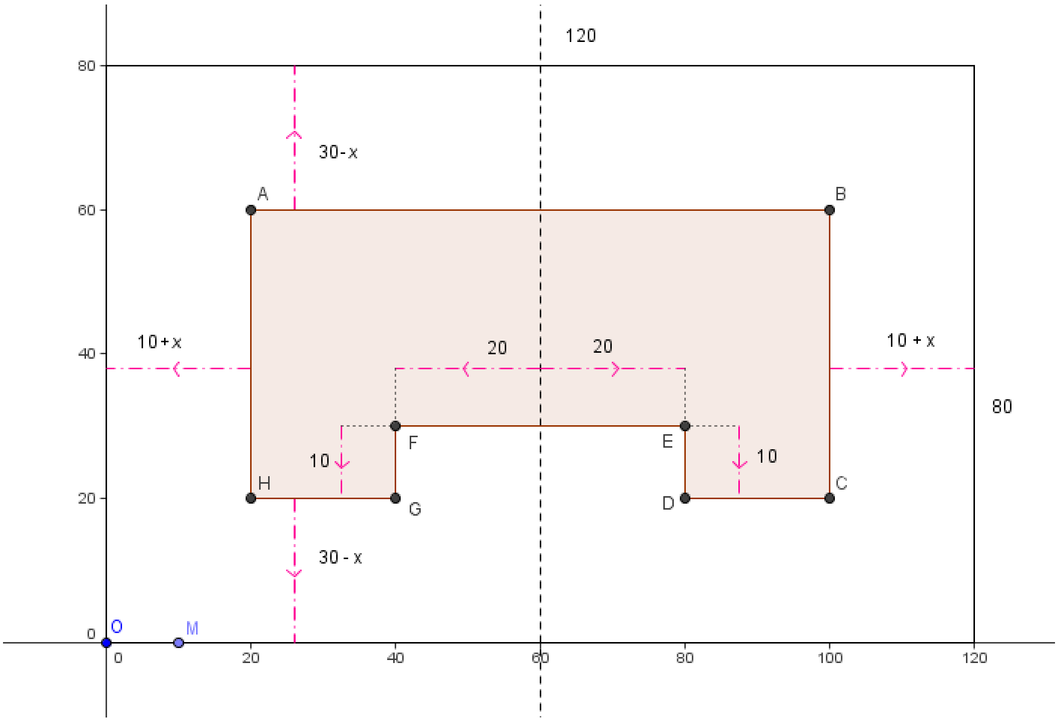
c. Donner une valeur approchée de x tel que $MN = CH$.

1.2.5. Autocollant

Une entreprise de dépannage en appareils électroménagers vient d'acquérir un nouveau véhicule et décide alors de poser sur les portières un autocollant publicitaire. On cherche à déterminer les dimensions à donner à cet autocollant pour assurer sa lisibilité sans nuire à l'esthétique du véhicule.

La place disponible est un rectangle de longueur 120 cm et de largeur 80 cm.

La forme et la disposition de l'autocollant ABCDEFGH dans le rectangle sont indiquées dans la figure ci-dessous. Elles dépendent de la distance x.



Partie A : *Travail sur Geogebra.*

1. Représenter la figure ci-dessus en respectant les unités : on prendra un point M sur l'axe des abscisses dont l'abscisse donnera x.

On rappelle que l'abscisse ou l'ordonnée d'un point M peuvent s'utiliser dans la ligne de saisie en appelant les fonctions **x(M)** ou **y(M)**. Par exemple on peut définir G par G=(x(F), y(F)−10).

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le polycone ABCDEFGH reste semblable à un U renversé.

3. Faire calculer l'aire z de l'autocollant ABCDEFGH par Geogebra. En déplaçant M dire quand z est croissante ou décroissante.

4. Tracer la courbe permettant de visualiser z en fonction de x. On utilisera l'outil « **lieu de points** » intelligemment.

4. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $z = 3000$ cm^2.

5. Quelle est l'aire maximale de l'autocollant ? Pour cette aire, déterminer AB et AH en cm.

Partie B : *Calcul de l'aire de l'autocollant.*

1. Calculer l'aire du rectangle FEDG en fonction de x.

2. Exprimer en fonction de x l'aire du rectangle ABCH.

3. En déduire que l'aire A, en cm^2, de l'autocollant ABCDEFGH est : $A(x) = -4x^2 + 160x + 1600$.

Partie C : *Etude d'une fonction.*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 30] par $f(x) = -4x^2 + 160x + 1600$.

1. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

2. Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = -4(x-20)^2 + 3200$. En déduire le sens de variation de f lorsque $x < 20$ puis lorsque $x > 20$.

3. Compléter le tableau de variation de f.

4. Tracer la courbe représentative de f en utilisant Geogebra (nouveau fichier). Comparez avec le résultat de la partie A.

Tableau de valeurs

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$							

Tableau de variation

x	0 30
variation de f	

Partie D : *Recherche de valeurs de x*

1. Déterminer graphiquement les valeurs de x en cm pour lesquelles l'aire $f(x)$ de l'autocollant est égale à 3000 cm^2. Laisser apparents les traits nécessaires à la lecture. Déterminer les valeurs cherchées par le calcul.

2. Quelle est l'aire maximale de l'autocollant ? Pour cette aire, déterminer AB et AH en cm.

3. Un rectangle de longueur L et de largeur l a une forme parfaitement équilibrée si : $\frac{L}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ (1) (φ est appelé « *nombre d'or* »).

a. Pour $L = 2(50 - x)$ et $l = 2(10 + x)$, montrer que la relation (1) s'écrit : $50 - x = \varphi(10 + x)$.

b. Résoudre cette équation. En remarquant que AB = L et AH = l, en déduire sans calcul, l'aire d'un autocollant de forme équilibrée.

4. Faire une figure exacte avec Geogebra.

D'après Bac pro Maintenance appareils et équipements ménagers, France, Juin 2005

1.2.6. Test de fonctionnement d'un four à micro-ondes

Cet exercice est réalisable avec un tableur (Opencalc ou Excel).

Un four à micro-ondes de puissance P est utilisé pour chauffer un volume V d'eau pendant un temps t. L'élévation $\Delta\theta$ de la température de l'eau peut être calculée par la relation suivante :

$\Delta\theta$: élévation de la température de l'eau (°C)

$$\Delta\theta = \frac{P \times t}{4{,}187 \times V}$$

P : puissance (W)

t : temps de chauffage (s)

V : volume d'eau (mL)

I. Calculs numériques

1. Créer un tableau numérique permettant d'obtenir $\Delta\theta$ à partir des données de P, t et V.

2. Calculer la valeur de l'élévation de température $\Delta\theta$, lorsque P = 1 700 W ; t = 15 s et V = 100 mL. Le résultat sera affiché à 0,1 près.

3. Les températures initiale $\theta_{initiale}$ et finale θ_{finale} de l'eau sont liées par la relation $\Delta\theta = \theta_{finale} - \theta_{initiale}$.

Modifier votre tableau pour obtenir θ_{finale} en fonction de V ; faire le calcul lorsque P = 1700 W, t = 120 s et $\theta_{initiale}$ = 20 °C.

4. Etude de la température finale pour P = 1700 W, t = 120 s et θ_{finale} = 20 °C : exprimer θ_{finale} en fonction de V.

II. Etude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur I = [100 ; 2000] par la relation $f(x) = \frac{48720}{x} + 20$.

1. Calculer $f(x)$ pour x variant sur I avec un pas Δx.

a. Quelle valeur doit-on donner à Δx pour obtenir 200 valeurs ?

b. Comme on ne maîtrise pas la situation on veut calculer $f(x)$ avec un pas de 0,5. Combien de valeurs de x doit-on calculer ?

3. On se fixe sur ce nombre : construire les deux colonnes d'abscisses et d'ordonnées nécessaires. Tracer alors la représentation graphique de f et l'imprimer.

4. Quel est le sens de variation de f ? Justifier.

5. Compléter le tableau de variation de la fonction f.

x	100 2 000
Variation de f	

III. Exploitation de la courbe

Laisser apparents les traits de construction.

1. Déterminer graphiquement la température finale atteinte par un volume d'eau de 1 500 mL.

2. Sachant que la température d'ébullition de l'eau est 100 °C, peut-on obtenir l'ébullition de 900 mL d'eau ?

3. On veut pouvoir changer à notre guise les valeurs de P, t et $\theta_{initiale}$. Reprendre le tableau de la question I. 3. de manière à obtenir θ_{finale} en fonction de V pour n'importe quelle valeur de ces paramètres.

4. Pour des raisons de sécurité la température finale ne doit pas dépasser 150 °C. Combien de temps doit-on laisser tourner le four avec une puissance de 1700 W pour une température initiale de 20 °C et un volume de 1 L ?

IV. Exploitation de la formule initiale

Pour toutes les questions qui suivent vous devez justifier vos réponses par un calcul avec le tableur et par un calcul formel.

1. Une de vos camarades vous affirme que lorsque la pression augmente de 1% (t et V restant fixes), alors la température finale augmente de 3 %. Qu'en pensez-vous ?

2. Un de vos camarades vous affirme que lorsque la puissance augmente de 1% (t et V restant fixes), alors la température finale augmente de 3 % et ceci quelle que soit la température initiale. Qu'en pensez-vous ?

3. Un autre de vos camarades vous affirme que lorsque la puissance augmente de 1% et le temps de chauffage de 2 % (V reste fixe), alors la température finale augmente de 3 % et ceci quelle que soit la température initiale. Qu'en pensez-vous ?

4. Un individu passant-là par hasard vous affirme que lorsque le volume augmente de 1% (P et t restent fixes), alors la température finale diminue de 1 % et ceci quelle que soit la température initiale. Qu'en pensez-vous ?

D'après Bac pro Maintenance appareils et équipements ménagers, France, septembre 2005

1.2.7. Etude d'un coût de transport

L'entreprise de mareyage « PECHEDISTRIB », de Lorient, procède à une étude du coût de transport par route et par rail et à une étude de rentabilité.

Cette entreprise souhaite déterminer le mode de transport le plus rentable en fonction du nombre de kilomètres parcourus pour les modes de transport ferroviaire et routier.

Pour un nombre x de kilomètres parcourus, le coût C_F en euros, du transport ferroviaire d'une tonne de poisson est donné par la formule :

$$C_F = 0{,}1\,x + 360$$

et le coût C_R en euros, du transport routier d'une tonne de poisson est donné par la formule :

$$C_R = 200\sqrt{x} - 600\ .$$

I. Calcul du coût

L'entreprise doit transporter une tonne de poisson de Lorient à Bordeaux sur une distance de 480 km.

1. Calculer le coût de ce trajet par transport ferroviaire.

2. Calculer le coût de ce trajet par transport routier.

3. Quel moyen de transport le plus économique va-t-elle choisir ?

II. Etude du coût

Représentations graphiques

1. Soit la fonction f définie sur l'intervalle [50 ; 1200] par $f(x) = 0{,}1x + 630$.

Dans un repère judicieux construire la courbe représentative de la fonction f.

2. Soit la fonction g définie sur l'intervalle [50 ; 1200] par : $g(x) = 200\sqrt{x} - 600$.

a. Compléter le tableau de valeurs de $g(x)$, arrondies à la dizaine.

x	0	4	10	18	29	38	48	55
$g(x)$								

b. Dans le repère ci-dessus construire la courbe représentative de la fonction g.

c. Justifier que la fonction g est croissante.

III. Exploitation graphique

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ en laissant apparents les traits de construction permettant la lecture.

2. Déterminer graphiquement :

a. Pour quelle distance les deux coûts de transport sont égaux.

b. Sur quel intervalle le transport ferroviaire est le plus avantageux.

c. Sur quel intervalle le transport routier est le plus avantageux.

1.2.8. Bénéfice et recette

L'entreprise Vislux produit des boulons en quantité q exprimée en milliers.

1. Les dépenses de production D, exprimées en euros, sont données par la relation : $D(q) = 2q^2 - 60q + 800$.

a. Les boulons sont vendus 56 euros les mille. On considère que toute la production q est vendue.

Exprimer la recette R en fonction de q.

b. Soit B le bénéfice de l'entreprise. Montrer que $B(q) = -2q^2 + 116q - 800$.

2. Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 55] par : $f(x) = -2x^2 + 116x - 800$.

a. Vérifier que $f(x) = -2(x-29)^2 + 882$. En déduire le sens de variation de f sur l'intervalle [0 ; 29] puis sur l'intervalle [29 ; 55].

b. Compléter le tableau de variation de la fonction f ci-dessous.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

3. En vous aidant des résultats précédents et en justifiant vos réponses :

a. Donner la quantité q de boulons, exprimée en milliers, à produire pour que le bénéfice soit maximum.

b. Pour quelles valeurs de q obtient-on un bénéfice nul ?

x	0 55
Variation de f	

1.2.9. Boites de rangement

Une entreprise fabrique des boîtes de rangement. q est un nombre entier de centaines de boîtes fabriqués et vendues en un mois.

On admet que le bénéfice net en centaines d'euros, $B(q)$ est donné par :

$$B(q) = -q^2 + 94\,q - 445.$$

I. Etude d'une fonction

Soit la fonction f définie pour x appartenant à l'intervalle [10 ; 70] par : $f(x) = -x^2 + 94x - 445$.

1. Trouver deux nombres réels a et b tels que $f(x) = -(x-a)^2 + b$.

2. Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[10\,;a]$ et décroissante sur l'intervalle $[a\,;70]$.

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Effectuer la représentation graphique de f.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \le 1500$ en laissant apparents les traits de construction nécessaires pour cette résolution.

II. Exploitation pour l'étude du bénéfice

1. En utilisant l'étude de la variation de la fonction précédente,

a. déterminer le nombre de centaines de boîtes qu'il faut vendre pour obtenir un bénéfice maximal ;

b. quel est, en centaines d'euros, le montant du bénéfice maximal ?

2. La production est inférieure à 4000 boîtes par mois. Un gestionnaire affirme que si on augmente la production de 10 % alors le bénéfice augmente de 10 % . Qu'en pensez-vous ?

3. Début 2008 l'entreprise produit 5000 boîtes par mois. Pour ne pas perdre de parts de marché l'entreprise est obligée d'augmenter sa production mais ne veut pas que son bénéfice baisse de plus de 10 %. Combien de boîtes peut-elle produire au maximum ?

3. En utilisant la courbe représentative de la fonction précédente, déterminer graphiquement à quel intervalle doit appartenir le nombre de centaines de boîtes pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 1 500 euros.

III. Etude d'une prévision

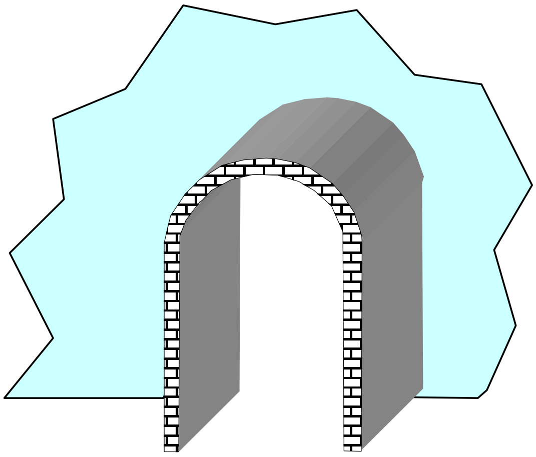
L'entreprise a fabriqué et vendu 450 centaines de boîtes en 2007 ; elle envisage une augmentation de production de 5 % par an tous les ans.

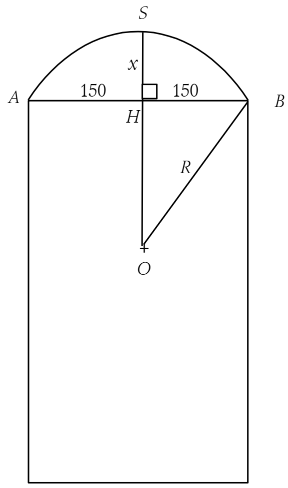
1. Déterminer le nombre de boîtes produites en 2008, en 2009.

2. Déterminer le nombre prévisionnel, arrondi à l'unité, de centaines de boîtes à fabriquer durant l'année 2012.

1.2.10. Arc et flèche

Une entreprise doit réaliser le plafond cintré d'une galerie selon le schéma ci-dessous.





La largeur de la galerie est AB = 300 cm = 3 m.

Partie A

La flèche $x = SH$ dépend du rayon de cintrage R qui est le rayon de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ passant par S :

$$OA = OS = OB = R.$$

1. En considérant le segment $[OS]$, exprimer OH en fonction de R et de x.

2. En déduire l'expression développée de OH^2 en fonction de R.

3. Dans le triangle OBH, exprimer OH^2 en fonction de R.

4. Montrer qu'à partir des expressions obtenues aux questions précédentes, on obtient : $2Rx - x^2 = 150^2$.

5. En déduire que le rayon de cintrage R est donné en fonction de la flèche x par la relation : $R = \frac{x}{2} + \frac{11\,250}{x}$.

6. Si la flèche x vaut 0,5 m, combien vaut le rayon ? Est-il possible que le rayon soit inférieur à 1,50 m ?

Partie B

1. Refaire la figure à l'aide de Geogebra : le point O doit être **libre** sur la médiatrice de $[AB]$; on appellera r la longueur OB et z la longueur SH.

2. Afficher le repère. Placer à l'aide de la ligne de saisie un point M de coordonnées (z, r).

Tracer le **lieu** des points M quand O parcourt la médiatrice de $[AB]$.

3. En lisant les coordonnées de M sur la figure compléter le tableau ci-dessous.

z	0	50	100	150	200	250	300	400	500
r									

4. Quelle est la valeur de z pour laquelle le rayon r est minimum ? Quelle est alors la position de M ?

5. Quand z devient grand, M semble se déplacer approximativement sur une droite. Tracer et donner une équation de cette droite.

<u>Partie C</u>

Pour des raisons esthétiques l'architecte décide que l'arche doit avoir la même longeur que le rayon.

1. Pour un arc de cercle de rayon R intercepté par un angle α quelle est en fonction de R et α la longueur l de cet arc (on regardera les deux cas : angle en degrés puis angle en radians) ?

2. De même que précédemment placer un point N de coordonnées (z, l) et construire le lieu de N lorsque O parcourt la médiatrice de $[AB]$.

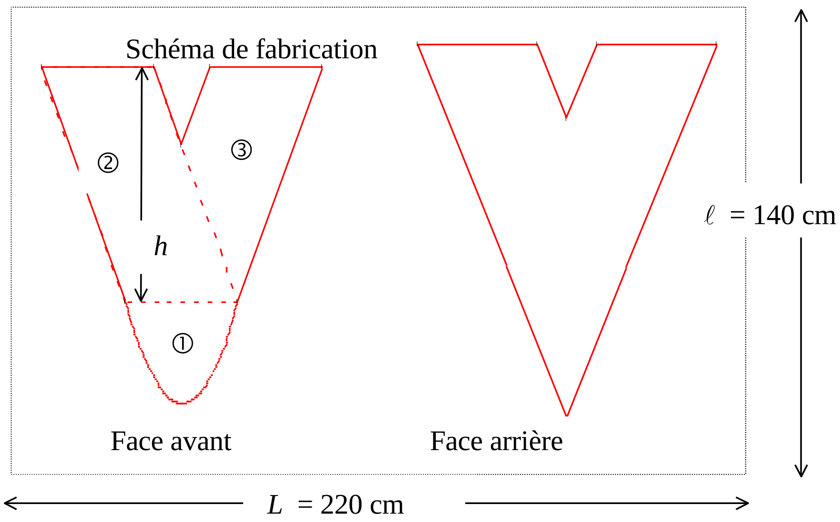
3. En lisant les coordonnées de N sur la figure compléter le tableau ci-dessous.

z	0	50	100	150	200	250	300	400	500
l									

4. Quelles sont les valeurs de z correspondant au problème de l'architecte ? Quelles sont alors les valeurs de R, de l, de α ?

1.2.11. Un poncho très « fashion »

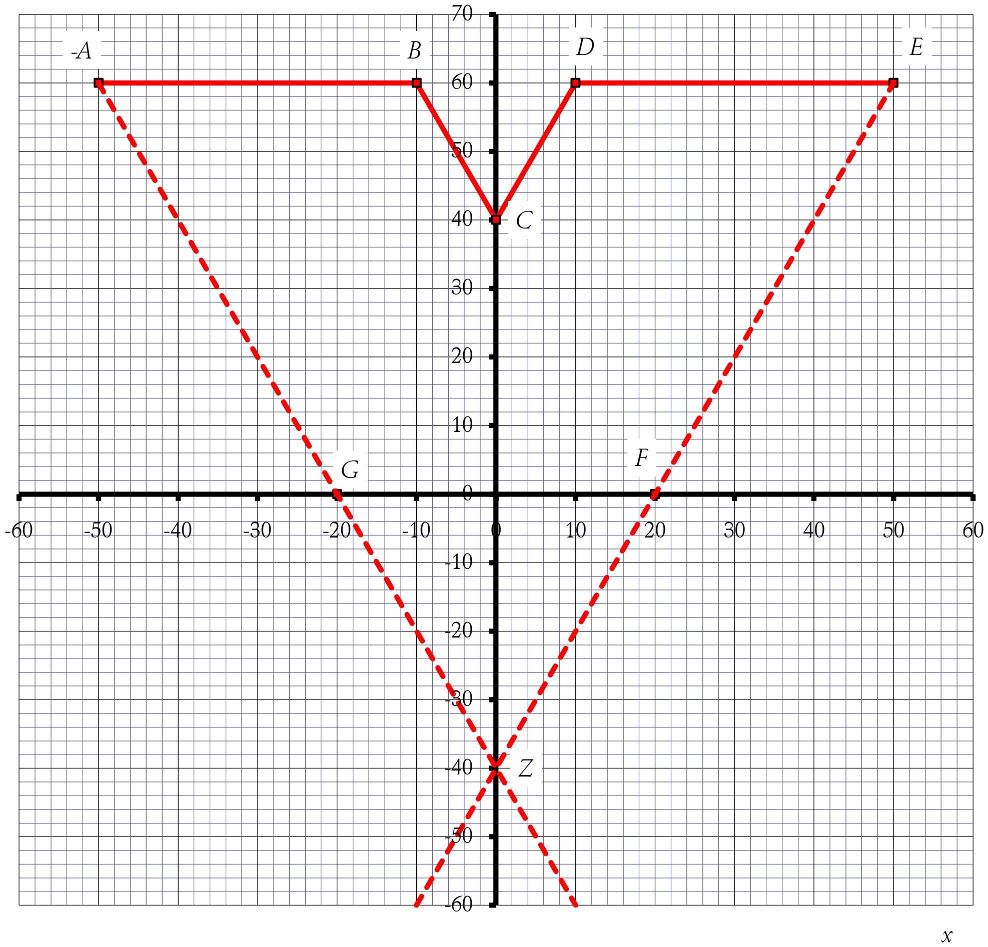
On réalise le patron d'un poncho en tissu dont le modèle figure ci-dessous.



Partie 1

Pour donner un côté plus «fashion» au poncho, la face avant sera découpée différemment de la face arrière.

La partie inférieure de la face avant est constituée d'un arc de parabole alors que sa partie supérieure reprend exactement le dessin de la face arrière. Tous les tracés demandés seront faits sur la figure ci-dessous.



Unités graphiques : sur chaque axe gradué, 1 unité représente 10 cm.

1. La partie inférieure de la face avant est constituée d'une parabole d 'équation $f(x)=ax^2+bx+c$ passant par les points $G(-20\ ;\ 0)$, $F(20\ ;\ 0)$, $S(0\ ;\ -25)$.
Déterminer les valeurs de a, b et c.

2. Soit la fonction définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par $f(x)=0{,}062x^2-25$.

a. Etudier les variations de f sur $[0\,;20]$ puis sur $[-20\,;0]$.

b. Dresser le tableau de variation de f et compléter le tableau de valeurs de la fonction f ci-dessous. Arrondir les valeurs approchées à l'unité.

x	– 20	– 15	– 10	– 5	0	5	10	15	20
$f(x)$									

c. Sur le repère ci-dessus, tracer la courbe (C) représentative de la fonction f sur l'intervalle $[-20\,;20]$.

3. On note S le point d'abscisse $x_S=0$ de la courbe (C) et on donne les coordonnées des points $A(-50\ ;\ 60)$ et $E(50\ ;\ 60)$. Calculer la distance du point S à la droite (AE).

Partie 2

Pour éviter la déformation de l'encolure, on maintient celle-ci au moyen de lanières comme indiqué sur la photo ci-dessus. Soient les points : $B(-10\ ;\ 60)$; $D(10\ ;\ 60)$; $K(5\ ;\ 50)$ et $L(-5\ ;\ 50)$.

1. Placer les points K et L puis tracer les segments $[LD]$ et $[BK]$.

2. Donner les équations des droites (LD) et (BK).

3. On note M le point d'intersection des segments $[LD]$ et $[BK]$; donner ses corrodonnées. On donnera une valeur approchée entière de son ordonnée. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{MK}$.

4. Calculer les longueurs MD et MK. Arrondir les valeurs au dixième.

5. Une contrainte esthétique impose que l'angle $\widehat{DMK}$ soit compris entre 60° et 70°. La contrainte est-elle respectée ?

Partie 3

Les points E et Z sont représentés sur la figure.

1. Déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées du point Z.

2. Montrer que les abscisses des points d'intersection F et F', de la parabole (C) et de la droite (EZ) sont les solutions de l'équation $0{,}0625x^2 - 25 = 2x - 40$.

3. Vérifier que $0{,}0625x^2 - 2x + 15 = 0{,}0625\left(x^2 - 32x + 240\right) = 0{,}0625\left[\left(x-16\right)^2 - 16\right]$.

Résoudre l'équation $0{,}0625x^2 - 25 = 2x - 40$.

4. Calculer les coordonnées des points F et F'. Placer sur le repère le point F'.

Partie 4

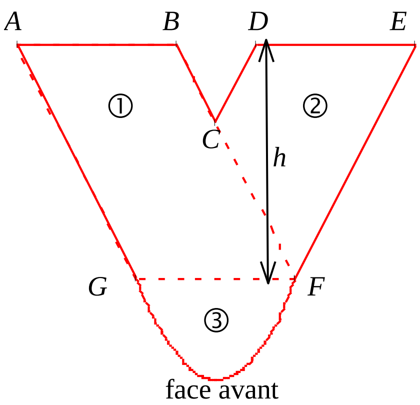
La face avant du poncho est constituée de :

- un parallélogramme ① $ABFG$, le point G est le symétrique de F (20 ; 0) par rapport à l'axe vertical passant par C,
- un trapèze ② $DCFE$,
- une surface ③, délimitée par un arc de parabole et le segment [GF].

1. Calcul de l'aire du parallélogramme ① ($ABFG$).

a. A partir du graphe déterminer, en cm, la mesure réelle de la base [FG] du parallélogramme.

2. Déterminer graphiquement, en cm, la mesure de la hauteur h du parallélogramme relative à la base [FG].



3. Calculer, en cm², l'aire du parallélogramme $ABFG$ qui est égale à $FG \times h$.

4. Déterminer l'aire du trapèze $DCFE$.

5. Donner une valeur approchée à 1 cm² près de l'aire de la partie ③.

Déterminer, en cm², l'aire totale de tissu nécessaire à la réalisation de la face avant du poncho.

Partie 5

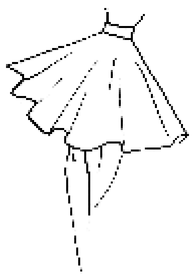
La face arrière du poncho forme un « V » d'aire 4 800 cm². Lors de la coupe du poncho, les faces avant et arrière sont placées de manière à minimiser les pertes de tissu.

1. Calculer, en cm², l'aire totale de tissu nécessaire.

2. On positionne les deux pièces dans un rectangle. Quelles doivent être ses dimensions minimales ?

3. Faire un schéma. Dire pour la disposition choisie quel est le pourcentage de perte.

1.2.12. Jupes soleil

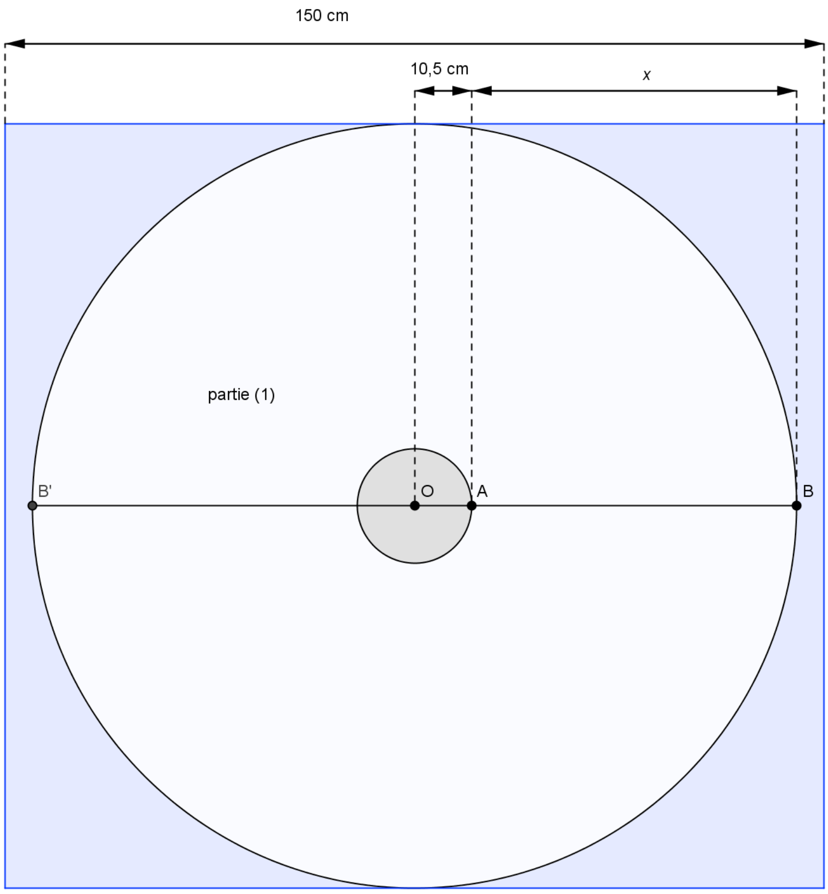


On coupe une « jupe soleil » (voir ci-contre) de taille 40 dans un tissu de largeur 150 cm, conformément au dessin ci-dessous.

La partie (1) (le tissu utilisé) est comprise entre deux cercles concentriques.

Le reste du tissu (hachuré sur le dessin) constitue les chutes.

x désigne un nombre compris entre 30 et 64,5, il représente la cote AB.



I. Calcul de surfaces

1. Calcul numérique : pour cette question, la cote AB mesure 60 cm.

a. Calculer le diamètre BB' du cercle extérieur.

b. On désigne par A_T la surface totale de tissu pris sur le rouleau. Calculer A_T en cm^2.

c. On désigne par A_P la surface du tissu utilisé (partie ①). Calculer A_P. Donner le résultat arrondi au cm^2.

d. On désigne par A_C la surface des chutes. Calculer A_C en cm^2.

2. Calcul littéral : la valeur de la cote AB est variable, elle est désignée par la lettre x.

a. Exprimer A_T en fonction de x.

b. Exprimer A_P en fonction de x.

c. Exprimer A_C en fonction de x. On prendra $21\pi \approx 66$.

II. Étude de fonction

Soit la fonction f définie dans l'intervalle [30 ; 64,5] par : $f(x) = -\pi x^2 + 234x + 3150$.

a. Tracer la représentation graphique C_C de la fonction f dans un repère judicieux.

b. Vérifier que $f(x) = -\pi\left(x - \dfrac{117}{\pi}\right)^2 + \dfrac{117^2}{\pi} + 3150$. En déduire les variations de f.

c. Calculer $f(30)$ et $f(64{,}5)$ et dresser le tableau de variation de f (on donnera les valeurs arrondies à l'unité).

III. Exploitation d'un graphique

La surface de tissu utilisée est donnée par la fonction g : $g(x) = \pi\left(x^2 + 21x\right)$; on note sa courbe C_P ; la courbe C_C représente la fonction f et donne la surface des chutes.

1. Tracer la courbe C_P sur la figure précédente.

2. Pour la valeur x = 42,5 :

a. Placer sur le graphique :

* le point C dont l'ordonnée représente la surface des chutes ;

* le point P dont l'ordonnée représente la surface de tissu utilisé.

b. Déterminer graphiquement les deux surfaces correspondantes et en déduire la surface totale du tissu pris sur le rouleau.

3. Les deux courbes se coupent au point M ; exprimer en pourcentage en ce point la surface des chutes par rapport à la surface totale du tissu.

IV. Statistiques

Lors de la confection d'une série de 40 jupes "soleil", on mesure le temps de réalisation de chaque jupe :

Temps de réalisation (en heures)	[3 ; 3,5[	[3,5 ; 4[	[4 ; 4,5[	[4,5 ; 5[	[5 ; 5,5[	[5,5 ; 6[
Nombre de jupes : n_i	2	4	13	15	5	1

1. a. Calculer le temps moyen $\bar{x}$ de réalisation d'une jupe. Donner le résultat arrondi à 0,1 heure.

Pour les calculs, toutes les valeurs d'une classe sont considérées égales au centre de la classe.

b. En déduire le coût moyen de la main d'œuvre hors taxe d'une jupe, sachant que le tarif hors taxe est de 19 euros pour une heure de temps de réalisation.

2. À l'aide d'un ordinateur on obtient le diagramme des effectifs cumulés croissants. Toutes les mesures réellement effectuées, non regroupées en classe, y sont représentées.

a. En utilisant ce document déterminer le nombre de jupes dont les temps de réalisation appartiennent à l'intervalle $[3,9 ; 4,7]$. Laisser les traits de lecture apparents.

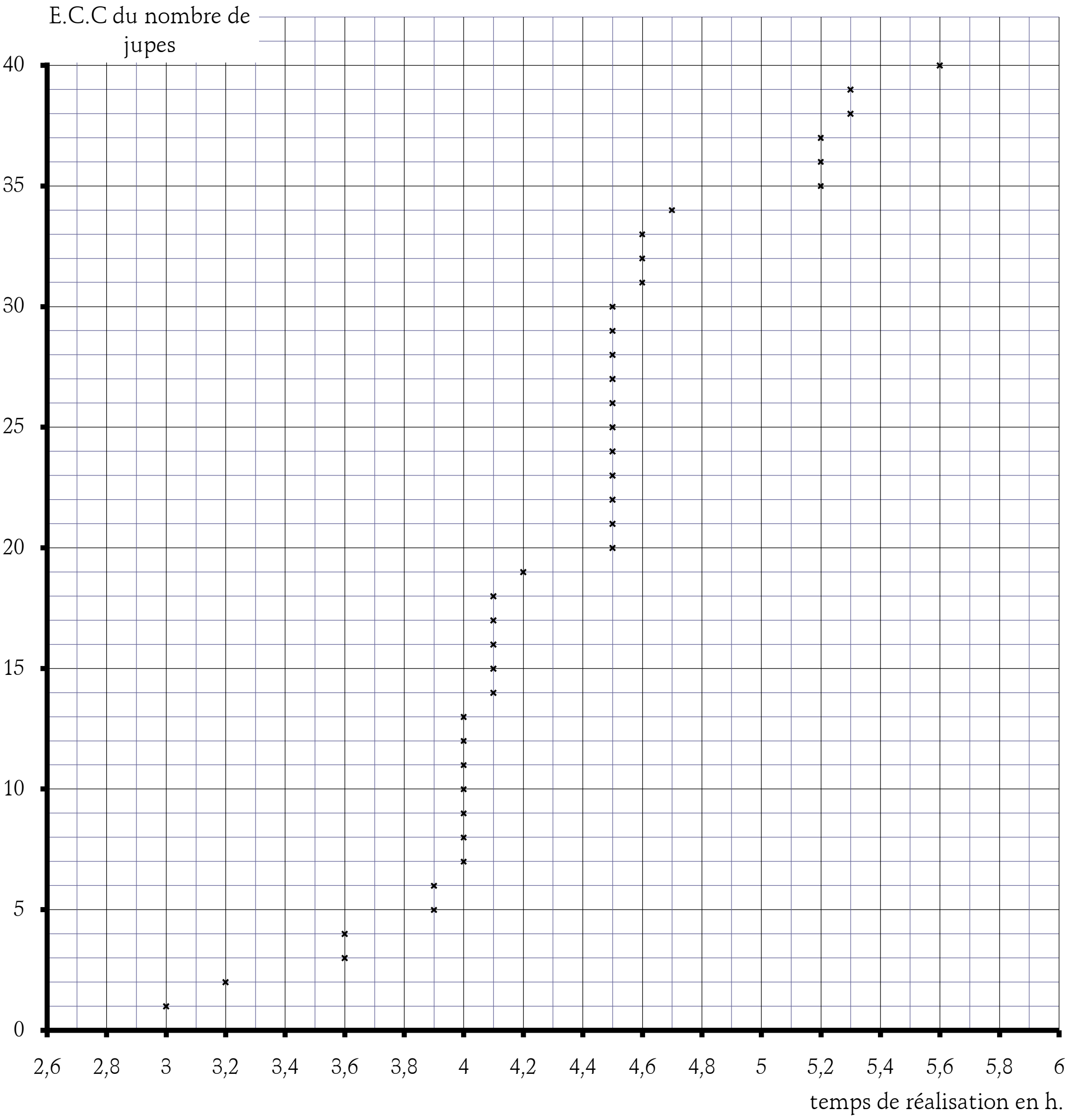
b. Exprimer ce nombre en pourcentage de l'effectif total.

c. Sur l'intervalle [4 ; 4,5[on constate qu'il n'y a pas de point sur le diagramme pour des temps supérieurs à 4,2 heures.

Cela est-il compatible avec le choix du centre de classe utilisé pour les calculs à la question 1. a. ?

d. L'ordinateur donne pour l'ensemble de la série une moyenne réelle égale à 4,35 heures. Donner une raison pour laquelle cette moyenne réelle est différente de la moyenne $\bar{x}$ calculée à la question 1. a.

Diagramme des effectifs cumulés croissants obtenu à l'ordinateur



D'après Bac pro VAM, France, septembre 2002

1.2.13. Semi-remorque

Le coût de revient journalier d'un véhicule tracteur avec semi-remorque de 40 tonnes se compose :

- d'un terme fixe : le coût par jour, en francs ;
- d'un terme variable : le coût au kilomètre, en francs.

On donne les informations suivantes :

	Coût au km (en F)	Coût par jour (en F)
Septembre 1998	2,43	2 246
Septembre 1999	2,50	2380

1. On se place dans le cas particulier où 600 km sont parcourus par jour en septembre 1998 comme en septembre 1999.

a. Calculer le coût de revient journalier en septembre 1998 puis en septembre 1999.

b. Calculer le coût de revient journalier par km en septembre 1998 puis en septembre 1999.

c. Calculer le pourcentage d'augmentation du coût de revient journalier par km entre septembre 1998 et septembre 1999 (arrondir au centième).

2. On considère le mois de septembre 1999 et on se place dans le cas général où le nombre de kilomètres parcourus par jour est noté n.

a. Donner l'expression du coût de revient journalier C_1 en fonction de n.

b. Donner l'expression du coût de revient journalier par kilomètre C_2 en fonction de n.

c. Une entreprise de transport souhaite limiter le coût de revient journalier par km à 7,50 F. Calculer la distance journalière minimale pour atteindre cet objectif.

3. Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle [300 ; 600] par : $f(x) = 2{,}5 + \frac{2\,380}{x}$.

a. Tracer la courbe représentative de la fonction *f* sur l'intervalle [300 ; 600].

b. Déterminer le sens de variation de la fonction *f*. Dresser son tableau de variation.

c. Compléter le tableau suivant où les résultats seront arrondis au centième.

x	300	350	400	450	500	550	600
$f(x)$							

4. Retrouver graphiquement le résultat de la question 2.c. en laissant apparents les traits permettant la lecture graphique.

1.2.14. Distance d'arrêt

Le système de freinage d'un véhicule automobile est conçu pour l'immobiliser sur la plus courte distance possible. Cette distance est appelée distance d'arrêt.

Elle peut être calculée avec la relation : $d = \frac{v^2}{2\,\mu\, g}$ où

- d : distance d'arrêt en m,
- v : vitesse instantanée du véhicule au moment du freinage en m/s,
- μ : coefficient d'adhérence des pneus sur le sol,
- g : accélération de la pesanteur : 9,8 m/s^2.

Le tableau suivant donne quelques coefficients d'adhérence :

Revêtement de la route	Pneus Neufs	Pneus Usés
Route sèche : béton	0,85	0,95
Asphalte	0,80	0,90
Chemin sablonneux	0,50	0,50
Route recouverte : 1mm d'eau	0,55	0,40
Route recouverte : 2mm d'eau	0,45	0,30
Route verglacée	0,10	0,10

I. Calcul numérique et algébrique

1. Un véhicule roule sur une route recouverte par 1 mm d'eau avec des pneus neufs.

a. Montrer que l'expression de la distance d'arrêt devient $d = \frac{v^2}{10{,}78}$.

b. Calculer la vitesse instantanée v_1 du véhicule au moment du freinage qui correspond à une distance d'arrêt de 50 m.

2. Calculer la distance d'arrêt d'un véhicule qui roule à la vitesse v_1 sur une route recouverte par 1 mm d'eau avec des pneus usés.

II. Fonction numérique

Soit *f* la fonction définie sur l'intervalle [10 ; 30] par : $f(x) = \frac{x^2}{10{,}78}$.

1. Compléter le tableau de valeurs de la fonction *f*.

x	10	15	20	25	30
$f(x)$					
$g(x)$					

2. Déterminer le sens de variation de f. Dresser son tableau de variation.

4. Tracer la courbe représentative C_1 de la fonction f.

III. Exploitation

La courbe C_1 représente la relation entre la distance d'arrêt $f(x)$ et la vitesse instantanée pour une adhérence $\mu = 0,55$.

1. Déterminer la fonction g qui est la relation entre la distance d'arrêt $g(x)$ et la vitesse instantanée pour une adhérence $\mu = 0,40$.

2. Déterminer le nombre réel a tel que $g(x) = af(x)$.

3. Utiliser le coefficient trouvé pour compléter le tableau de valeurs de g à partir de celui de f et tracer la courbe représentative C_2 correspondante.

IV. Distance d'arrêt

La distance totale de freinage est la somme de la distance d'arrêt et de la distance de réaction.

A 83,5 km/h un véhicule, sur une route mouillée par 1 mm d'eau avec des pneus neufs, a une distance de freinage de 50 m.

Toutes les 0,1 secondes le temps de réaction augmente cette distance de 2,3 m.

1. Quelle est la distance de freinage totale pour un temps de réaction de 0,1 seconde ; 0,2 seconde et 0,3 seconde ?
2. A l'aide d'un tableur calculer la distance de freinage toutes les 0,1 seconde jusqu'à 2 secondes.
3. Quelle est la distance parcourue pour un temps de réaction de 1 seconde ?
4. Quel est le temps de réaction maximum autorisé au dixième de seconde près pour s'arrêter en 200 m, dans ces conditions ?
5. Un individu ayant bu un coup de trop voit son temps de réaction augmenté de 50 %.

Le soir du réveillon Ernest est dans un état semi-comateux et suit à 50 m de distance une voiture neuve dont la conductrice n'a pas bu. La route est verglacée, ils roulent à 40 km/h, sa poubelle a des pneus dans un état lamentable.

La conductrice le précédant freine brutalement : a-t-elle des chances d'échapper au « coup du lapin » ?

D'après Bac Pro maintenance auto Antilles juin 2004

1.2.15. Salle des fêtes

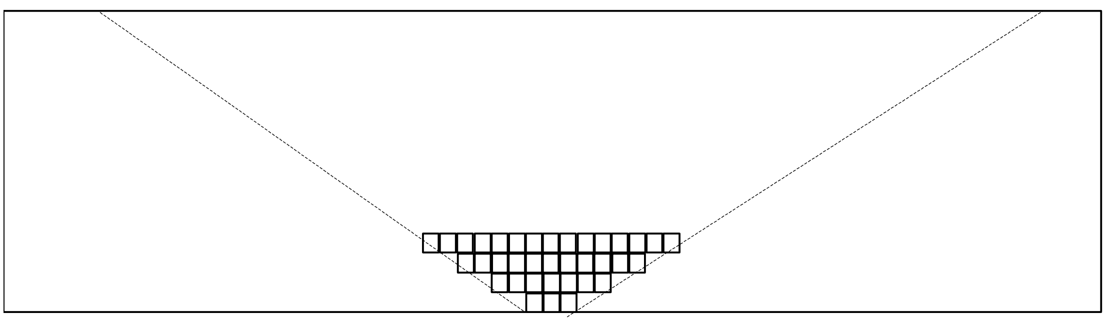
Une entreprise est sollicitée pour réaliser l'aménagement de deux salles destinées à accueillir un salon

« ***Mathématiques en fête*** ».

Partie 1

Dans une première salle, elle doit réaliser le sol à l'aide de dalles blanches ou noires en PVC de dimensions 50 × 50, en centimètres.

La salle a pour longueur 49,5 m et pour largeur 12 m. Le motif blanc à réaliser est le suivant :



Le premier rang comporte $u_1 = 3$ dalles blanches ; le deuxième rang comporte $u_2 = 7$ dalles blanches ; le troisième rang comporte $u_3 = 11$ dalles blanches ; le quatrième rang comporte $u_4 = 15$ dalles blanches et ainsi de suite en suivant la même progression jusqu'au rang permettant d'atteindre le mur d'en face.

Le reste de la pièce sera complété par les dalles noires.

1.1. Calculer $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$, $u_4 - u_3$.

1.2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ainsi définie ? Donner le premier terme u_1 et la raison.

1.3. Déterminer le nombre de rangs à réaliser pour couvrir la largeur de la pièce.

1.4. Déterminer le nombre de dalles blanches utilisées au dernier rang.

1.5. Déterminer le nombre total de dalles blanches pour réaliser le motif.

1.6.1. Calculer le nombre total de dalles (blanches ou noires) nécessaires pour recouvrir entièrement le sol.

1.6.2. En déduire le nombre de dalles noires.

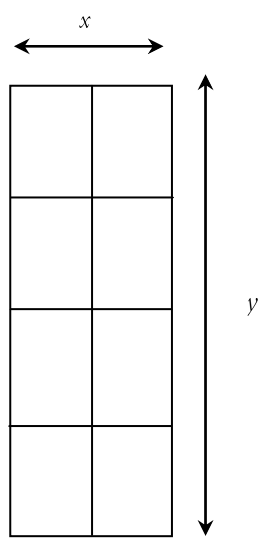
Partie 2

L'entreprise est aussi chargée de réaliser des stands dans une deuxième salle rectangulaire de longueur 60 m et de largeur 15 m. La hauteur sous plafond est de 4 m.

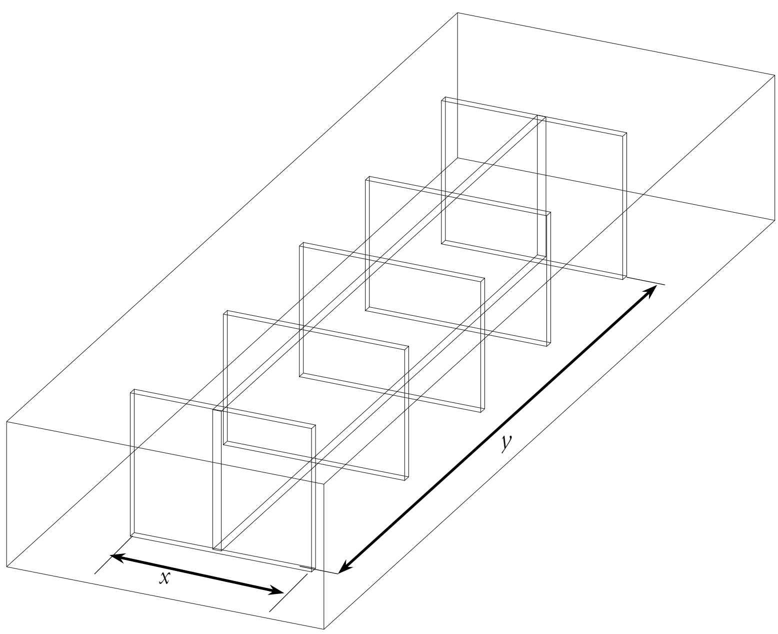
Les contraintes sont les suivantes :

- Il faut réaliser huit stands identiques en posant une cloison centrale de longueur y et cinq cloisons latérales chacune de longueur x. L'épaisseur des cloisons est considérée comme négligeable (voir dessin page 3 / 6).
- Les cloisons séparant les stands doivent atteindre le plafond.
- La réalisation doit se faire en utilisant exactement 400 m^2 de cloisons.
- Le volume total des stands doit être le plus grand possible.

Vue de dessus



Vue en perspective



Mise en situation

2.1. Montrer que l'aire totale A des cloisons latérales est $A = 20\,x$.

2.2. Calculer en fonction de x et de y l'aire totale de cloisons à utiliser. Vérifier alors que l'on doit avoir (d'après les contraintes) : $4y = 400 - 20\,x$.

2.3. Exprimer en fonction de x le volume total $V(x)$ des huit stands.

Etude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 15] par $f(x) = -20x^2 + 400x$.

2.4. Déterminer $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f.

2.5. Résoudre l'équation $f'(x) = 0$ sur [0 ; 15]. On note x_0 la solution. Calculer $f(x_0)$.

2.6. Compléter sur l'annexe page 5/6, le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 15].

2.7. Compléter sur l'annexe le tableau de valeurs.

2.8. Représenter graphiquement cette fonction en utilisant le repère orthogonal de l'annexe.

Exploitation

2.9. On admet que $V(x) = f(x)$. Déterminer la largeur l d'un stand pour laquelle le volume occupé par les huit stands est maximal.

2.10. Calculer alors la valeur de la longueur y correspondante. Cette implantation des stands est-elle compatible avec les dimensions de la salle ?

Annexe à rendre avec la copie

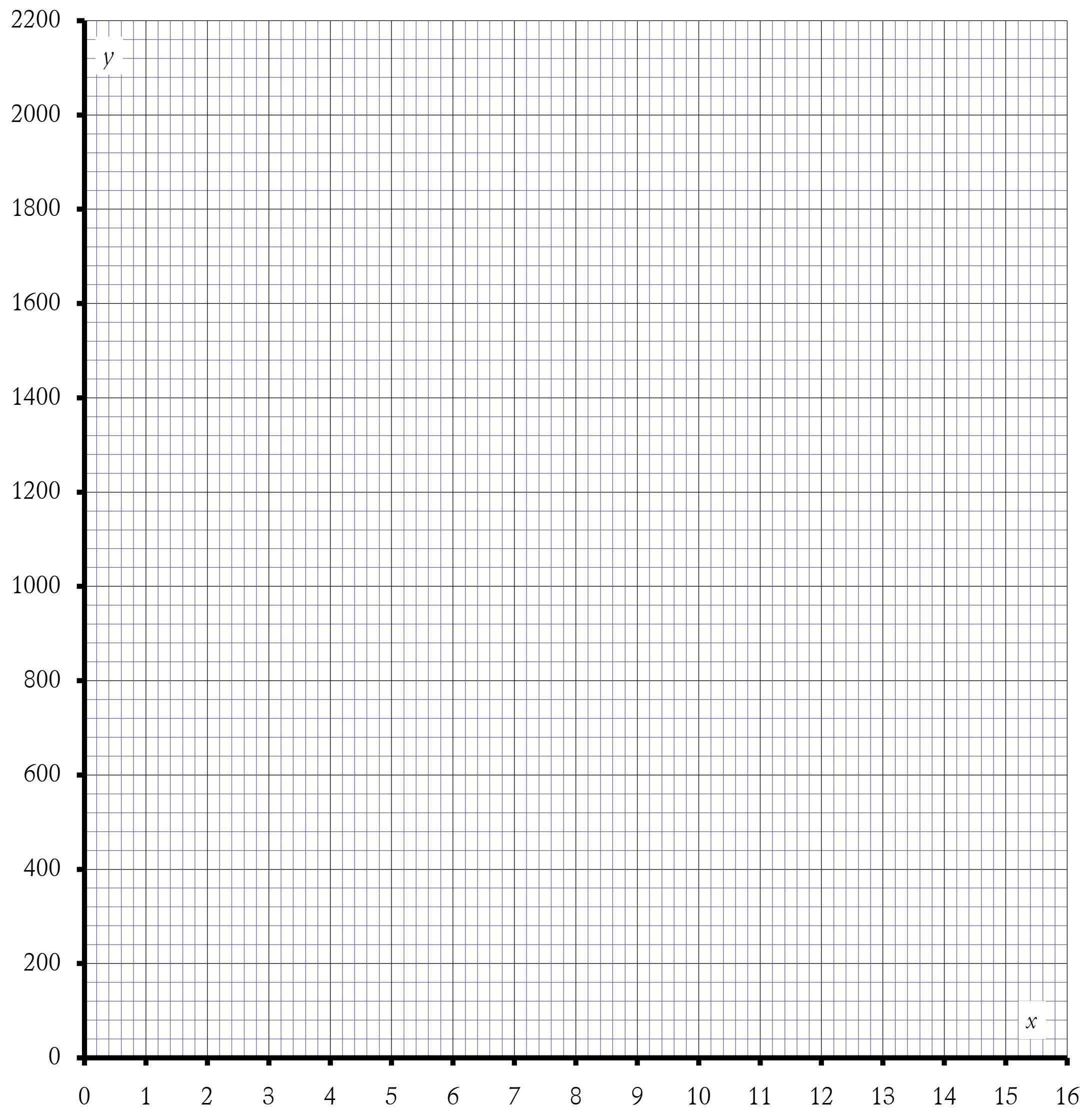
Exercice 2 : Tableau de variation, question 2.6.

x	0 15
Variation de f	

Exercice 2 : Tableau de valeurs, question 2.7.

x	0	3	6	9	10	15
$f(x)$						1 500

Exercice 2 : représentation graphique, question 2.8.



D'après Bac Pro aménagement-finition France 2004

1.2.16. Poutre

Partie 1

Une poutre homogène est en appui sur deux murs, comme le montre la figure 1 ci-contre.

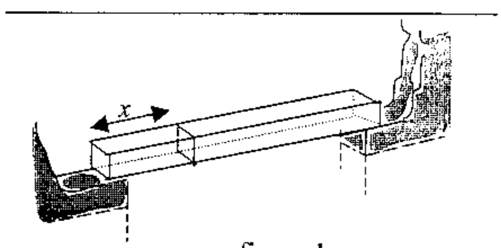


figure 1

Le moment fléchissant dans une section S de la poutre ayant pour abscisse x est donné par la formule :

$$Mf(x) = \frac{qx}{2}(l - x)$$

avec $Mf(x)$: moment fléchissant (en N.m) avec

q : charges linéaires réparties (en N/m)

l : longueur de la poutre (en m)

x : abscisse de la section (en m).

Calculs de moments :

1.1. Développer $M\,f(x)$ en fonction de x, q et l.

Dans toute la suite de l'exercice, on prend $q = 10\,000$ N/m et $l = 8$ m.

1.2. Calculer le moment fléchissant dans le cas particulier où $x = 3$.

Etude de fonction :

Soit h la fonction définie sur [0 ; 8] par $h(x) = -5\,000x^2 + 40\,000x$.

1.3. Calculer $h'(x)$ où h' est la dérivée de la fonction h.

1.4. Résoudre $h'(x) \geq 0$ sur l'intervalle [0 ; 8].

1.5. Etudier les variations de h sur l'intervalle [0 ; 8].

1.6. Quelle est la valeur du coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de h au point d'abscisse $x_0 = 4$ ¿

1.7. Compléter le tableau de valeurs de la fonction h :

x	0	2	3	3,5	4	4,5	5	8
$h(x)$		60 000			80 000	78 750	75 000	

1.8. Tracer la courbe représentative de la fonction h, dans un repère orthogonal : on prendra 2 cm pour une unité en abscisse ; 1 cm pour 5 000 en ordonnée.

Exploitation : On admet que $M\,f(x) = h(x)$ pour tout x de l'intervalle [0 ; 8].

1.9. Déterminer graphiquement pour quelles valeurs de x le moment fléchissant est supérieur à 78 000 N.m.

Laisser apparents les traits utiles à la lecture et exprimer le résultat à l'aide d'un intervalle.

Partie 2

La poutre est en fait du type IPE, et sa section est représentée figure 2 :

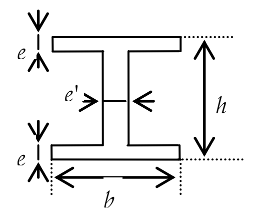


Figure 2

2.1. On donne $h = 300$ mm ; $b = 150$ mm et $e = 7{,}1$ mm.

2.1.1. Calculer l'aire de cette section en fonction de e'.

2.1.2. En déduire la valeur, en mm, de l'épaisseur e' de cette poutre sachant que l'aire de la section est égale à 5 188 mm². Arrondir le résultat au dixième.

2.2. La poutre a pour masse 348 kg. Sa longueur étant de 8 m, calculer sa masse par mètre, en kg/m.

2.3. On veut connaître la longueur maximale d'encombrement de la poutre, afin de prévoir son déplacement en toute sécurité.

On se place dans le repère orthonormal de la figure 3 où l'origine est O et l'unité de longueur est le mètre (échelle non respectée).

2.3.1. Donner les coordonnées des points O, A, B, C et D situés sur les sommets extérieurs de la poutre.

2.3.2. Calculer, en m, la distance OD qui représente la longueur d'encombrement lors de la manœuvre. Arrondir au centième.

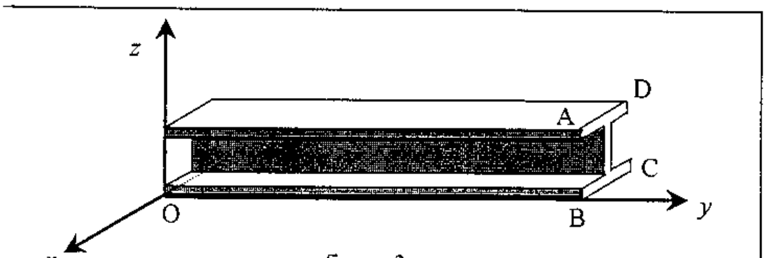
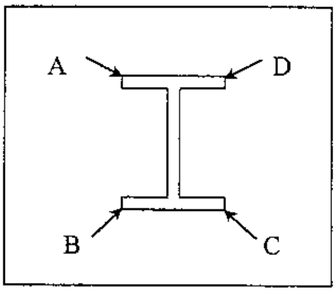


figure 3



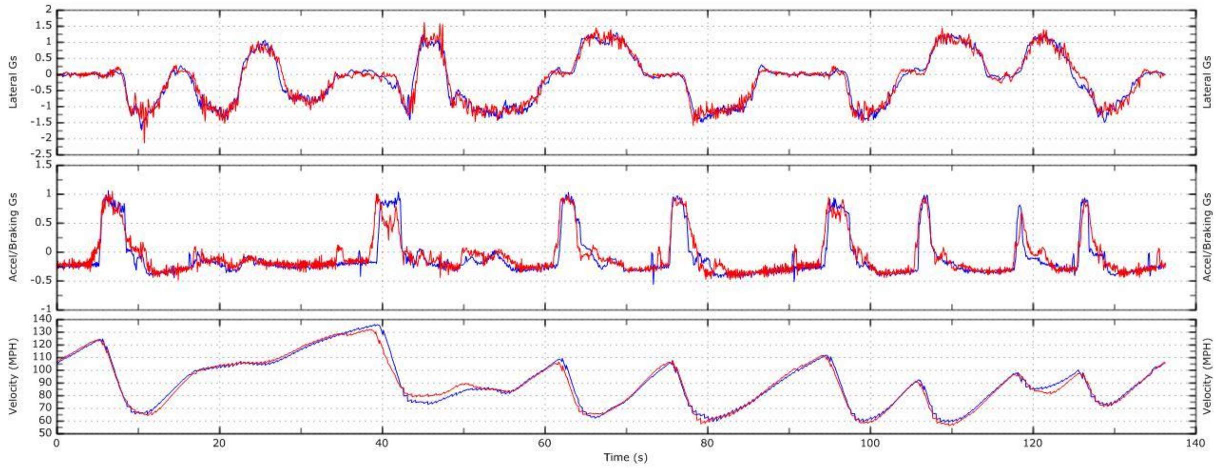
D'après Bac Pro aménagement-finition France 2003

1.2.17. Course automobile

Dans les compétitions automobiles, la stratégie de course, la « santé » de la mécanique et les performances (à la fois de la machine et du pilote) sont contrôlées à l'aide de la télémétrie.

Ces relevés fournissent de nombreuses informations (vitesse, accélérations, température….).

La représentation graphique de certaines d'entre elles est donnée ci-dessous.



À partir du relevé concernant la vitesse (graphique du bas), estimer l'accélération instantanée du véhicule aux instants 10 s, 30 s et 40 s.

Proposer trois intervalles sur lesquels l'accélération du véhicule semble :

* constante et positive,
* constante et négative.

1.2.18. La sécurité routière

L'objectif de cette évaluation est de vérifier les informations fournies par un document publié par la sécurité routière : en voiture, un choc à 50 km/h correspond à faire chuter du 3ème étage cette voiture.

Partie A : Calcul de l'énergie développée lors de la chute verticale d'un objet.

L'énergie E_p, en joules, développée lors de la chute verticale d'un objet de masse m, d'une hauteur h, exprimée en m, se calcule à l'aide de la relation suivante :

$$E_p = m \times g \times h \qquad \text{avec } g = 10 \text{ N/kg.}$$

1. Calculer l'énergie E_p développée lors d'une chute d'une hauteur de 3,5 m d'un véhicule de masse 1 200 kg.

2. La détermination de l'énergie E_p développée lors de la chute d'un véhicule d'une masse de 1 200 kg en fonction de la hauteur de chute x, exprimée en m, peut être modélisée à l'aide de la fonction f définie par $f : x \mapsto 12\,000\,x$.

Représenter graphiquement la fonction f définie sur [0 ;40].

3. Les grandeurs E_p et h sont-elles proportionnelles ¿ Justifier la réponse.

4. En supposant qu'un immeuble de trois étages a une hauteur de 10 m, déterminer graphiquement l'énergie E_p développée lors d'une chute verticale d'un véhicule de 1 200 kg de la hauteur de cet immeuble.

5. Calculer la valeur exacte de cette énergie E_p développée lors d'une chute verticale d'un véhicule de 1 200 kg de la hauteur de cet immeuble de 3 étages.

Partie B : Calcul de l'énergie de mouvement emmagasinée lors du déplacement d'un véhicule

L'énergie Ec, en joules, emmagasinée par un véhicule de masse m, exprimée en kg, lors d'un déplacement à la vitesse v, exprimée en m/s, se calcule à l'aide de la relation $E_c = \frac{1}{2} \times m \times v^2$.

1. Calculer l'énergie E_c emmagasinée lorsqu'un véhicule de 1 200 kg se déplace à la vitesse de 70 km/h.

Remarque : pour l'ensemble de l'exercice, on considère que 1 m/s = 3,6 km/h.

2. La détermination de l'énergie de mouvement E_c, en joules, emmagasinée lors du déplacement d'un véhicule d'une masse de 1 200 kg en fonction de la vitesse x, en m/s, peut être modélisée à l'aide de la fonction g définie par $g : x \mapsto 600x^2$.

À l'aide d'une calculatrice graphique :

a. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous :

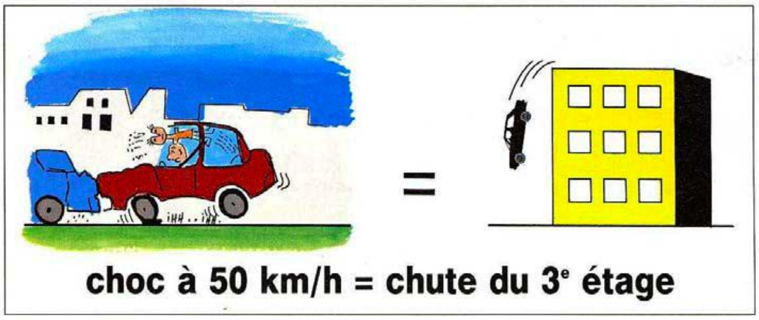
x	0	18	24	40
$g(x)$	……..	……….	………	……….

b. Représenter graphiquement la fonction g sur l'intervalle [0 ; 40].

c. Déterminer graphiquement la valeur de x appartenant à [0 ; 40] pour laquelle $f(x) = 120\,000$.

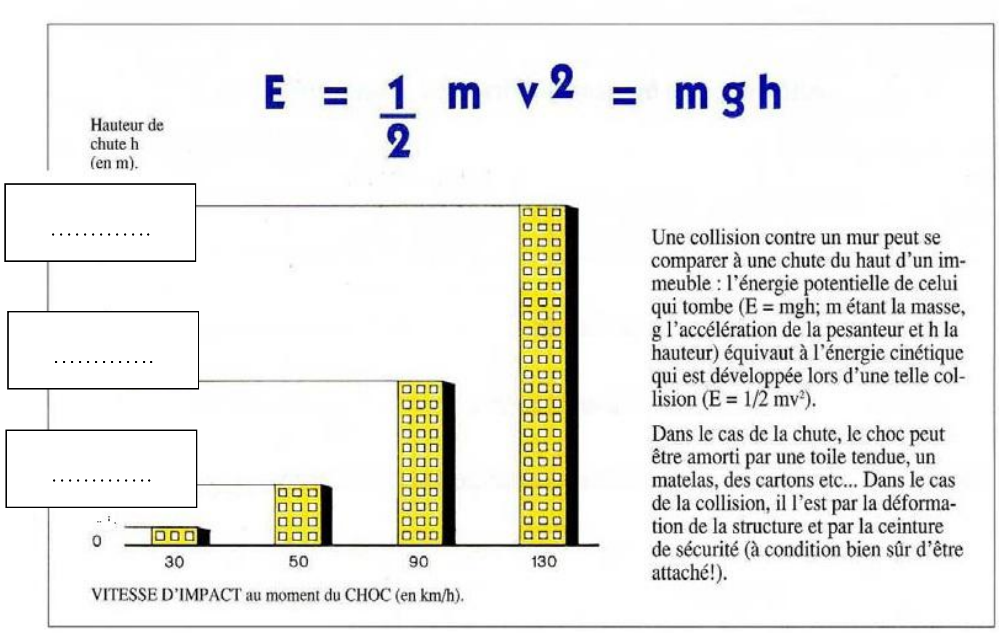
Partie C : Conclusion

1. En utilisant les résultats obtenus dans les parties A et B, commenter le dessin ci-dessous :

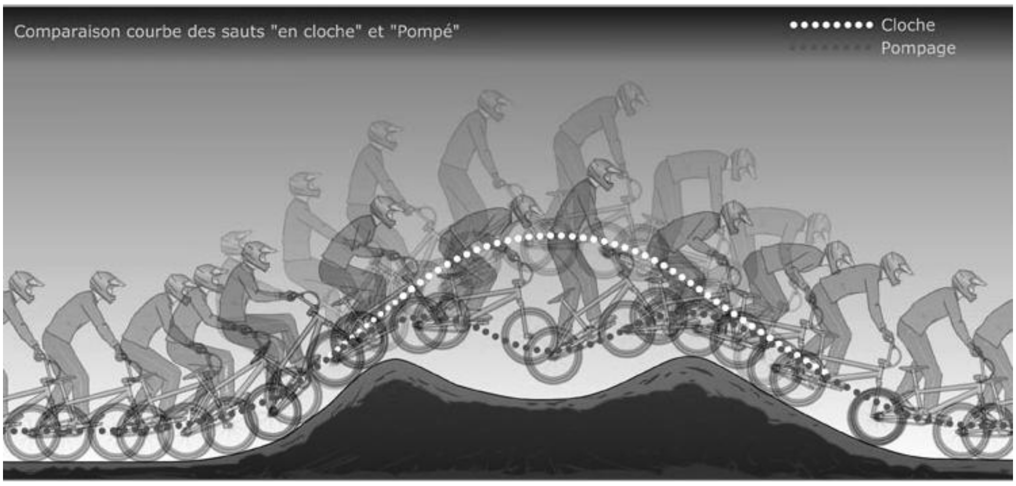


2. Complément pour un travail personnel

En utilisant le graphique de la partie A et la représentation graphique de la partie B, compléter le schéma de la sécurité routière suivant :



1.2.19. Le circuit de bmx



Le saut en cloche d'un pilote de BMX peut-être modélisé par une parabole. Pour construire le circuit de BMX, les organisateurs ont besoin de connaître l'équation de cette parabole, notamment pour déterminer la forme de la zone d'envol et de la zone de réception.

Un champion peut sauter jusqu'à 7 mètres en longueur pour environ 4 m de hauteur.

Quelle est dans ce cas, l'équation de cette parabole ?