

Avant-propos

Quelques explications... certainement nécessaires !

L'apprentissage des mathématiques en classe de Seconde prend dorénavant des formes variées à travers les différentes activités proposées aux élèves : il y a les heures de classe « normales », les heures de Travaux Dirigés (en salle informatique ou pas), les heures d'Accompagnement, éventuellement les heures de Méthodes et Pratiques Scientifiques en module d'exploration, sans parler des heures de rattrapage éventuel pendant les vacances scolaires ou de l'introduction de l'Algorithmique. Par ailleurs la latitude laissée aux Établissements d'organiser une partie des heures à leur guise laisse augurer des organisations encore inconnues à l'heure actuelle.

Bref, le bon vieux manuel traditionnel semble un peu « dépassé » et en tout cas ne semble plus répondre tout à fait aux attentes des enseignants et des élèves. Nous vous proposons donc un cahier d'une taille raisonnable, couvrant l'essentiel du programme de Seconde et destiné à être utilisé puis **conservé** par les élèves... Ce cahier peut également faire office de **cahier de vacances** afin de préparer au mieux l'entrée en Première.

Chaque chapitre comporte essentiellement cinq parties : test, cours, applications directes, situations intermédiaires, problèmes et prises d'initiative. Quelques symboles permettent également de voir rapidement dans quel cas de figure on se trouve (ce ne sont que des suggestions), permettant à chacun d'avancer à son rythme... et de mieux cibler ses efforts. Le dernier chapitre est consacré à l'utilisation de Geogebra pour diverses activités.



Accompagnement



MPS (méthodes et pratiques scientifiques)



Réflexion & recherche



Divertissement



Indispensable



Ordinateur indispensable

Test : il s'agit d'un test dont les items sont issus des exercices proposés par l'organisation PISA lors de ses différentes enquêtes (2000, 2003, 2006 et 2009) ; ce test doit permettre aux élèves d'évaluer leur démarche et au(x) professeur(s) de se faire une idée des difficultés prévisibles pour chacun. Nous recommandons de faire ces petits tests lors de séances d'accompagnement afin que chacun prenne conscience de la réalité sous-jacente à ce moment. Des duplicata vierges sont disponibles sur le site <http://laroche.lycee.free.fr>.

Cours : les notions à connaître sont listées et l'élève doit être capable de répondre directement sur le cahier. Le professeur (ou les parents) peut ainsi vérifier l'acquisition (au moins formelle) des éléments de base du cours... Des fiches vierges sont disponibles sur le site.

Exercices (applications, approfondissement, problèmes) : il y a environ 250 exercices dans le cahier. Pour certains on peut répondre directement sur le cahier (graphes par exemple). Quelques exercices sont indiqués pour MPS mais peuvent être également exploités en TD ou même en classe entière. Un certain nombre d'exercices sont en anglais... un anglais assez simple évidemment mais permettant de faire travailler quelques aspects de cette langue indispensable à tous. Ils sont du niveau GCSE (General Certificate of Second Education) correspondant au niveau atteint vers l'âge de 15-16 ans en Grande-Bretagne (grosso-modo le niveau est un peu au-dessus du Brevet).

Quelques questions ne sont pas traitées dans le cahier (trigonométrie surtout), elles feront l'objet d'exercices proposés sur le site.

De nombreux exercices sont **corrigés** sur le site <http://laroche.lycee.free.fr> afin d'aider les élèves souhaitant se perfectionner ou travailler durant les vacances ; on trouvera également des exemples de progression pour les guider. Ceci dit, toute remarque ou suggestion seront évidemment les bienvenues.

Les illustrations en tête de chapitre (sauf pour le 8, un ensemble de Julia dû à Jos Leys) sont des surfaces de l'espace réalisées à l'aide d'un logiciel de calcul scientifique, celles de fin de chapitre sont issues de motifs celtes d'entrelacement quand aux dessins humoristiques, ils sont dus à la main de Florence Bleuse.

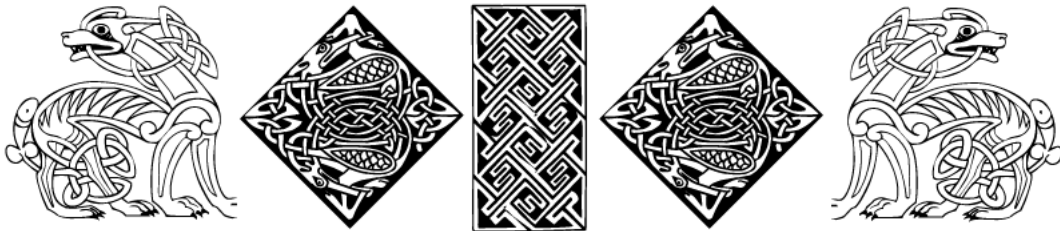
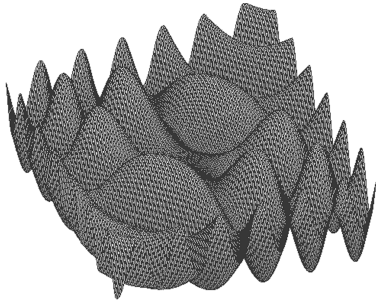


TABLE DES MATIÈRES

1. Pourcentages, problèmes et raisonnements	7	5.2 Un test	83
1.1 Je connais mon cours	7	5.3 Applications directes du cours	88
1.2 Résoudre des problèmes	8	5.4 Exercices intermédiaires	91
1.3 Des questions de réflexion	16	5.5 Mises en équation	95
1.4 Algorithmes	18	5.6 Algorithme/Calculatrice/Tableur	98
1.5 Pourcentages	20	5.7 Pour réfléchir et aller plus loin	101
1.6 La nébuleuse du Crabe	27	6. Fonctions	109
2. Logique	31	6.1 Je connais mon cours	109
2.1 Je connais mon cours	31	6.2 Un test	110
2.2 Un test	31	6.3 Applications directes du cours	114
2.3 Exercices	34	6.4 Exercices intermédiaires	120
3. Fonctions affines / droites	43	6.5 Exercices avec prise d'initiative	129
3.1 Je connais mon cours	43	6.6 Algorithme/Calculatrice	133
3.2 Applications directes du cours	44	6.7 Pour réfléchir et aller plus loin	135
3.3 Exercices intermédiaires	46	7. Probabilités et Statistiques	147
3.4 Exercices avec prise d'initiative	48	7.1 Je connais mon cours	147
3.5 Algorithme/Calculatrice	51	7.2 Un test	148
3.6 Pour réfléchir et aller plus loin	52	7.3 Applications directes du cours	154
3.7 Test GCSE	53	7.4 Exercices intermédiaires	159
4. Géométrie	59	7.5 Exercices avec prise d'initiative	165
4.1 Je connais mon cours	59	7.6 Algorithme/Calculatrice :	167
4.2 Un test	61	7.7 Pour réfléchir et aller plus loin	169
4.3 Applications directes du cours	65	7.8 Test GCSE	173
4.4 Exercices intermédiaires	67	8. GeoGebra	175
4.5 Exercices avec prise d'initiative	68	8.1 Présentation	175
4.6 Algorithme/Calculatrice	71	8.2 Recherche d'une position	176
4.7 Pour réfléchir et aller plus loin	72	8.3 Une étoile à 5 branches	180
4.8 Un peu d'espace	75	8.4 Réalisation d'une horloge	184
5. Calculs, Équations, Inéquations	81	8.5 Simulation de lancer de dés	186
5.1 Je connais mon cours	81		



6. Fonctions

6.1 Je connais mon cours

L' ensemble de définition d'une fonction c'est :		
L' image d'un nombre x est $f(x) = y$; x est un de y .		
Une fonction est dite croissante entre a et b si :		
Une fonction est dite décroissante entre a et b si :		
Un exemple pratique de fonction croissante :	Un exemple pratique de fonction décroissante :	
Si on a $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} > 0$ entre a et b alors f est ; lorsque le quotient est négatif, alors f est.....		
La fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ a une courbe appelée		
Son sommet est au point d'abscisse $x_0 = \dots\dots\dots$, $y_0 = \dots\dots\dots$		
On peut écrire $f(x) = \dots\dots\dots \left(x + \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \right)^2 + \dots\dots\dots$ (compléter les		
Je donne la forme des courbes correspondant aux différents cas : ($x_0 = -2$ par exemple)		
$a > 0, y_0 < 0$	$a > 0, y_0 = 0$	$a > 0, y_0 > 0$
$a < 0, y_0 < 0$	$a < 0, y_0 = 0$	$a < 0, y_0 > 0$

La fonction $f(x) = a + \frac{b}{x+c}$ a une courbe appelée

Son ensemble de définition est

Son sens de variation dépend de b : lorsque $b > 0$, f est ; lorsque $b < 0$, f est

Je donne la forme des courbes correspondant aux différents cas :

$b > 0$	$b < 0$
---------	---------

6.2 Un test

6.2.1 La meilleure voiture

Une revue automobile utilise un système de notation pour évaluer les nouvelles voitures et décerner le label de « Voiture de l'année » à la voiture dont la note totale est la plus élevée.

Cinq nouvelles voitures viennent d'être évaluées, et les notes qu'elles ont obtenues figurent dans le tableau ci-dessous.

Voiture	Dispositifs de sécurité (S)	Consommation de carburant (C)	Esthétique de la carrosserie (E)	Équipements intérieurs (T)
Ca	3	1	2	3
M2	2	2	2	2
Sp	3	1	3	2
N1	1	3	3	3
KK	3	2	3	2

Les notes s'interprètent comme suit : 3 points = Excellent ; 2 points = Bon ; 1 point = Moyen.

Question 1

Pour calculer la note totale de chaque voiture, la revue automobile utilise la règle suivante, qui est une somme pondérée des diverses notes obtenues :

$$\text{Note totale} = (3 \times S) + C + E + T.$$

Calculez la note totale obtenue par la voiture « Ca ». Écrivez votre réponse dans l'espace ci-dessous.

Note totale de la voiture « Ca » :

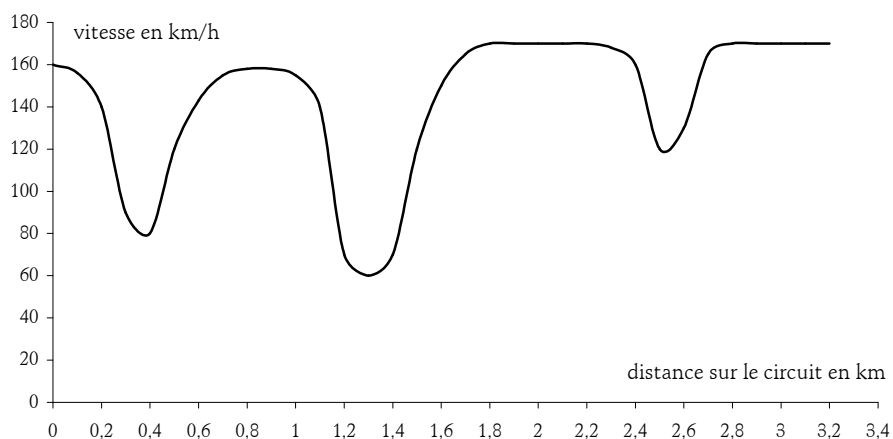
Question 2

Le constructeur de la voiture « Ca » estime que la règle utilisée pour calculer la note totale n'est pas équitable. Proposez une règle de calcul de la note totale qui permettrait à la voiture « Ca » de gagner.

Votre règle doit inclure chacune des quatre variables. Répondez en complétant par des nombres positifs les quatre pointillés de la formule ci-dessous.

$$\text{Note totale} = \dots \times S + \dots \times C + \dots \times E + \dots \times T.$$

6.2.2 Voiture de course



Ce graphique présente les variations de vitesse d'une voiture de course sur un circuit plat de 3 km au cours du deuxième tour.

Note : Le mot « plat » se réfère au niveau du sol, c'est-à-dire que le circuit ne présente aucune montée ni aucune descente.

Question 1

À quelle distance approximative de la ligne de départ se situe le début de la plus longue ligne droite du circuit ?

A. À 0,5 km.	B. À 1,5 km.	C. À 2,3 km.	D. À 2,6 km.
--------------	--------------	--------------	--------------

Expliquez votre réponse.

Question 2

Où a-t-on enregistré la vitesse la plus basse au cours du second tour ?

A. À la ligne de départ.	B. À environ 0,8 km.	C. À environ 1,3 km.	D. À mi-parcours du circuit.
--------------------------	----------------------	----------------------	------------------------------

Expliquez votre réponse.

Question 3

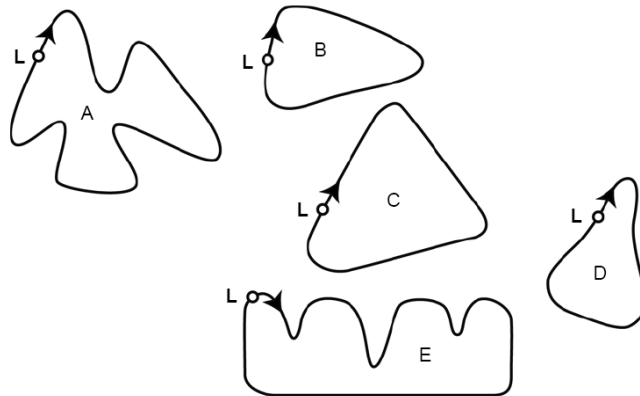
Que pouvez-vous dire de la vitesse de la voiture entre les bornes de 2,6 km et de 2,8 km ?

A. La vitesse de la voiture est constante.	B. La vitesse de la voiture augmente.
C. La vitesse de la voiture diminue.	D. La vitesse de la voiture ne peut être déterminée à partir du graphique.

Expliquez votre réponse.

Question 4

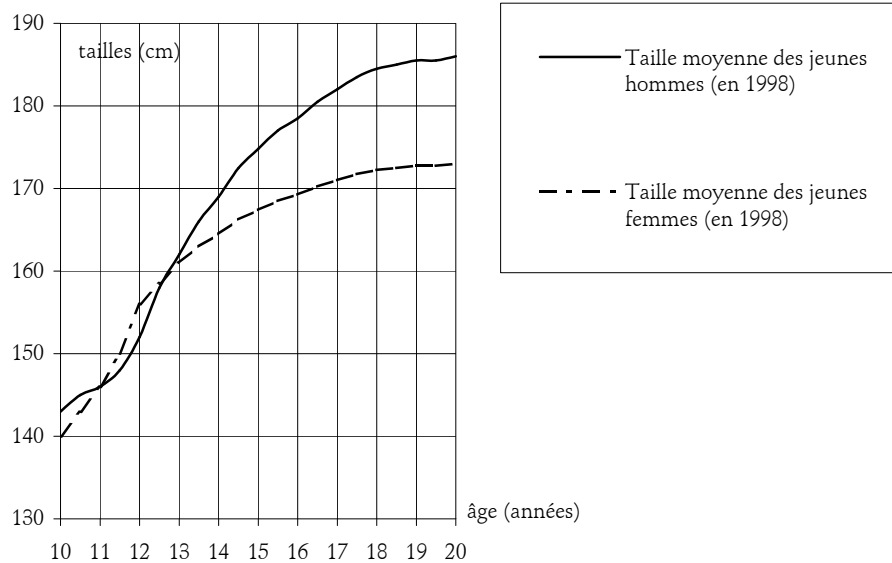
Voici le tracé de cinq circuits :
Sur lequel de ces circuits la voiture roulait-elle lors de l'enregistrement du graphique de vitesse présenté au début de l'exercice ?



L : Ligne de départ

Expliquez votre réponse.

6.2.3 Croissance : les jeunes deviennent plus grands



La taille moyenne des jeunes hommes et des jeunes femmes aux Pays-Bas en 1998 est représentée par le graphique ci-dessus.

Question 1

Depuis 1980, la taille moyenne des jeunes filles de 20 ans a augmenté de 2,3 cm, pour atteindre 170,6 cm. Quelle était la taille moyenne des jeunes filles de 20 ans en 1980 ?

Réponse :cm

Question 2

Expliquez en quoi le graphique montre qu'en moyenne, la croissance des filles est plus lente après 12 ans.

Question 3

D'après ce graphique, pendant quelle période de leur vie les jeunes filles sont-elles, en moyenne, plus grandes que les jeunes hommes du même âge ?

6.2.4 Pisa 2009 : Cell growth

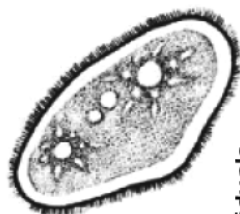
Doctors are monitoring the growth of cells. They are particularly interested in the day that the cell count will reach 60 000 because then they have to start an experiment. The table of results is :

Time (days)	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
Cells	597	893	1 339	1 995	2 976	4 434	6 606	9 878	14 719	21 956	32 763

When will the number of cells reach 60 000 ?

6.2.5 Pisa 2009 : Prey-Predator

The following graph shows the growth of two living organisms: the Paramecium and Saccharomyces :

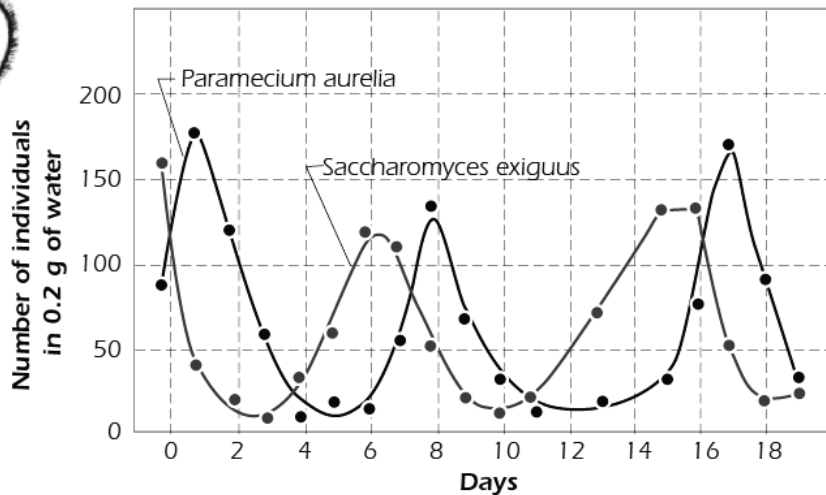


Paramecium



Saccharomyces

Prey-Predator Model



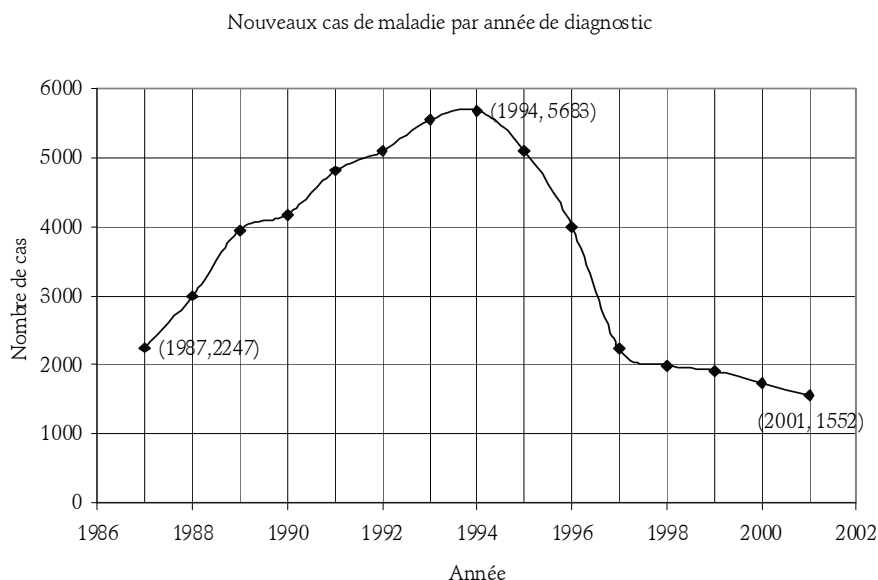
One of the two animals (predator) eats the other one (prey). Looking at the graph, can you judge which one is the prey and which one the predator ?

One property of prey-predator phenomena is expressed as : "The rate of growth of predators is proportional to the number of available prey".

Does this property hold for the above graphs ?

6.3 Applications directes du cours

6.3.1 Maladie



L'évolution d'une maladie entre 1987 et 2001 est modélisée par une fonction f dont la représentation graphique est donnée ci-dessus.

1. Tracer le tableau de variations de cette fonction sur l'intervalle $[1987 ; 2001]$.
2. Sur quelle période y a-t-il une augmentation du nombre de nouveaux cas de maladie ?
3. Quel est le nombre maximum de nouveaux cas déclarés ? En quelle année ?
4. On a relevé le nombre des nouveaux cas entre 1998 et 2001 dans le tableau suivant :

Année	1998	1999	2000	2001
Nombre de nouveaux cas	1908	1777	1668	1552

De quel pourcentage le nombre de nouveaux cas varie-t-il entre 1998 et 1999, entre 1999 et 2000, puis entre 2000 et 2001 ? Arrondir les pourcentages à l'unité.

5. On suppose qu'à partir de 2001 le nombre de nouveaux cas de maladie diminue chaque année de 7 %.

Quel est le nombre de nouveaux cas de maladie que l'on peut estimer pour 2003 ? Pour 2004 ?

6.3.2 Plus basique tu meurs...

Soit la fonction f définie sur $[-4; 8]$ par

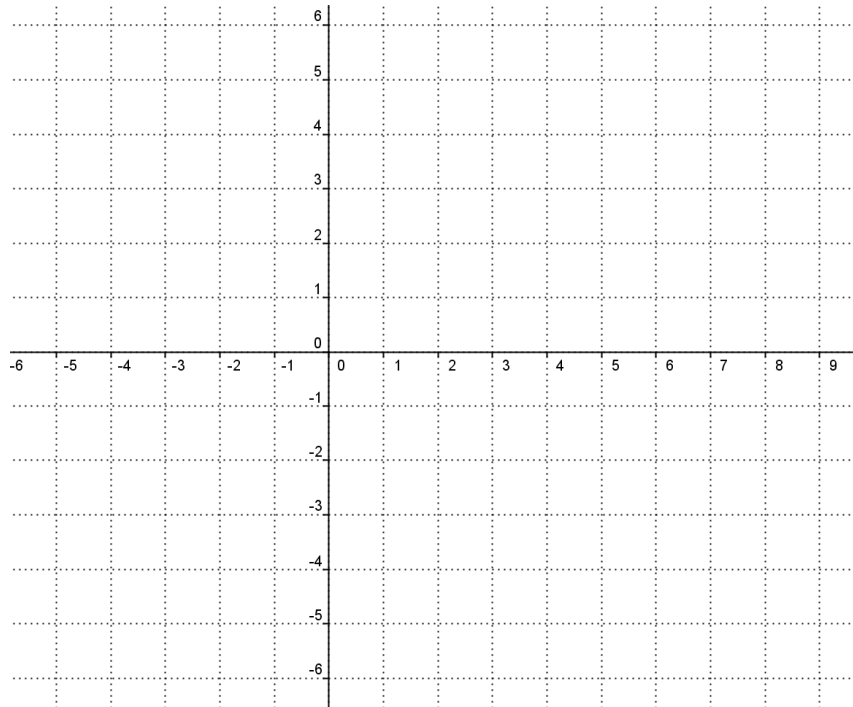
$$f(x) = -0,2x^2 + x + 2.$$

1. Tracez ci-contre sa représentation graphique (C).

2. Dressez le tableau de variations de f (page suivante).

Précisez les coordonnées de son maximum à 10^{-2} près.

Déterminez graphiquement son signe.



x	-4	8
$f(x)$		
Signe		

3. Complétez la table de valeurs suivante à 10^{-1} près.

x	-4	-3	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
$f(x)$											
x	5	5,5	6	6,2	6,4	6,5	6,6	6,8	7	7,5	8
$f(x)$											

4. Sur la figure indiquez en rouge les valeurs de x pour lesquelles $f(x)=0$ puis celles pour lesquelles $f(x)=-2$.

5. Donnez une valeur approchée des valeurs de x pour lesquelles $f(x)=0$ à 10^{-3} près.

6. a. Tracez sur la figure la droite (d) d'équation $y = -0,5x + 3$.

b. Déterminez graphiquement les coordonnées des points d'intersection de (C) et (d).

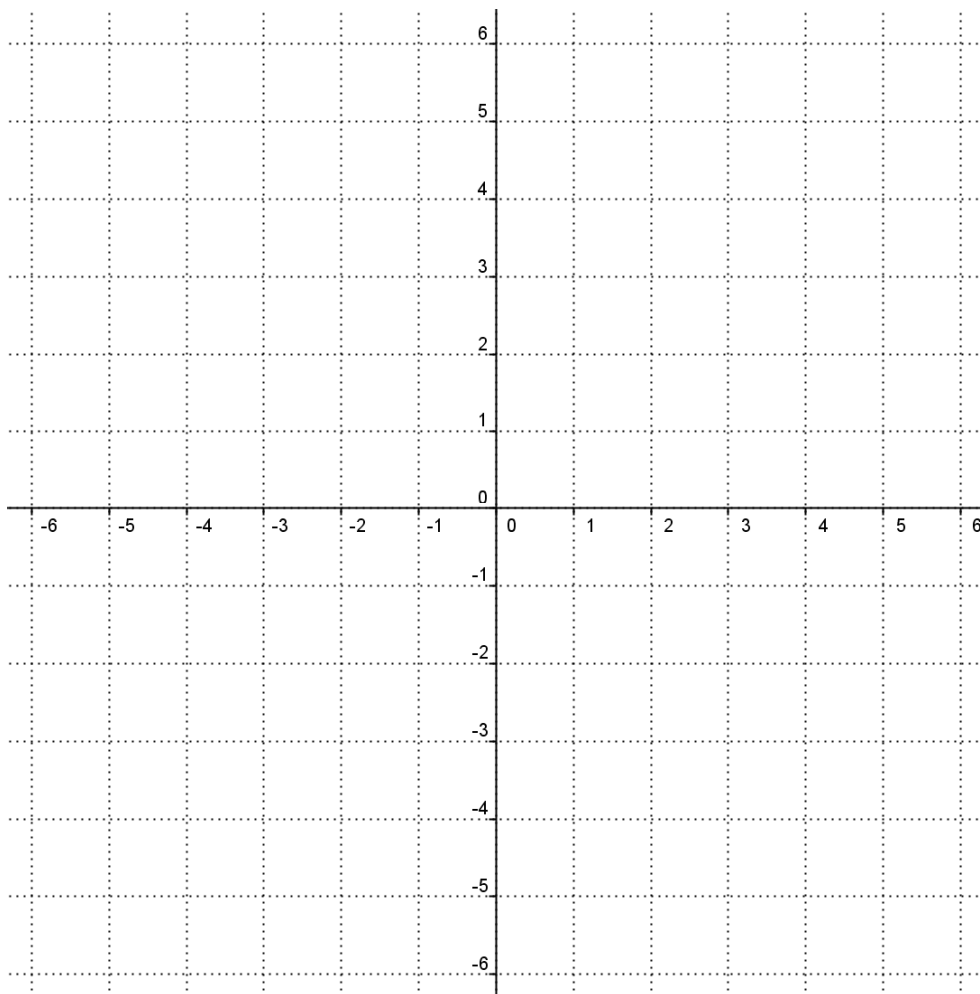
c. Déterminez graphiquement puis avec le zoom de votre calculatrice les valeurs de x pour lesquelles (C) est au-dessus de (d).

6.3.3 It's ultra basic

Pour chacune des fonctions suivantes :

- tracer la courbe sur l'intervalle $[-5 ; 5]$;
- dresser son tableau de variation sur cet intervalle ;
- donner un programme de calcul ; vérifier votre programme de calcul pour $x = -2$ puis $x = 0,5$;
- justifier son sens de variation.

$$f(x) = -\frac{3}{4}x - 1 ; g(x) = 1 + \frac{3}{x-2} ; h(x) = 0,5x^2 + x - 2 .$$

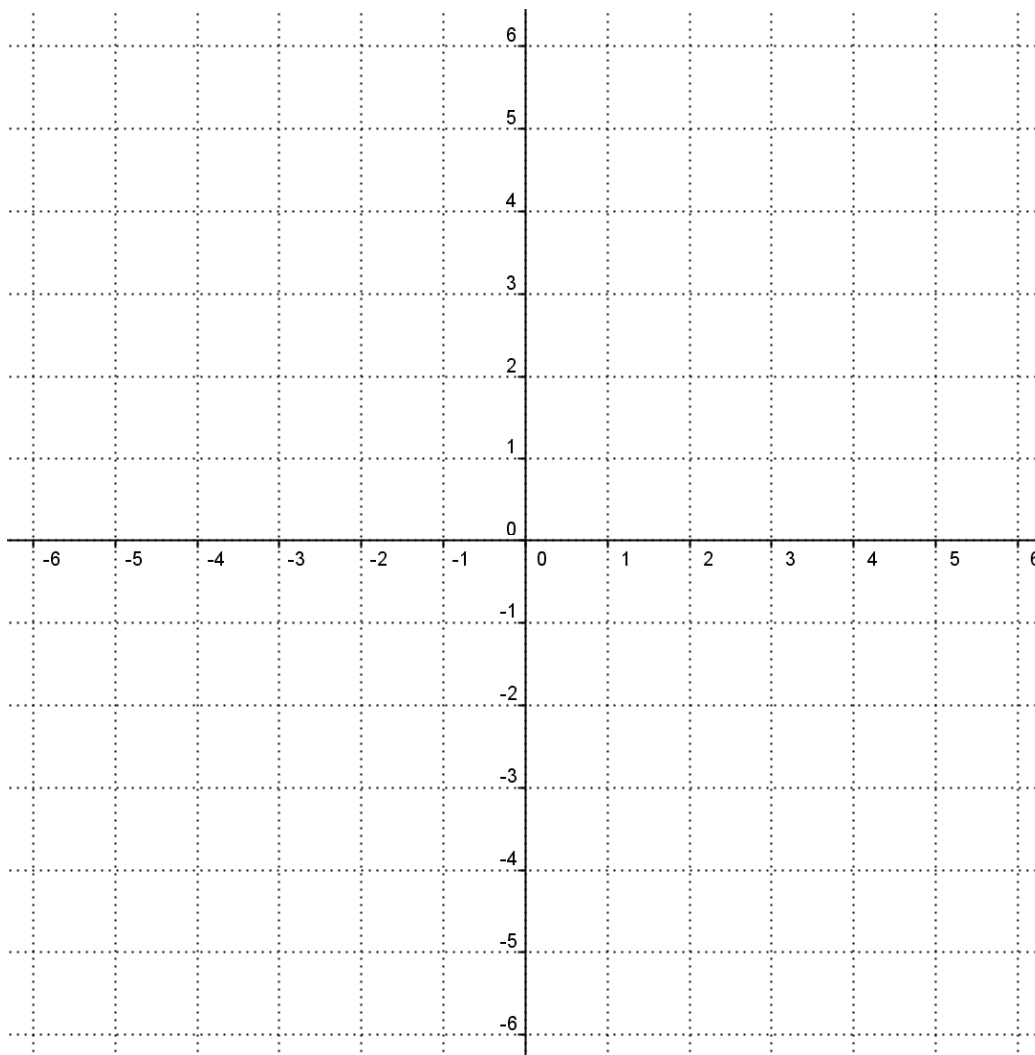


6.3.4 Parabole

Soit la fonction $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$ définie sur l'intervalle $[-6 ; 6]$.

1. a. Vérifier que $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$. Dresser son tableau de variation.
- b. Donner un programme de calcul pour f . Vérifiez pour -1 et 3 . Justifier son sens de variation.
2. Tracer sa courbe représentative (C) dans le repère ci-dessous.
3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$.
4. Tracer sur la même figure la droite (AB) où A a pour coordonnées $(-2, 4)$ et $B(1, 0)$; trouvez graphiquement les points d'intersection de (C) et de (AB).

5. Déterminez l'équation de la droite (AB) et vérifiez par le calcul ce que vous avez trouvé au 4.
6. Déterminez graphiquement les abscisses des points du plan pour lesquels la droite (AB) est au-dessus de (C) .

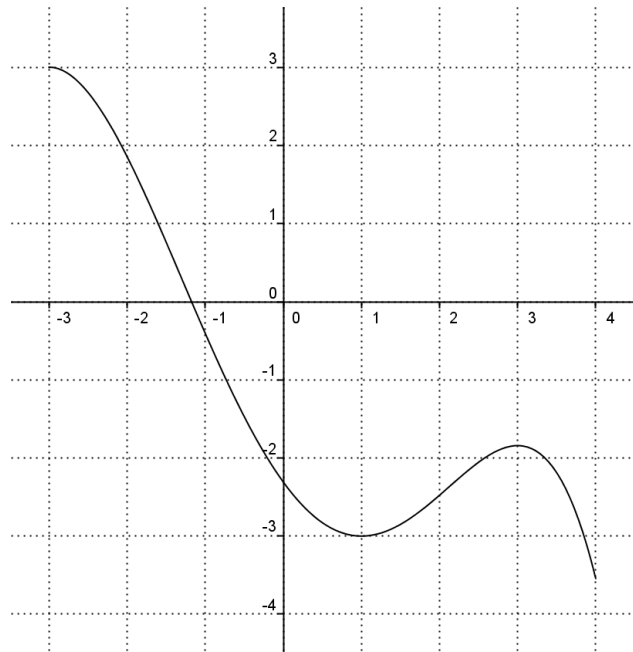


6.3.5 Lecture graphique very of base

Le graphique ci-contre représente la courbe d'une fonction f sur l'intervalle $[-3; 4]$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-3; 4]$.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .
3. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en **justifiant** votre réponse :
 - a. f est négative sur $]-2; 1[$.
 - b. Si on a pour deux nombres a et b tels que $-2 \leq a \leq b \leq 0$ alors

$$-3 \leq f(b) \leq f(a) \leq 3.$$
 - c. L'équation $f(x) = -2$ a 4 solutions sur $[-3; 4]$.
 - d. On a $f(-3) < f(3)$ car f est croissante sur l'intervalle $[-3; 3]$.

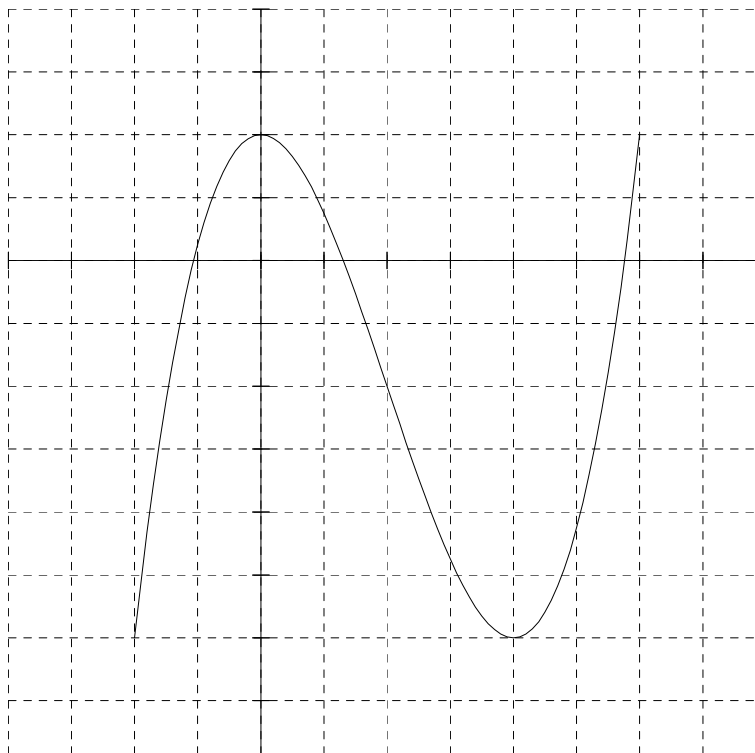


6.3.6 Quadratic (GCSE)

1. The average safe braking distance, d yds (yards), for vehicles is given by the equation $d = \frac{v^2}{50} + \frac{v}{3}$ where v is the speed of the vehicle in mph (miles per hour).
 - a. Draw up a table of values for d . Let v take values from 0 to 80 in steps of 10.
 - b. Draw the graph of $d(v)$ using v as the horizontal axis.
 - c. Use your graph to find the safe braking distance when the vehicle is travelling at :
 - i. 15 mph
 - ii. 45 mph
 - iii. 75 mph.
 - d. A driver suddenly sees an obstruction 50 yards ahead. She just stops in time. How fast was she travelling when she first saw it ?
2. Amelia has a piece of pipe 40 cm long. She bends it into a rectangle of length x cm.
 - a. Show that the area of the rectangle is given by the equation $A = 20x - x^2$.
 - b. Draw up a table and draw the graph of A for values of x from 0 to 20.
 - c. Use your graph to find :
 - i. the area when $x = 3.6$ cm,
 - ii. the length and breadth of the rectangle when the area is 98 cm^2 ,
 - iii. the maximum area of the rectangle,
 - iv. the equation of the line of symmetry on the graph,
 - v. the dimensions of the rectangle which has the maximum area.
3. Sam, *the human cannonball*, is fired from a gun to land on a platform 40 m high. The equation of his path is given by $h = x - \frac{x^2}{360}$, where x is the horizontal distance in metres.
 - a. Complete a table of values for h and x , for values of x from 0 to 60.

- b. Draw the graph of h against x .
 c. How far from the gun horizontally is the platform ?

6.3.7 Courbe inconnue



Cette courbe est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

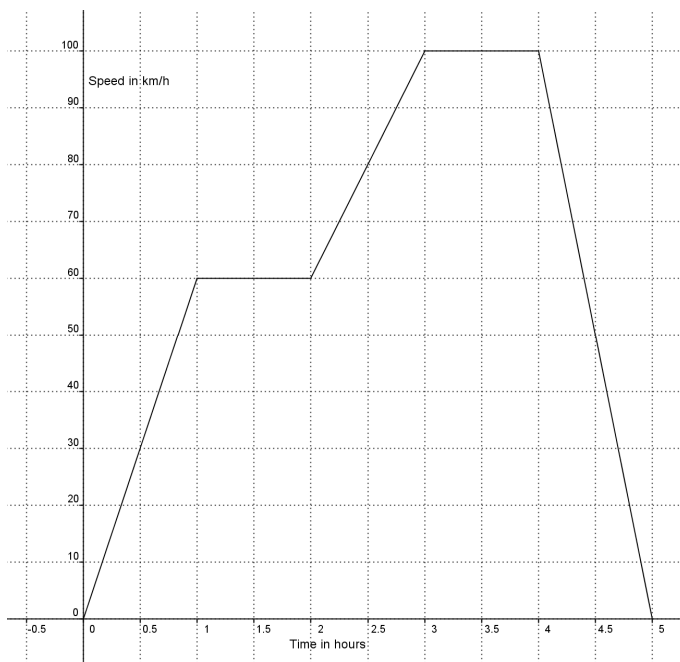
- Décrire les variations de f sous forme d'un tableau de variations.
- Déterminer graphiquement une valeur approchée des solutions de l'équation $f(x)=1$ puis toujours graphiquement une valeur approchée de l'image de 2.
- Tracer sur la même figure la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x)=x-2$.
- Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$.
- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)>g(x)$.
- Ernest Guevara, élève appliqué bien qu'un peu dissipé, se demande s'il ne pourrait pas trouver une expression de f ; il tient le raisonnement suivant :

« la courbe coupe l'axe (Ox) en $-1, 1,3$ et $5,8$; on doit donc pouvoir mettre f sous la forme

$$f(x) = (x+1)(x-1,3)(x-5,8) \text{ »}.$$

- Que pensez-vous de ce raisonnement : il est tout à fait juste, à peu près juste, presque faux, complètement nul... ?
- En traçant l'expression de f donnée par Ernest G. sur la représentation précédente pouvez-vous dire que cette écriture de f permet de retrouver algébriquement le signe de f ? Quel autre moyen de contrôle avez-vous ?
- Déterminez par le calcul le signe de $F(x) = (x+1)(x-1,3)(x-5,8)$.

6.3.8 Train journey



This is a speed-time graph of a train journey.

- Calculate the distance travelled in :
 - * The first two hours.
 - * The last two hours.
- Calculate the total distance travelled.

6.4 Exercices intermédiaires



6.4.1 Junk food...

Un lycéen se rend dans un fast-food où il mange deux « big rapidmachinchose », hamburgers géants (1 acheté = 1 offert avec sa carte de lycéen) et une grande portion de frites (160 g). Ce repas constitue un apport de 90 g de lipides.

En fin d'après-midi, après une sortie au cinéma avec des amis, il effectue un nouveau passage au fast-food où cette fois il consomme un nouvel hamburger géant et deux portions de frites. Ce diner constitue un apport de 93 g de lipides.

- Déterminez la teneur en lipides (en g) d'un hamburger et d'une portion de frites.
- Que remarquez-vous quant à l'apport journalier total en lipides du lycéen par rapport à l'apport journalier recommandé (AJR) ?
- Une cuillère à soupe d'huile végétale constitue un apport d'environ 3,3 g de lipides. Combien de cuillères d'huile devriez-vous avaler pour absorber l'équivalent en lipides d'un hamburger ?

6.4.2 Autocollant

Une entreprise de dépannage en appareils électroménagers vient d'acquérir un nouveau véhicule et décide alors de poser sur les portières un autocollant publicitaire. On cherche à déterminer les dimensions à donner à cet autocollant pour assurer sa lisibilité sans nuire à l'esthétique du véhicule.

La place disponible est un rectangle de longueur 120 cm et de largeur 80 cm.

La forme et la disposition de l'autocollant ABCDEFGH dans le rectangle sont indiquées dans la figure ci-dessous. Elles dépendent de la distance x .

Partie A : Travail sur Geogebra.

1. Représenter la figure ci-dessus en respectant les unités : on prendra un point M sur l'axe des abscisses dont l'abscisse donnera x .

On rappelle que l'abscisse ou l'ordonnée d'un point M peuvent s'utiliser dans la ligne de saisie en appelant les fonctions $x(\mathbf{M})$ ou $y(\mathbf{M})$. Par exemple on peut définir G par $G=(x(\mathbf{F}), y(\mathbf{F})-10)$.

2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles le polygone ABCDEFGH reste semblable à un U renversé.

3. Faire calculer l'aire z de l'autocollant ABCDEFGH par Geogebra. En déplaçant M dire quand z est croissante ou décroissante.

4. Tracer la courbe permettant de visualiser z en fonction de x . On pourra utiliser l'outil « lieu de points » intelligemment (mais ce n'est pas une obligation, il y a d'autres moyens).

4. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $z = 3000 \text{ cm}^2$.

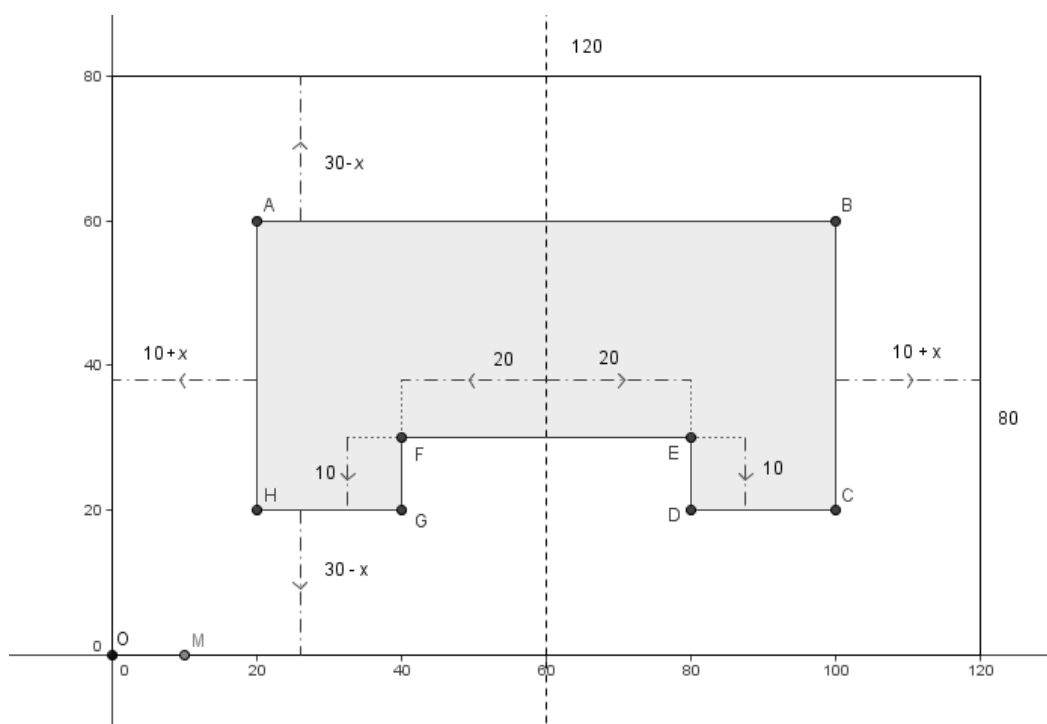
5. Quelle est l'aire maximale de l'autocollant ? Pour cette aire, déterminer AB et AH en cm.

Partie B : Calcul de l'aire de l'autocollant

1. Calculer l'aire du rectangle FEDG en fonction de x .

2. Exprimer en fonction de x l'aire du rectangle ABCH.

3. En déduire que l'aire A , en cm^2 , de l'autocollant ABCDEFGH est : $A(x) = -4x^2 + 160x + 1600$.



Partie C : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 30]$ par $f(x) = -4x^2 + 160x + 1600$.

1. Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	0	5	10	15	20	25	30
$f(x)$							

- Vérifier que $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = -4(x-20)^2 + 3200$. En déduire le sens de variation de f lorsque $x < 20$ puis lorsque $x > 20$.
- Compléter le tableau de variation de f .

x	0	30
variation de f		

- Tracer la courbe représentative de f en utilisant Geogebra (nouveau fichier). Comparez avec le résultat de la partie A.

Partie D : Recherche de valeurs de x

- Déterminer graphiquement les valeurs de x en cm pour lesquelles l'aire $f(x)$ de l'autocollant est égale à 3000 cm^2 . Laisser apparents les traits nécessaires à la lecture. Déterminer les valeurs cherchées par le calcul.
- Quelle est l'aire maximale de l'autocollant ? Pour cette aire, déterminer AB et AH en cm.
- Un rectangle de longueur L et de largeur l a une forme « parfaitement équilibrée » si : $\frac{L}{l} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$ (1) (φ est appelé « nombre d'or »).
 - Pour $L = 2(50 - x)$ et $l = 2(10 + x)$, montrer que la relation (1) s'écrit : $50 - x = \varphi \times (10 + x)$.
 - Résoudre cette équation. En remarquant que $AB = L$ et $AH = l$, en déduire sans calcul, l'aire d'un autocollant de forme équilibrée.
- Faire une figure exacte avec Geogebra.

6.4.3 Production

On souhaite implanter une nouvelle entreprise pour fabriquer en grande série un article existant déjà sur le marché dont le prix de vente moyen est de 51 euros.

Les frais fixes de production s'élèvent à 20 000 euros et le coût de fabrication de chaque article est de 40 euros. Le coût total d'une production est la somme du coût de fabrication de cette production et des frais fixes.

Le nombre d'articles vendus est donné par : $D(p) = 13\,000 - 200p$ où p est le prix de vente en euros d'un article.

A. On étudie deux stratégies commerciales.

Stratégie n°1 : on fixe un prix de vente de lancement à 49 euros, inférieur au prix de vente moyen, afin de promouvoir cet article.

- Calculer le nombre d'articles vendus pour un prix de 49 euros.
- Calculer le montant de la recette correspondant à la vente de ces articles.
- Calculer le coût total.
- En déduire le bénéfice réalisé pour ce prix de vente.

Stratégie n°2 : On cherche un prix assurant le bénéfice maximal.

- Le bénéfice B réalisé pour un prix de vente p (en euros) est donné par la formule :

$$B(p) = D(p) \times (p - 40) - 20\,000.$$

Montrer que le bénéfice $B(p)$ s'écrit : $B(p) = -200p^2 + 21\,000p - 540\,000$.

b. Déterminer les valeurs de p pour lesquelles le bénéfice est nul.

On considère la fonction f définie sur $[45 ; 60]$ par $f(x) = -200x^2 + 21\,000x - 540\,000$.

c. Déterminez à la calculatrice les variations de f et dresser son tableau de variation.

f. Pour quelle valeur de x la fonction f est-elle maximale ?

B. Bilan

Déduire de l'étude précédente le prix de vente de l'article assurant le bénéfice maximal et donner le montant de ce bénéfice.

6.4.4 Reprographie

1. Une entreprise de reprographie fait procéder à une étude de marché. Elle prévoit de vendre des affiches dont le coût de revient est de 12 euros l'unité.

Le prix de vente d'une affiche est de 20 euros pour une commande de base de 1 000 affiches.

Pour chaque lot supplémentaire de 250 affiches, s'ajoutant à la commande de base, le prix de vente de chacune des affiches diminue de 1 euro.

L'entreprise veut déterminer le nombre de lots supplémentaires de 250 affiches qu'elle doit vendre pour obtenir un bénéfice maximum.

a. Compléter le tableau suivant dans lequel n représente le nombre de lots supplémentaires de 250 affiches. On considère que n appartient à l'intervalle $[0 ; 8]$.

Nombre de lots supplémentaires	Nombre d'affiches commandées	Prix de vente unitaire (en euros)	Prix de vente total (en euros)	Coût de revient total (en euros)	Résultat R (en euros)
0	1000	20	20 000	12 000	
1	1250	$20 - 1 = 19$			
2	1500	18			
n	$1000 + 250n$	$20 - n$	$(1000 + 250n) \times (20 - n)$	$12(1000 + 250n)$	

b. Montrer que le résultat (ou bénéfice) R peut s'écrire : $R = -250n^2 + 1000n + 8000$.

2. Soit la fonction f définie, sur l'intervalle $[0 ; 8]$, par $f(x) = -250x^2 + 1000x + 8000$.

a. Écrire un algorithme et le programmer pour calculer les valeurs de f avec un pas de 1.

b. Vérifier que $f(x) = -250[(x-2)^2 - 36]$.

c. Représenter graphiquement cette fonction sur l'intervalle $[0 ; 8]$ dans le repère ci-dessous.

d. Déterminer, à l'aide du graphique, la valeur de x pour laquelle la fonction passe par un maximum.

e. Étudier les variations de f à l'aide du 2. a. Retrouver la réponse du 2. c.

f. Factoriser f et résoudre l'inéquation $f(x) \leq 0$.

3. À partir de l'étude mathématique précédente :