Classe de Seconde

Systèmes

1. Démonstration de cours

Démontrer que les droites (d) et (d') d'équations réduites respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si (en abrégé ssi) leurs coefficients directeurs respectifs m et m' sont égaux.

2. Presque du cours

1. Inventer un système d'équations ayant comme unique solution le couple $(2\,;-3)$.

2. Inventer un système d'équations ayant une infinité de solutions dont les couples $(1\,;\,3)$ et $(5\,;\,-1)$.

3. Inventer un système d'équations n'ayant aucune solution.

Correction

1. $4\times 2-3=5$ et $2+5\times(-3)=-13$. Donc $(2\,;-3)$ est "une" solution du système $\begin{cases} 4x+y=5 \\ x+5y=-13 \end{cases}$.

Ce système n'a-t-il qu'une seule solution ? Oui, car son déterminant associé est non nul : $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=19$. Ce système répond à la question.

2. Ce système a forcément pour solutions tous les couples de coordonnées des points de la droite qui passe par les points $A(1\,;\,3)$ et $B(5\,;\,-1)$. Cherchons l'équation réduite de cette droite :

$m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\ldots=-1$ et $p=y_A-mx_A=\ldots=4$. Ainsi (AB) : $y=-x+4$. $(1\,;\,3)$ et $(5\,;\,-1)$ sont des solutions.

Le système doit alors être constitué de deux équations proportionnelles : $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{cases}$.

3. Faisons simple ! Il est absurde qu'une quantité, $x + y$ par exemple, ait deux valeurs distinctes 2 et 7. Le système $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=7 \end{cases}$ répond bien à la question.

3. Résolution (c)

1. Sans les résoudre, donner le nombre de solutions des systèmes suivants :

a. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1 \\ x-2y=-1 \end{cases}$; b. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-2y=1 \\ -3x+18y=0 \end{cases}$; c. $\begin{cases} 4x-2y=6 \\ -6x+3y=-9 \end{cases}$

2. Résoudre ensuite chacun des systèmes par la méthode de votre choix.

<u>Correction</u>

1. a. Le déterminant vaut : $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \ldots = -\dfrac{4}{3} \neq 0$. Donc le système admet un unique couple solution.

b. Le déterminant vaut : $\begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & -2 \\ -3 & 18 \end{vmatrix} = \ldots = 0$. Donc aucun couple solution ou une infinité.

2nd déterminant : $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 18 & 0 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$. Donc le système n'admet aucun couple solution.

c. Le déterminant associé vaut : $\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \ldots = 0$. Le système n'admet aucun couple solution ou en admet une infinité. 2nd déterminant : $\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 3 & -9 \end{vmatrix} = \ldots = 0$. Le système admet une infinité de couples solution.

2. a. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1 \\ x-2y=-1 \end{cases}$. On peut isoler x dans la 2nde ligne et on trouve après calcul : $S=\left\{\left(\dfrac{5}{4};\dfrac{9}{8}\right)\right\}$, c'est l'unique couple solution.

b. $\begin{cases} \dfrac{x}{3}-2y=1 \\ -3x+18y=0 \end{cases}$. On sait que ce système n'admet aucun couple solution. On a donc : $S=\varnothing$.

c. $\begin{cases} 4x-2y=6 \\ -6x+3y=-9 \end{cases}$. On sait que ce système admet une infinité de solution, les deux équations sont donc proportionnelles.

En isolant y dans l'une ou l'autre des lignes, on obtient : $y = 2x-3$; $S=\left\{\left(x;2x-3\right)/x\in\mathbb{R}\right\}$.

4. Résolutions

Résoudre les systèmes suivants

1. $\begin{cases} x-2y=\dfrac{2}{3} \\ 3x-5y=\dfrac{3}{4} \end{cases}$ (par substitution)

2. $\begin{cases} -13x-2y=3 \\ 5x+2y=5 \end{cases}$ (par addition)

3. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-\dfrac{1}{5}=0 \\ 6x+4y-3=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+5y+\dfrac{5}{4}=0 \\ \dfrac{1}{5}x-\dfrac{1}{4}y=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=\dfrac{41}{12} \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{6}{5}y+\dfrac{41}{30}=0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5x+7y-13=0 \\ 35y-65=-25x \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x-3y=2\sqrt{2}-3\sqrt{5} \\ x+y=\sqrt{2}+\sqrt{5} \end{cases}$

8. $\begin{cases} x-2y-5=0 \\ \frac{1}{7}x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{4}=0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x+2y-21=0 \\ 4x-5y-5=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x-2y-2=0 \\ 3x-6y+3=0 \end{cases}$

5. Méthodes de résolution (c)

Résoudre les systèmes suivants en respectant la méthode demandée :

1. $\begin{cases} 4x+2y=4 \\ 25x+5y=-5 \end{cases}$ par la méthode des combinaisons linéaires.
2. $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ par la méthode de substitution.
3. $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ -18x+3y=0 \end{cases}$ par la méthode de la double substitution.

Correction

1. $\begin{cases} 4x+2y=4 \\ 25x+5y=-5 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 5x+y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y=2 \\ 3x=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2-2\times(-1)=4 \\ x=-1 \end{cases}$. On trouve : $S=\{(-1;4)\}$.

2. $\begin{cases} 3x-4y=1 \\ x-2y=-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3(2y-1)-4y=1 \\ x=2y-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2y=4 \\ x=2y-1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2 \\ x=3 \end{cases}$. On trouve : $S=\{(3;2)\}$.

3. $\begin{cases} 4x-2y=8 \\ -18x+3y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2x-4 \\ y=6x \end{cases}$ $\begin{cases} 6x=2x-4 \\ y=6x \end{cases}$ $\begin{cases} 4x=-4 \\ y=6x \end{cases}$ $\begin{cases} x=-1 \\ y=6\times(-1)=-6 \end{cases}$. On trouve : $S=\{(-1;-6)\}$.

6. Changements de variables 1 (c)

1. Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3X+4Y=25 \\ 2X-Y=2 \end{cases}$. Vérifiez bien vos résultats qui serviront pour la question suivante !

2. En déduire la résolution des quatre systèmes (A), (B), (C) et (D) ci-dessous :

(A) $\begin{cases} 3|x|+4y^2=25 \\ 2|x|-y^2=2 \end{cases}$ (B) $\begin{cases} \frac{3}{x}+4\sqrt{y}=25 \\ \frac{2}{x}-\sqrt{y}=2 \end{cases}$ (C) $\begin{cases} 9x+8y=25 \\ 6x-2y=2 \end{cases}$ (D) $\begin{cases} 3x-4y^2=25 \\ 2x+y^2=2 \end{cases}$

Correction

1. $\begin{cases} 3X+4Y=25 \\ 2X-Y=2 \end{cases}$ $\begin{cases} 3X+4Y=25 \\ 8X-4Y=8 \end{cases}$ $\begin{cases} 3X+4Y=25 \\ 11X=33 \end{cases}$ $\begin{cases} Y=4 \\ X=3 \end{cases}$: $S_{X,Y}=\{(3;4)\}$.

2. (A) $\begin{cases} 3|x|+4y^2=25 \\ 2|x|-y^2=2 \end{cases}$: $|x|=X=3\Rightarrow x=\pm 3$ et $y^2=Y=4\Rightarrow y=\pm 2$.

On a donc : $S=\{(3;2),(3;-2),(-3;2),(-3;-2)\}$.

(B) $\begin{cases} \frac{3}{x}+4\sqrt{y}=25 \\ \frac{2}{x}-\sqrt{y}=2 \end{cases}$ $\frac{1}{x}=X=3\Rightarrow x=\frac{1}{3}$ et $\sqrt{y}=Y=4\Rightarrow y=4^2=16$. On a donc : $S=\left\{\left(\frac{1}{3};16\right)\right\}$.

(C) $\begin{cases} 9x+8y=25 \\ 6x-2y=2 \end{cases}$ $3x = X = 3 \Rightarrow x = 1$ et $2y = Y = 4 \Rightarrow y = 2$. On a donc : $S = \{(1;2)\}$.

(D) $\begin{cases} 3x-4y^2=25 \\ 2x+y^2=2 \end{cases}$ $x = X = 3 \Rightarrow x = 3$ et $y^2 = -Y = -4$ est impossible, un carré étant toujours positif. Donc : $S = \varnothing$.

7. Changements de variables 2 (c)

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3(x-3)^2 - \dfrac{2}{y-1} = -5 \\ 7(x-3)^2 + \dfrac{4}{y-1} = 23 \end{cases}$

Correction

On fait un changement de variables : on pose $X = (x-3)^2$ et $Y = \dfrac{1}{y-1}$ où $y \neq 1$. On résout pour commencer le système classique : $\begin{cases} 3X-2Y=-5 \\ 7X+4Y=23 \end{cases}$ $\begin{cases} 6X-4Y=-10 \\ 7X+4Y=23 \end{cases}$ $\begin{cases} 6X-4Y=-10 \\ 13X=13 \end{cases}$ $\begin{cases} Y=4 \\ X=1 \end{cases}$.

On a donc : $S_{X,Y} = \{(1\,;4)\}$.

On résout ensuite $(x-3)^2 = 1 \Leftrightarrow x-3 = \pm 1 \Leftrightarrow x = 4$ ou $x = 2$.

Puis $\dfrac{1}{y-1} = 4 \Leftrightarrow 4(y-1) = 1 \Leftrightarrow 4y = 5 \Leftrightarrow y = \dfrac{5}{4}$.

Nous avons donc deux solutions : $S = \left\{ \left(4\,;\dfrac{5}{4}\right), \left(2\,;\dfrac{5}{4}\right) \right\}$.

8. Intersection de droites (c)

On considère les droites D_1, D_2, D_3 et D_4 d'équations respectives :

(1) $y = -x+2$, (2) $x = 1$, (3) $x + y = 0$ et (4) $2x = -2y + 4$.

1. Tracer ces quatre droites dans un repère orthonormal d'unité 3 cm.
2. En déduire, en justifiant par des arguments graphiques, le nombre de solutions des systèmes suivants :

(E) $\begin{cases} y=-x+2 \\ x=1 \end{cases}$, (E') $\begin{cases} y=-x+2 \\ x+y=0 \end{cases}$, (E") $\begin{cases} y=-x+2 \\ 2x=-2y+4 \end{cases}$.

3. Résoudre les systèmes (E), (E') et (E").

Correction

1. (E) $\begin{cases} y=-x+2 \\ x=1 \end{cases}$ (E) $\begin{cases} (1) \\ (2) \end{cases}$. Ce système admet un unique couple solution puisque les droites D_1 et D_2 sont sécantes.

(E') $\begin{cases} y=-x+2 \\ x+y=0 \end{cases}$ (E') $\begin{cases} (1) \\ (3) \end{cases}$. Ce système n'admet aucun couple solution puisque les droites D_1 et D_3 sont parallèles non confondues.

(E") $\begin{cases} y=-x+2 \\ 2x=-2y+4 \end{cases}$ (E") $\begin{cases} (1) \\ (4) \end{cases}$. Ce système admet une infinité de couples solution puisque les droites D_1 et D_4 sont confondues.

2. $\begin{cases} y=-x+2 \\ x=1 \end{cases}$, soit $\begin{cases} y=-1+2=1 \\ x=1 \end{cases}$ et $S=\{(1;1)\}$.

$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=0 \end{cases}$, donc 2 = 0, ce qui est absurde : $S=\varnothing$.

Enfin, $S=\{(x\,;-x+2)/x\in\mathbb{R}\}$.

9. Scooters (c)

Un marchand de cycle vient de vendre deux scooters d'occasion pour la somme totale de 2100 €. Il a réalisé 10% de bénéfice sur la vente du premier scooter mais il a perdu 10 % sur l'autre.

Globalement, il a réalisé un bénéfice de 5 %. Combien d'euros, avait-il acheté chacun des scooters ?

Correction

On a le système suivant où x et y sont les prix respectifs à l'achat des deux scooters :

$$\begin{cases} x+\frac{10}{100}x+y-\frac{10}{100}y=2100 \\ x+y+\frac{5}{100}(x+y)=2100 \end{cases} \quad \begin{cases} 1,1x+0,9y=2100 \\ 1,05x+1,05y=2100 \end{cases} \quad \begin{cases} 1,1x+0,9y=2100 \\ x+y=2000 \end{cases} \quad \begin{cases} 1,1x+0,9(2000-x)=2100 \\ y=2000-x \end{cases}$$

Ce qui donne : $\begin{cases} 0,2x=300 \\ y=2000-x \end{cases}$ puis $\begin{cases} x=1500 \\ y=500 \end{cases}$: $S=\{(1500;500)\}$

Le vendeur avait donc acheté 1500 € le premier scooter et 500 € le second.

10. Train

Si on augmente la vitesse d'un train de 10 km/h , on gagne 40 mn sur le trajet effectué par ce train. Si on diminue la vitesse de 10 km/h, on perd une heure sur le même trajet. Quelle est la longueur du trajet ?

11. Boules

Une boite contient des boules rouges et des boules noires. Si on ajoute une boule rouge , les boules rouges représentent 25% du total des boules (avec la boule rajoutée). Si on retire une boule rouge les boules rouges représentent alors 20% du contenu de la boite (sans la boule enlevée).

Combien la boite contient-elle de boules rouges ?

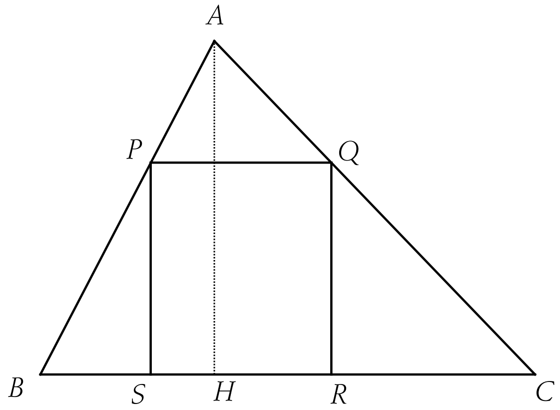
12. Périmètre

Soit x et y les dimensions d'un rectangle et p son **demi**-périmètre. Si l'on augmente la longueur de 2 cm et qu'on diminue la largeur de 1 cm, l'aire du rectangle ne change pas.

1. Calculer x et y en fonction de p. Quelle condition doit remplir p pour que le problème ait une solution ?
2. Si $p=10$, calculer x et y.
3. Peut on choisir p pour que $x=2y$?

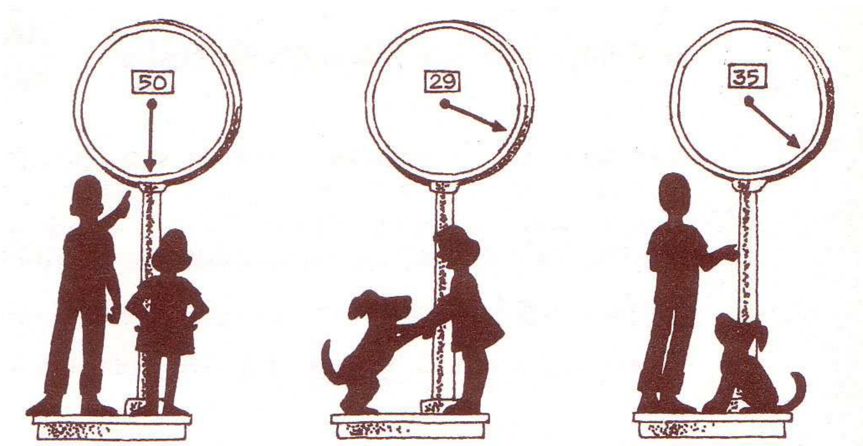
13. Rectangle inscrit dans un triangle

On se donne un triangle ABC tel que BC = 8 cm, AH = 6 cm où H est le projeté orthogonal de A sur [BC].



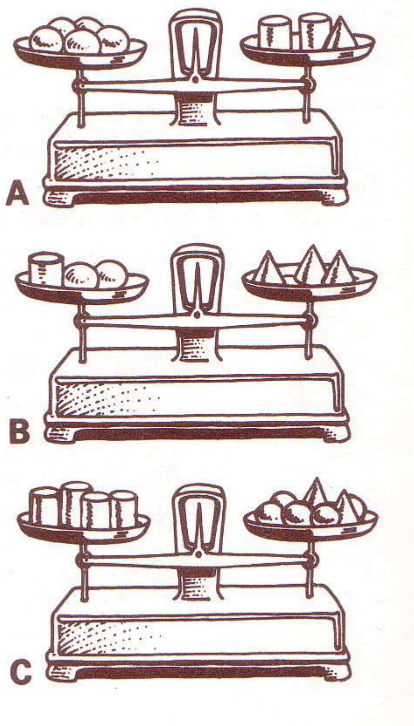
On place un point R sur $[BC]$ et on construit un rectangle $PQRS$ comme indiqué sur la figure. Le périmètre de $PQRS$ est 13 cm. Déterminez les longueurs x et y des côtés du rectangle.

14. 3 poids



Pouvez-vous donner le poids de chacun ?

15. 3 balances



Les balances A et B sont en équilibre. La balance C penchera-t-elle à droite, à gauche ou est-elle en équilibre ?

On pourra appeler x la masse d'une sphère, y celle d'un cylindre et z celle d'un cône, après à vous de bien réfléchir…

16. Père Noël

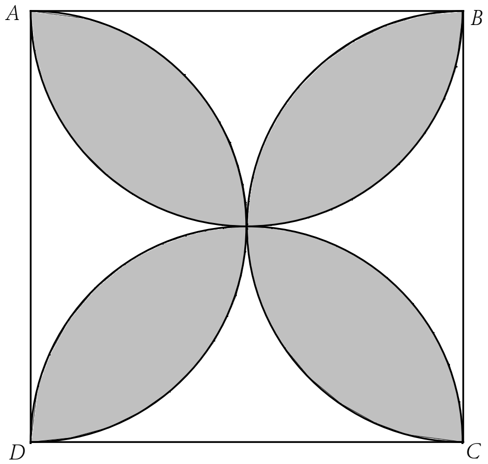
Avant de faire sa tournée, Albert (c'est le prénom de Mr Noël, plus communément appelé Père Noël) fait ses courses. Il se rend chez son grossiste préféré avec le budget qu'il a affecté à l'achat de consoles de jeu.

Le vendeur lui fait aimablement remarquer (le P. Noël n'est pas très au courant des progrès technologiques) qu'il lui faut donner quelques logiciels avec les machines. Chaque logiciel coûte 20 € (prix de gros…).

Albert Noël explique alors au vendeur que s'il offre deux logiciels par machine il prive de console 80 enfants ; le vendeur après un bref calcul lui dit alors : « Mais si vous n'en offrez qu'un par machine vous ne privez que 50 enfants ! »

Albert sort sa grosse calculette à tête de Mickey et s'exclame : « Vous devriez avoir honte de vendre des consoles ce prix là »… Quel est le prix demandé par le vendeur ?

17. Calcul d'aire (c)



Soit le carré *ABCD* de côté 2 à l'intérieur duquel on a tracé les demi-cercles de diamètres respectifs [*AB*], [*BC*], [*CD*] et [*DA*].

1. Résoudre le système suivant: $\begin{cases} 4x+4y=4 \\ 2x+y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

2. Exprimer le système précédent comme le calcul des aires de deux surfaces clairement exprimées de la figure.

3. En déduire l'aire exacte de la surface coloriée.

4. Dans le carré, quelle est la surface la plus grande : celle qui est coloriée ou celle qui ne l'est pas ?

Correction

1. $\begin{cases} 4x+4y=4 \\ 2x+y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x+y=1 \\ 2x+y=\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \begin{cases} x+y=1 \\ x=\dfrac{\pi}{2}-1=\dfrac{\pi-2}{2} \end{cases} \begin{cases} y=1-x=\dfrac{4-\pi}{2} \\ x=\dfrac{\pi-2}{2} \end{cases}$; $S=\left\{\left(\dfrac{\pi-2}{2};\dfrac{4-\pi}{2}\right)\right\}$.

2. En considérant que chacun des quatre "pétales" coloriés a une aire de mesure *x* et que chaque partie disjointe non coloriée a une aire de mesure *y*, on peut écrire les deux informations suivantes :

* le carré constitué de quatre "pétales" et de quatre "zones" blanches a une aire égale à 4 : soit $4x+4y=4$;

* le demi disque de diamètre [*CD*], constitué de deux "pétales" et d'une "zone" blanche a une aire égale à $\dfrac{\pi}{2}$ puisque son rayon vaut 1 : soit $2x+y=\dfrac{\pi}{2}$.

3. Ainsi $x=\dfrac{\pi-2}{2}$ est bien l'aire d'un pétale sur cette figure et la surface coloriée a une aire de $4x=2\pi-4$.

4. L'aire de la surface coloriée est $4x=2\pi-4\simeq 2\times 3,14-4\simeq 2,28$ alors que celle de la surface non coloriée est $4y=8-2\pi\simeq 8-2\times 3,14\simeq 1,72$. C'est donc la surface coloriée qui a la plus grande surface dans le carré *ABCD*.

18. Voyage scolaire (c)

Un professeur souhaite organiser un voyage scolaire pour sa classe. Il envisage deux destinations : Disneyland et Port Aventura. Il calcule ensuite le coût de chaque voyage pour la classe entière.

Aller à Disneyland reviendrait à 1 440 euros, sachant que les moins de 16 ans payeraient 40 euros et les plus de 16 ans, 50 euros.

Par contre, aller à Port Aventura ne coûterait que 1 110 euros, sachant que les moins de 16 ans payeraient 30 euros et les plus de 16 ans, 40 euros. Le professeur opte donc pour Port Aventura.

Mais combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?

Correction

Soyons originaux, soit x le nombre d'élèves âgés de moins de 16 ans et y le nombre d'élèves âgés de plus de 16 ans : l'énoncé nous donne les informations suivantes : $40x+50y=1440$ et $30x+40y=1110$.

On résout le système :

$$\begin{cases}40x+50y=1440\\30x+40y=1110\end{cases}\begin{cases}4x+5y=144\\3x+4y=111\end{cases}\begin{cases}12x+15y=432\\12x+16y=444\end{cases}\begin{cases}12x+15\times 12=432\\y=12\end{cases}\begin{cases}x=\dfrac{432-15\times 12}{12}=21\\y=12\end{cases}.$$

Ainsi il y a 21 + 12 = 33 élèves dans cette classe.

19. Emir

L'émir Ben Khalish se rend de son palais à l'aéroport toujours à la même vitesse , sur une autoroute splendide construite au milieu du désert. Suivant que son chauffeur augmenterait ou non sa vitesse moyenne de 20 km/h il gagnerait 2 minutes ou en perdrait 3 sur le trajet. Quelle est la distance entre l'aéroport et le palais ?

20. Trois motos

Lors d'une compétition trois motocyclistes ont pris le départ simultanément . Le second, qui faisait 15 km/h de moins que le premier et 3 km/h de plus que le troisième a franchi la ligne d 'arrivée 12 minutes plus tard que le premier et 3 minutes plus tôt que le troisième. Quelle est la longueur du parcours ?

(vérifier qu'il faut résoudre le système $\begin{cases}(v_2+15)(t_2-\dfrac{12}{60})=v_2t_2\\(v_2-3)(t_2+\dfrac{3}{60})=v_2t_2\end{cases}$ *et* $d=v_2t_2$ où v_2 = vitesse du deuxième coureur et t_2 = temps du deuxième coureur, et le résoudre..).

21. Systèmes

Résoudre graphiquement puis par le calcul les systèmes suivants :

a. $\begin{cases}4x+3y=2\\-3x+5y=-3\end{cases}$ b. $\begin{cases}x-y<0\\x-4<0\\3x+2y-1>0\end{cases}$

c. Résoudre le système $\begin{cases}a+b+c=3\\a-b+c=3\\4a+2b+c=9\end{cases}$

22. Systèmes (c)

Une entreprise fabrique deux sortes de produits : A et B. Pour fabriquer ces objets elle dispose de deux machines M_1 et M_2 sur lesquelles doivent être fabriqués les objets pendant les temps suivants :

temps en minutes	M_1	M_2

A	2	3
B	5	7

on dispose de 6 heures d'utilisation réelle de M_1 pendant une journée et de 8 heures d'utilisation de M_2.

1. a. Montrer que la fabrication doit répondre au système suivant pour utiliser les machines en permanence : $\begin{cases} 2x+5y=360 \\ 3x+7y=480 \end{cases}$

b. Résoudre ce système. Donner une interprétation pratique de la solution.

c. Combien peut on fabriquer d'objets des deux sortes en 1 mois (30 jours), en 1 an ?

2. On améliore la fabrication et les temps de passage deviennent les suivants :

temps en minutes	M_1	M_2
A	2	1,5
B	3	2,25

a. Quel système doit on résoudre ? Le résoudre.

b. Chaque équation du système peut se représenter graphiquement. Comment ?

c. Représenter sur une même figure les deux équations obtenues. Que constatez vous ? Justifiez.

d. Combien de temps par jour doit-on rendre disponible la machine M_2 pour pouvoir programmer une fabrication ?

Corrigé (première partie)

1. a. Si on appelle x le nombre d'objets A produits par jour et y le nombre d'objets B, il faudra un temps $2x+5y$ sur M_1 et $3x+7y$ sur M_2, exprimés en minutes. Comme on a 6 h = 360 mn d'utilisation de M_1 et 8 h = 480 mn d'utilisation de M_2, on a bien le système : $\begin{cases} 2x+5y=360 \\ 3x+7y=480 \end{cases}$.

b. $\begin{matrix} \times 3 \\ \times 2 \end{matrix}\begin{cases} 2x+5y=360 \\ 3x+7y=480 \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} 6x+15y=1080 \\ 6x+14y=960 \end{cases} \Rightarrow y=120$,

$\begin{matrix} \times 7 \\ \times 5 \end{matrix}\begin{cases} 2x+5y=360 \\ 3x+7y=480 \end{cases} \Leftrightarrow - \begin{cases} 14x+35y=2520 \\ 15x+35y=2400 \end{cases} \Rightarrow x=-120$.

Il y a donc bien une solution mais qui donne un résultat négatif pour x… Il n'y a pas de solution optimale de fabrication. En fait la meilleure solution consiste à ne fabriquer qu'un seul produit…

c. La question est débile, mille excuses…

23. Systèmes (c)

Résoudre les systèmes d'équation suivants :

a. $\begin{cases} 2x^2+y^2=-1 \\ x^2-y^2=-2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ x-4y+3z=3 \\ 2x+7y+6z=8 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x-4y=-2 \end{cases}$ d. $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=4 \\ z+x=5 \end{cases}$

Correction

a. $\begin{cases} 2x^2+y^2=-1 \\ x^2-y^2=-2 \end{cases}$ n'a pas de solutions car la somme de termes positifs $2x^2+y^2$ ne peut valoir -1 qui est négatif.

b. $\begin{cases} x+3y+2z=2 \\ x-4y+3z=3 \\ 2x+7y+6z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y-3z+3+3y+2z=2 \\ x=4y-3z+3 \\ 2(4y-3z+3)+7y+6z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y-z+=-1 \\ x=4y-3z+3 \\ 15y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=7y+1=29/15 \\ x=8/15-87/15+3=-34/15 \\ y=2/15 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x-4y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+15y=9 \\ 6x-8y=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+15y=9 \\ 23y=13 \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{13}{23}$.

$\begin{cases} 2x+5y=3 \\ 3x-4y=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+20y=12 \\ 15x-20y=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+20y=12 \\ 23x=2 \end{cases} \Rightarrow x=\dfrac{2}{23}$.

d. $\begin{cases} x+y=3 \\ y+z=4 \\ z+x=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ y+5-x=4 \\ z=5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ y-x=-1 \\ z=5-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \\ z=3 \end{cases}$.

24. Droites et systèmes (c)

Résoudre graphiquement puis par le calcul le système suivant :

$$\begin{cases} 0,3x-0,2y+1=0 \\ -1,8x+1,2y-3=0 \end{cases}$$

Correction

On trace les deux droites après avoir tout multiplié par 10 pour simplifier : on voit que les droites sont parallèles, donc le système n'a pas de solution.

Si on divise la deuxième ligne par -6 on voit que les deux droites ont bien même coefficient directeur mais pas la même ordonnée à l'origine.

$$\begin{cases} 0,3x-0,2y+1=0 \\ -1,8x+1,2y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+10=0 \\ -18x+12y-30=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y+10=0 \\ 3x-2y+5=0 \end{cases}.$$

25. Systèmes et fonction

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{2x+1}{1-3x}$. On veut écrire f de manière différente. Pour cela on suppose que f peut s'écrire $f(x)=a+\dfrac{b}{1-3x}$.

1. En choisissant deux valeurs de x et en remplaçant dans les deux formes de f, trouver un système satisfait par a et b.

2. Résoudre le système.

3. Vérifiez que votre résultat est correct….

26. Système et fonction 1

Soit le polynôme $P(x)=ax^2+bx+c$.

Déterminer a, b et c pour que l'on ait $P(-1)=11$, $P(1)=-3$ et $P(2)=5$.

27. Système et fonction 1bis (c)

On se donne la fonction $P(x)=ax^2+bx+c$ dont on souhaite qu'elle ait les propriétés suivantes :

* L'image de -1 est 11 ;
* Un antécédent de 5 est 2 ;
* La courbe de P passe par le point de coordonnées (1 ; -3).

1. Montrer qu'il faut résoudre le système $\begin{cases} a-b+c=11 \\ 4a+2b+c=5 \\ a+b+c=-3 \end{cases}$.

2. Résoudre ce système. Vérifiez votre résultat.

<u>Correction</u>

1. $P(x)=ax^2+bx+c$.

* L'image de −1 est 11 se traduit par $P(-1)=11$, soit $a-b+c=11$;
* Un antécédent de 5 est 2 se traduit par $P(2)=5$, soit $4a+2b+c=5$;
* La courbe de P passe par le point de coordonnées (1 ; −3) se traduit par $P(2)=5$, soit $a+b+c=-3$;

on a donc à résoudre le système $\begin{cases} a-b+c=11 \\ 4a+2b+c=5 \\ a+b+c=-3 \end{cases}$.

2. En soustrayant la première et la deuxième ligne on a b de suite : $-2b=14 \Rightarrow b=-7$; il reste alors

$$\begin{cases} a+7+c=11 \\ 4a-14+c=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=4 \\ 4a+c=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c=4 \\ 3a=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-1 \\ a=5 \end{cases}$$

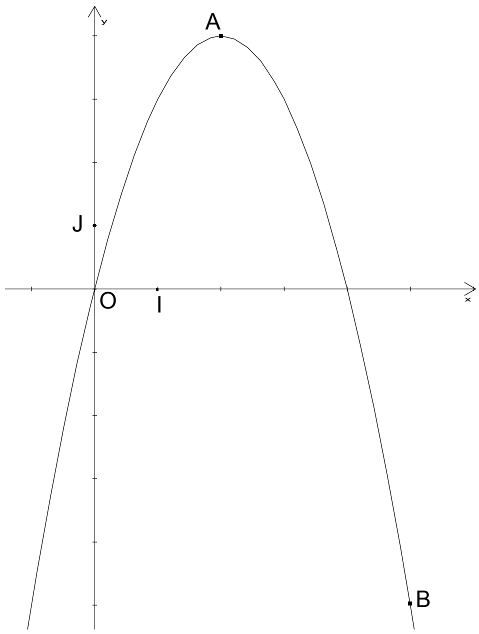
et $P(x)=5x^2-7x-1$. On vérifie alors que $P(-1)=5+7-1=11$, $P(2)=20-14-1=5$, $P(1)=5-7-1=-3$.

28. Système et fonction 2

Soit la courbe tracée ci-dessous. C'est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=ax^2+bx$$

où a et b sont des nombres réels.



1. a. Donner *graphiquement* le tableau de variation de f.

b. Donner *graphiquement* le tableau de signe de $f(x)$.

c. Résoudre *graphiquement* l'inéquation $f(x) \geq 3$.

2. a. Résoudre le système $\begin{cases} 4a+2b=4 \\ 25a+5b=-5 \end{cases}$.

b. En déduire que $f(x)=-x^2+4x$ sachant que la courbe représentative de f passe par les points $A(2\,;4)$ et $B(5\,;-5)$.

3. a. Vérifier que $f(x)=-(x-2)^2+4$.

b. En déduire par le calcul, les variations de f sur les intervalles $]-\infty\,;2]$ et $[2\,;+\infty[$.

c. *Par le calcul*, donner le tableau de signe de $f(x)$.

d. Vérifier que $-x^2+4x-3=(1-x)(x-3)$.

e. En déduire, *par le calcul*, les solutions de l'inéquation $f(x)\geq 3$.

29. Système 3x3 - 1 (c)

Factoriser $2x^3+7x-9$ sous la forme $(x-1)(ax^2+bx+c)$ où a, b et c sont des nombres à déterminer.

On pourra s'aider d'un système.

Correction

Faisons d'abord le chemin à l'envers :

$$(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+bx^2+cx-ax^2-bx-c=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c.$$

On a donc : $2x^3+0x^2+7x-9=\ ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$.

Ainsi : $\begin{cases} a=2 \\ b-a=0 \\ c-b=7 \\ -c=-9 \end{cases}$ en identifiant respectivement les termes en x^3, ceux en x^2, ceux en x et les termes constants.

Bilan des courses, et sans forcer : $a=2$, $b=2$ et $c=9$.

Ce qui nous donne : $2x^3+7x-9=(x-1)(2x^2+2x+9)$.

30. Système 3x3 - 2 (c)

Résoudre le système : $\begin{cases} 2x-y+4z=-4 \\ 3x+2y-3z=17 \\ 5x-3y+8z=-10 \end{cases}$.

Indication : En utilisant la méthode des combinaisons linéaires, on pourra essayer de faire apparaître un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

Correction

Appelons L_1, L_2 et L_3 les trois lignes du système suivant : $\begin{cases} 2x-y+4z=-4 \\ 3x+2y-3z=17 \\ 5x-3y+8z=-10 \end{cases}$.

Plusieurs méthodes sont possibles pour le résoudre. En voici une *rapide*... On remarque que, dans L_1, y est "tout seul". On va s'en servir pour trouver un système de deux équations en x et z.

On utilise des **combinaisons linéaires**.

En faisant L_2+2L_1, on élimine les y : $7x+5z=9$.

En faisant L_3-3L_1, on élimine encore les y : $-x-4z=2$.

On se ramène donc à : $\begin{cases} 7x + 5z = 9 \\ -x - 4z = 2 \end{cases}$. Il reste à résoudre ce système.

Par **substitution** : la deuxième équation donne : $x = -4z - 2$.

En remplaçant dans la première : $7(-z-2)+5z = 9$ d'où $-23z = -23$ et donc $z = -1$. De plus, $x = -4(-1)-2$ donc $x = 2$.

Enfin, en utilisant L_1 : $2(2)-y+4(-1) = -4$; on en déduit $y = 4$.

Conclusion : Le système a pour solution $S = \{(2 ; 4; -1)\}$.

31. Optimisation sous contrainte - 1 (c)

Un artisan fabrique des objets A et des objets B. La réalisation d'un objet A demande 30 euros de matière première et 125 euros de main-d'œuvre ; celle d'un objet B demande 70 euros de matière première et 75 euros de main-d'œuvre.

Pour une bonne gestion de l'entreprise, les dépenses journalières en matière première et en main-d'œuvre ne doivent pas dépasser respectivement 560 euros et 1250 euros.

On désigne par x le nombre d'objets A et par y le nombre d'objets B fabriqués par jour.

1. Calculer en fonction de x et de y la dépense journalière en matière première, et la dépense journalière en main-d'œuvre.

2. (x, y) étant le couple des coordonnées d'un point M dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, déterminer graphiquement l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'entreprise.

Correction

	Matière 1ère	Main d'œuvre	nombres
Objet A	30 euros	125 euros	x
Objet B	70 euros	1250 euros	y

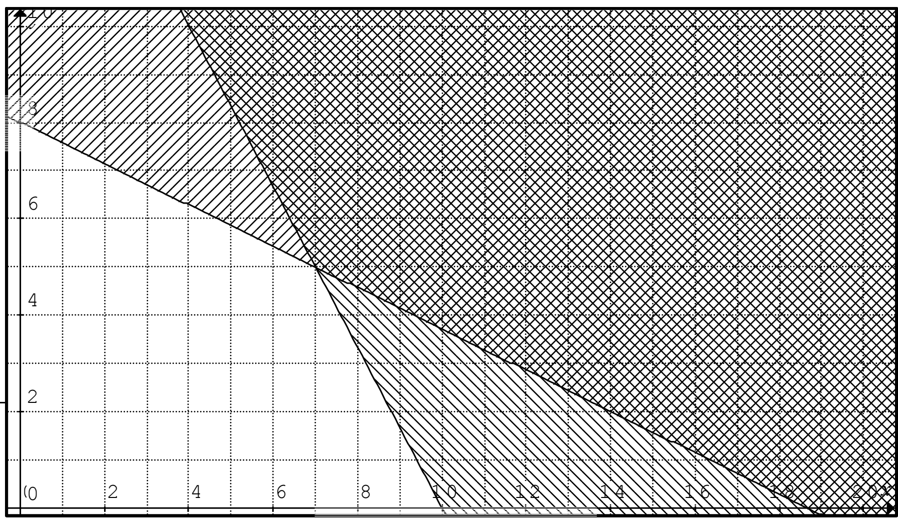
Dépense journalière en matière première : $30x + 70y$

Dépense journalière en main d'œuvre : $125x + 75y$

D'où le système d'inéquations : $\begin{cases} 30x + 70y \le 560 \\ 125x + 75y \le 1250 \end{cases}$ équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} 30x + 70y - 560 \le 0 \\ 125x + 75y - 1250 \le 0 \end{cases}.$$

$30x+70y-560=0$



$125x+75y-1250=0$

Il y a exactement 63 points du plan dont les coordonnées satisfont aux contraintes de l'entreprise en remarquant que leurs coordonnées x et y sont des nombres entiers naturels, qu'il ne fallait pas oublier les cas $x = 0$ et $y = 0$ et qu'enfin le point de coordonnées (7, 5) est le point d'intersection des deux droites, donc ses coordonnées satisfont aussi aux contraintes de l'entreprise.

32. Optimisation sous contrainte - 2 (c)

Disposant d'un crédit de 6000 **€**, le directeur d'une discothèque désire acheter des disques compacts pour une valeur d'au moins 3200 **€**.

Il veut se procurer des disques classiques qui valent 80 **€** pièce et des disques de jazz qui valent 40 **€** pièce. Par ailleurs, il tient à acheter plus de disques classiques que de disques de jazz. Enfin, il ne peut acheter les disques compacts que par lots de 10 et il désire au moins un lot de disque de jazz.

On note x le nombre de lots de disques classiques et y le nombre de lots de disques de jazz.

1. a. Etablir le système (S) d'inéquations résultant des contraintes.

b. Le plan étant rapporté à un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, représenter l'ensemble des points $M(x\,;y)$ vérifiant le système (S).

2. En effectuant une lecture graphique, répondre aux questions suivantes :

a. Quel est le nombre maximum de disques de jazz qu'il peut se procurer ? Dans ce cas, combien achète-t-il de disques classiques ? Quelle est alors la dépense ?

b. De combien de manières peut-il dépenser 4000 **€** ?

c. Il veut acheter 70 disques. Donner toutes les répartitions possibles. Quelles sont alors la dépense minimum et la dépense maximum effectuées ?

Correction

1. a. *Bien lire un énoncé...*

"Il veut se procurer des disques classiques qui valent 80 **€** pièce et des disques de jazz qui valent 40 **€** pièce [...], il ne peut acheter les disques compacts que par lots de 10 "

On en déduit que le coût des compacts est : $800x + 400y$.

"*Disposant d'un crédit de 6000 euros [...]*" donc on doit avoir : $800x+400y \le 6000$.

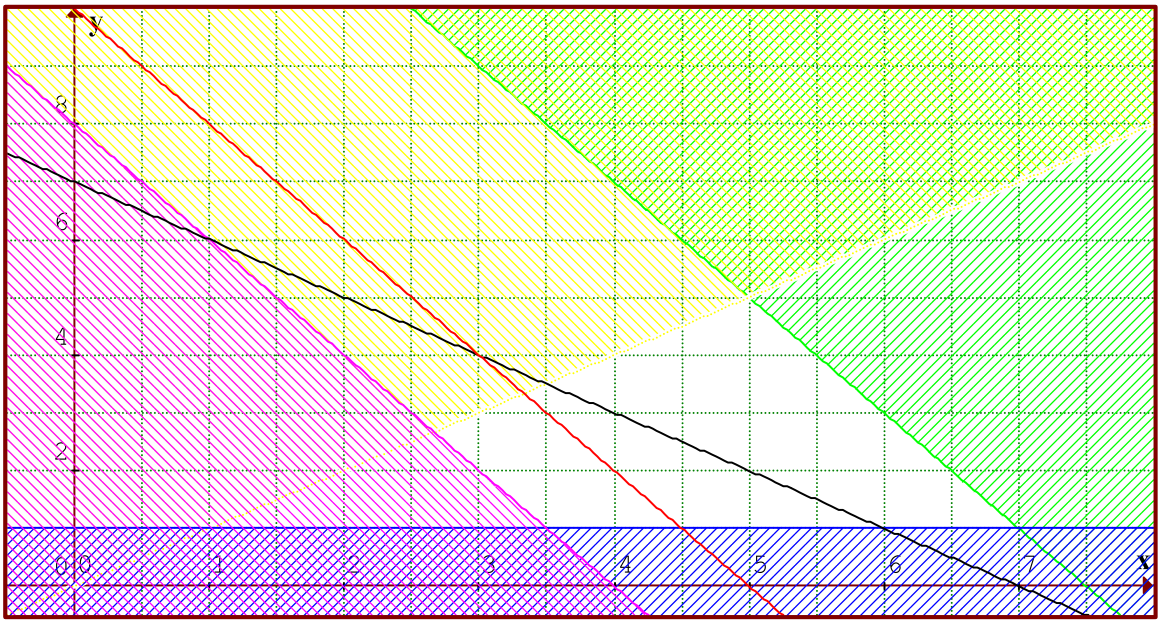
"*pour une valeur d'au moins 3200F*" donc aussi : $800x+400y \ge 3200$.

"*[...] il tient à acheter plus de disques classiques que de disques de jazz.*". D'où $x > y$.

"*[...] et il désire au moins un lot de disque de jazz.*" Donc $y \ge 1$.

Le système (S) est donc : $\begin{cases} 800x+400y \le 6000 \\ 800x+400y \ge 3200 \\ x > y \\ y \ge 1 \end{cases}$ ce qui équivaut à : $(S)\begin{cases} 2x+y \le 15 \\ 2x+y \ge 8 \\ x > y \\ y \ge 1 \end{cases}$.

b. On trace les droites d'équations : $x = y$, $y = 1$, $2x+y = 15$ et $2x+y = 8$; on hachure les demi-plans **qui ne conviennent pas**. Voici le résultat :



2. a. On veut acheter le maximum de disques de jazz. On cherche le point dans la partie non hachurée dont l'ordonnée est la plus grande : c'est le point de coordonnées (5 ; 4). Donc cela correspond à 40 disques de jazz et 50 disques classiques. La dépense est alors de (800.5+400.4 =) 5600 €.

b. On trace la droite d'équation : $800x + 400y = 4000$ (dépense de 4000 €). On cherche les points à coordonnées entières de la partie non hachurée sur cette droite. Il n'y en a qu'un ! Le point (4 ; 2), ce qui correspond à 40 disques classiques et 20 disques de jazz.

c. On trace la droite d'équation : $10x + 10y = 70$ (ce qui correspond à 70 disques).

L'équations est aussi : $x+y=7$. On cherche les points à coordonnées entières de la partie non hachurée sur cette droite. Il y en a trois : (6 ; 1), (5 ; 2) et (4 ; 3). Trois répartitions sont donc possibles :

Nombre de disques classiques	Nombre de disques de jazz	Dépense
60	10	5200 €
50	20	4800 €
40	30	4400 €

La dépense minimum est de 4400 €.

La dépense maximum est de 5200 €.