Classe de Seconde

Géométrie vectorielle et analytique — Exercices Corrigés

1. Question de cours (c)

Démontrer que si les deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont colinéaires alors leur déterminant est nul.

Correction

Prenons deux vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ colinéaires. Par définition de la colinéarité, il existe un nombre réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

On a donc : $x'=kx$ et $y'=ky$. Calculons, le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\det\left(\vec{u}\,;\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y=xky-kxy=kxy-kxy=0\,.$$

2. Vecteurs (c)

Soit ABC un triangle quelconque. A' le milieu de $[BC]$, G le centre de gravité du triangle, D et E les points tels que $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On note I le milieu de $[DE]$.

1. a. Montrer que $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

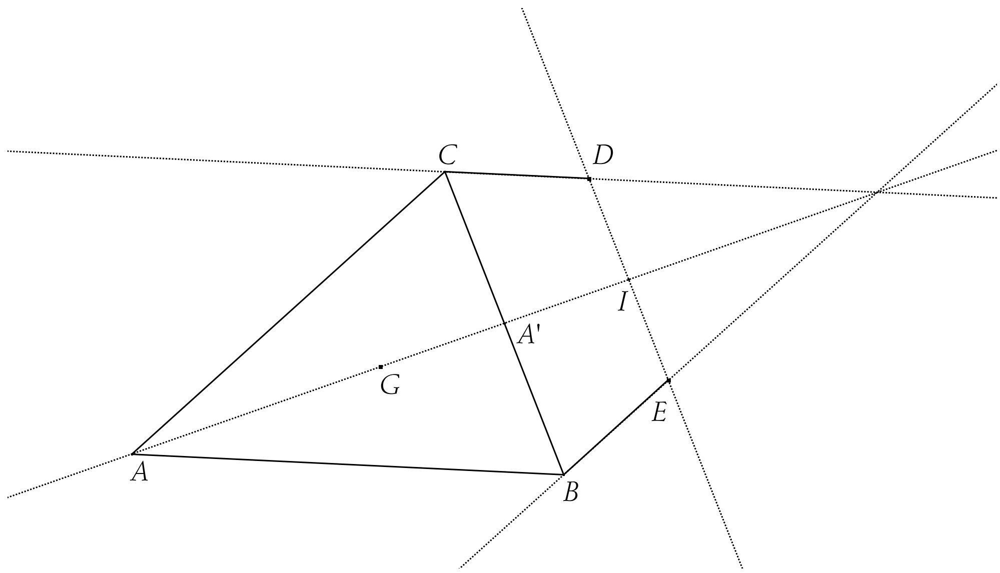
b. Exprimer $\overrightarrow{AA'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c. Démontrer que les points A, A' et I sont alignés.

2. Démontrer que le point G est le milieu de $[AI]$.

3. Prouver que les droites (BC) et (ED) sont parallèles.

Correction (en utilisant un repère)



1. a. Prenons le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ où A a pour coordonnées (0 ; 0), B(1 ; 0) et C(0 ; 1). Des données de construction on tire que $E\left(1\,;\frac{1}{3}\right)$ et $D\left(\frac{1}{3}\,;1\right)$, soit $I\left(\frac{2}{3}\,;\frac{2}{3}\right)$ ou encore $\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

b. Les coordonnées de *A'* sont $A'\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

c. Faisons le déterminant des vecteurs : $\det\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AI}\right)=\begin{vmatrix}1/2 & 2/3\\ 1/2 & 2/3\end{vmatrix}=0$; on pouvait également remarquer que $2\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AI}\Leftrightarrow\overrightarrow{AI}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AA'}$.

2. Les coordonnées de *G* sont $G\left(\frac{1}{3}\,;\frac{1}{3}\right)$ d'où $\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AG}$ et *G* est le milieu de [*AI*].

3. $\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{ED}\right)=\begin{vmatrix}0-1 & \frac{1}{3}-1\\ 1-0 & 1-\frac{1}{3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & -\frac{2}{3}\\ 1 & \frac{2}{3}\end{vmatrix}=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$ donc les droites (*BC*) et (*ED*) sont parallèles.

3. Colinéarité (c)

Soit un triangle *ABC*.

1. Construire les points *D* et *E* vérifiant : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$.

2. Montrer que $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AC}$. Que peut-on en déduire géométriquement ?

3. Montrer que $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}$. Déduire de cette égalité et de la précédente que *E*, *B* et *D* sont alignés.

4. Soit *I* le milieu de [*AB*]. Justifier que $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{CI}$. Qu'en déduire pour les droites (*AE*) et (*CI*) ?

Correction

1. facile !

2. $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que *ABDC* est un parallélogramme.

3. $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{CA}$.

On en déduit que $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{AC}=-2\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont donc colinéaires, les points *E*, *B* et *D* sont alignés.

4. Comme *I* est le milieu de [*AB*], on a : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

D'où $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2\overrightarrow{CI}$.

On en déduit que, comme $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\ \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$, alors $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{CI}$. Si bien que $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont colinéaires. Les droites (*AE*) et (*CI*) sont parallèles.

4. Lecture graphique (c)

Répondez directement sur le sujet.

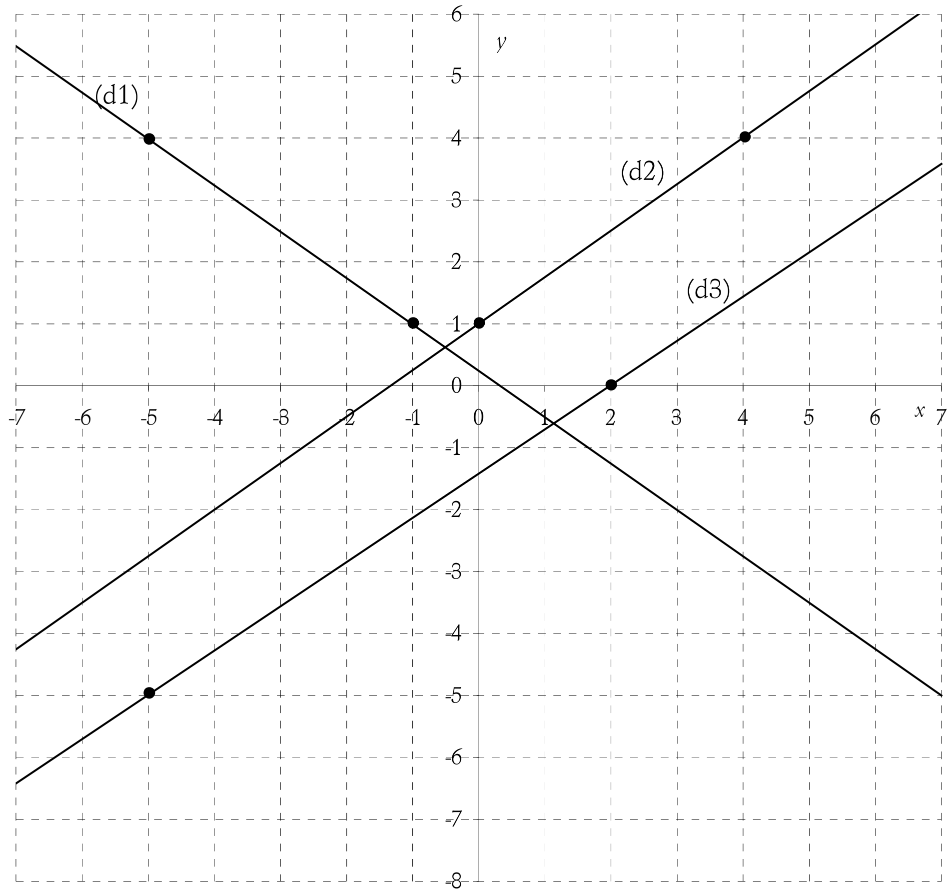
1. En utilisant les informations données sur le dessin, déterminer une équation de chacune des droites ci-dessous (o*n donnera des valeurs exactes, pas de justification*).

(d1) : ....

(d2) : ....

(d3) : ....

2. Les droites (d2) et (d3) sont elles parallèles ? Pourquoi ?



Correction

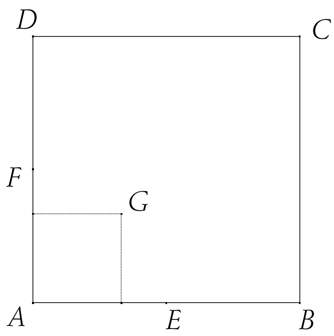
1. (d1) : passe par (−5 ; 4) et (−1 ; 1), équation : $\begin{vmatrix} x+5 & 4 \\ y-4 & -3 \end{vmatrix} = -3x-15-4y+16=0 \Leftrightarrow 4y+3x-1=0$.

(d2) : passe par (4 ; 4) et (0 ; 1), coeff. directeur $\frac{3}{4}$, ordonnée à l'origine : 1, équation : $y=\frac{3}{4}x+1$.

(d3) : passe par (−5 ; −5) et (2 ; 0), coeff. directeur $\frac{5}{7}$, $0=\frac{5}{7}.2+p \Rightarrow p=-\frac{10}{7}$, équation : $y=\frac{5}{7}x-\frac{10}{7}$.

2. Les droites (d2) et (d3) ne sont pas parallèles : elles n'ont pas le même coefficient directeur.

5. Droites/carré (c)



Soit *ABCD* un carré, *E* le milieu de [*AB*], *F* le milieu de [*AD*]. On pose *AE* = 1.

1. Donner les coordonnées des points *A*, *B*, *C*, *D*, *E* et *F* dans le repère $(A\ ;\ \overrightarrow{AE},\overrightarrow{AF})$.

2. a. Ecrire l'équation de la droite (*BF*).

b. Soit $G\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. Montrer que *G* appartient à la droite (*BF*).

3. Montrer que les points *D*, *E* et *G* sont alignés.

4. Que représente *G* pour le triangle *ABD* ? Justifier.

5. Que peut-on en déduire sur la droite (*AC*) ? Justifier.

<u>Correction</u>

1. *A*(0 ; 0), *B*(2 ; 0), *C*(2 ; 2), *D*(0 ; 2), *E*(1 ; 0) et *F*(0 ; 1).

2. a. $\begin{vmatrix} x-2 & 0-2 \\ y-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 1(x-2)-(-2)y = x+2y-2=0$.

b. On remplace *x* et *y* par les coordonnées de *G* : $\frac{2}{3}+2\frac{2}{3}-2=\frac{6}{3}-2=0$. Ok.

3. Calculons les coefficients directeurs : $\frac{y_G-y_E}{x_G-x_E}=\frac{y_D-y_E}{x_D-x_E} \Leftrightarrow \frac{2/3-0}{2/3-1}=\frac{2-0}{0-1} \Leftrightarrow \frac{2/3}{1/3}=2$. Ok.

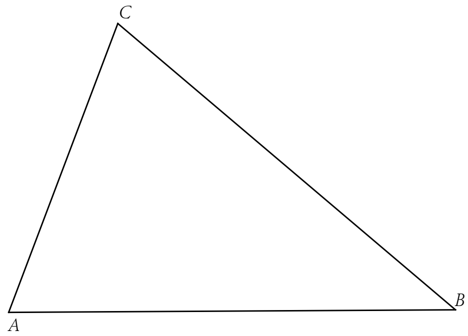
4. (*DE*) est une médiane puisque *E* est le milieu de [*AB*], de même (*BF*) est une médiane donc *G* est le centre de gravité du triangle *ABD*.

5. (*AC*) est la troisième médiane puisqu'elle passe par le centre du carré, soit par le milieu de [*DB*]. *A*, *G* et *C* sont alignés. En fait la droite (*AC*) a pour équation *y* = *x* qui contient évidemment *G*.

6. Construction (c)

Le but de l'exercice est de construire un triangle *A'B'C'* à l'intérieur d'un triangle *ABC* de sorte que

- *A'* est le milieu de [*BC'*],
- *B'* est le milieu de [*CA'*],
- *C'* est le milieu de [*AB'*].



On choisit le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$: les coordonnées de A sont donc (0 ; 0), celles de B (1 ; 0) et celles de C (0 ; 1). On pose les coordonnées de A' : $(a\,;a')$, celles de B' $(b\,;b')$ et celles de C' : $(c\,;c')$.

1. a. Montrez que $\begin{cases} c+1=2a \\ c'=2a' \end{cases}$ puisque $\begin{cases} a=2b \\ a'+1=2b' \end{cases}$ et $\begin{cases} b=2c \\ b'=2c' \end{cases}$.

b. Résoudre le système d'inconnues a, b et c : $\begin{cases} c+1=2a \\ a=2b \\ b=2c \end{cases}$.

c. Résoudre un système similaire d'inconnues a', b' et c'.

2. A l'aide des résultats précédents montrez les relations suivantes :

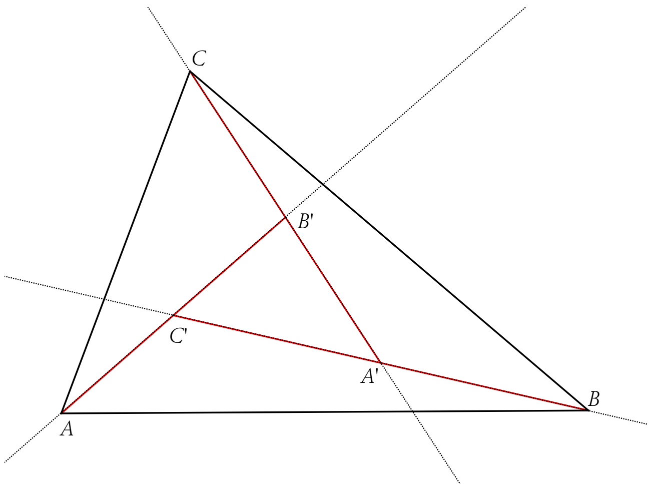
$$\overrightarrow{AA'}=\frac{4}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{7}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AB'}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AC'}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{7}\overrightarrow{AC}$$

3. Utilisez ces relations pour construire les points A', B' et C' sur la figure jointe (les vecteurs de construction doivent apparaître).

4. Vérifiez que $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{C'B'}$ à l'aide des relations du 2. Qu'en concluez-vous ? Ecrivez deux autres relations que vous pourriez obtenir de la même manière.

5. Curieusement les triangles ABC et $A'B'C'$ ont l'air semblables sur la figure. Qu'en pensez-vous ?

Correction



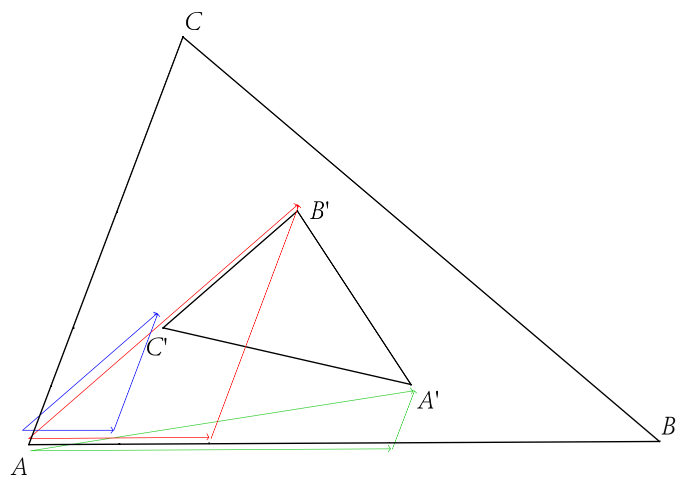
1. a. A' est le milieu de $[BC']$ donc $\begin{cases} \dfrac{1+c}{2} = a \\ \dfrac{0+c'}{2} = a' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+1 = 2a \\ c' = 2a' \end{cases}$; B' est le milieu de $[CA']$ donc $\begin{cases} \dfrac{0+a}{2} = b \\ \dfrac{a'+1}{2} = b' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ a'+1 = 2b' \end{cases}$, enfin C' est le milieu de $[AB']$ donc $\begin{cases} \dfrac{0+b}{2} = c \\ \dfrac{0+b'}{2} = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2c \\ b' = 2c' \end{cases}$.

b. $\begin{cases} c+1 = 2a \\ a = 2b \\ b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c+1 = 4b = 8c \\ a = 2b \\ b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 7c \\ a = 2b \\ b = 2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1/7 \\ a = 4/7 \\ b = 2/7 \end{cases}$.

c. $\begin{cases} c' = 2a' \\ a'+1 = 2b' \\ b' = 2c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c' = 2a' \\ a'+1 = 4c' = 8a' \\ b' = 2c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c' = 2/7 \\ a' = 1/7 \\ b' = 4/7 \end{cases}$.

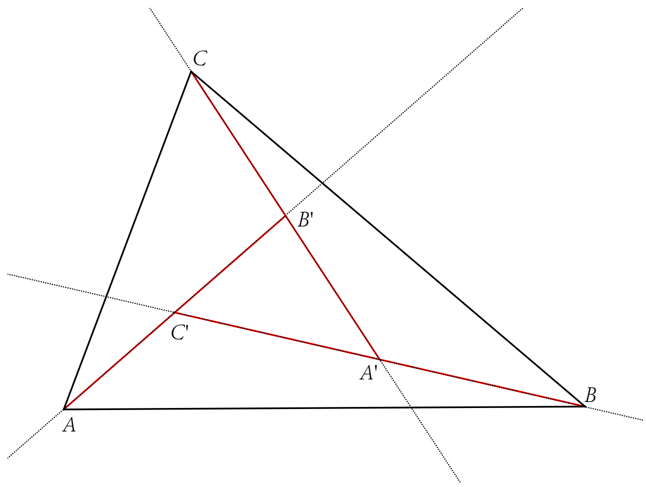
2. Les coordonnées de A' dans le repère $\left(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ sont donc $\left(\dfrac{4}{7}\,;\dfrac{1}{7}\right)$, soit écrit sous forme vectorielle : $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{7}\overrightarrow{AC}$. De même les coordonnées de B' sont $\left(\dfrac{2}{7}\,;\dfrac{4}{7}\right)$ donc $\overrightarrow{AB'} = \dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}$, enfin celles de C' sont $\left(\dfrac{1}{7}\,;\dfrac{2}{7}\right)$ d'où $\overrightarrow{AC'} = \dfrac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC}$.

3.



4. $\overrightarrow{C'B'} = \overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AC'} = \dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{7}\overrightarrow{AB} - \dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{7}\overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{7}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC'}$. Ceci montre bien que C' est le milieu de $[AB']$. On a de même $\overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{B'A'}$.

5. En fait ces triangles ne sont pas du tout semblables… sur la figure du début on voit bien que les angles sont différents !



7. Equations de droites 1 (c)

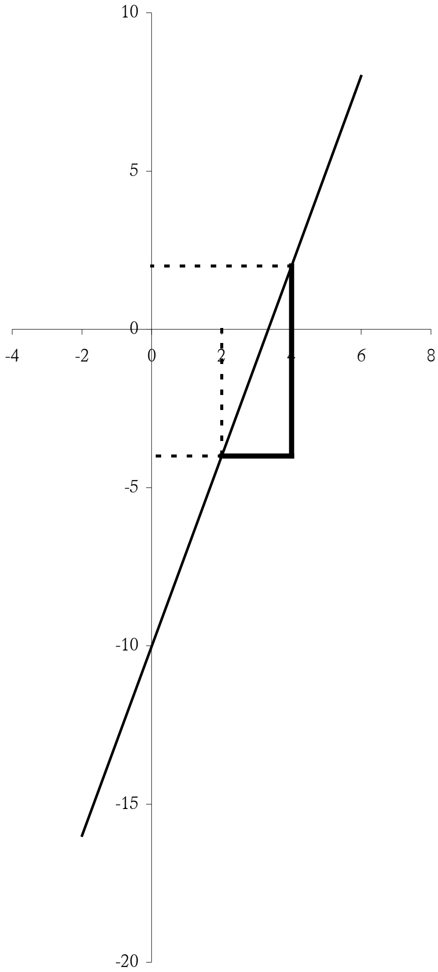
Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points $A(2\,;\,-4)$ et $B(4\,;\,2)$

a. Tracez la droite (AB) et expliquez comment obtenir une équation de cette droite par simple lecture graphique.

b. Déterminez par le calcul une équation de la droite (AB).

c. Déterminez une équation de la droite (D) parallèle à (AB) et passant par le point $C(0\,;\,3)$.

d. Déterminez une équation de la médiane issue de A dans le triangle ABC.



Correction

a. L'ordonnée à l'origine est -10, le coefficient directeur est indiqué par les traits gras : $\dfrac{\textit{différence des y}}{\textit{différence des x}}=\dfrac{6}{2}=3$.

b. $\begin{vmatrix} x-2 & 4-2 \\ y+4 & 2-(-4) \end{vmatrix}=6(x-2)-2(y+4)=6x-2y-20=0 \Leftrightarrow 3x-y-10=0$.

c. Même coefficient directeur 3 : $\begin{cases} y=3x+b \\ 3=3.0+b \end{cases} \Rightarrow y=3x+3$.

d. On cherche le milieu de [BC], soit $I\left(\dfrac{x_B+x_C}{2}\,;\dfrac{y_B+y_C}{2}\right)=(2\,;\dfrac{5}{2})$.

Equation de la médiane (AI) :

$\begin{vmatrix} x-2 & 2-2 \\ y+4 & 5/2-(-4) \end{vmatrix}=\dfrac{13}{2}(x-2)-0(y+4)=\dfrac{13}{2}x-13=0 \Leftrightarrow x=2$.

8. Equations de droites 2 (c)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(4\,;-2)$, $B(-4\,;-1)$, $C(2\,;8)$ et $H(-2\,;2)$.

1. Faire une figure et montrer que les points B, C et H sont alignés.

2. a. Calculer les distances AH, BH et AB.

   b. Démontrer que le triangle AHB est rectangle en H.

3. Calculer l'aire du triangle ABC.

4. Soit (D) la droite qui passe par A et qui est parallèle à (BC).

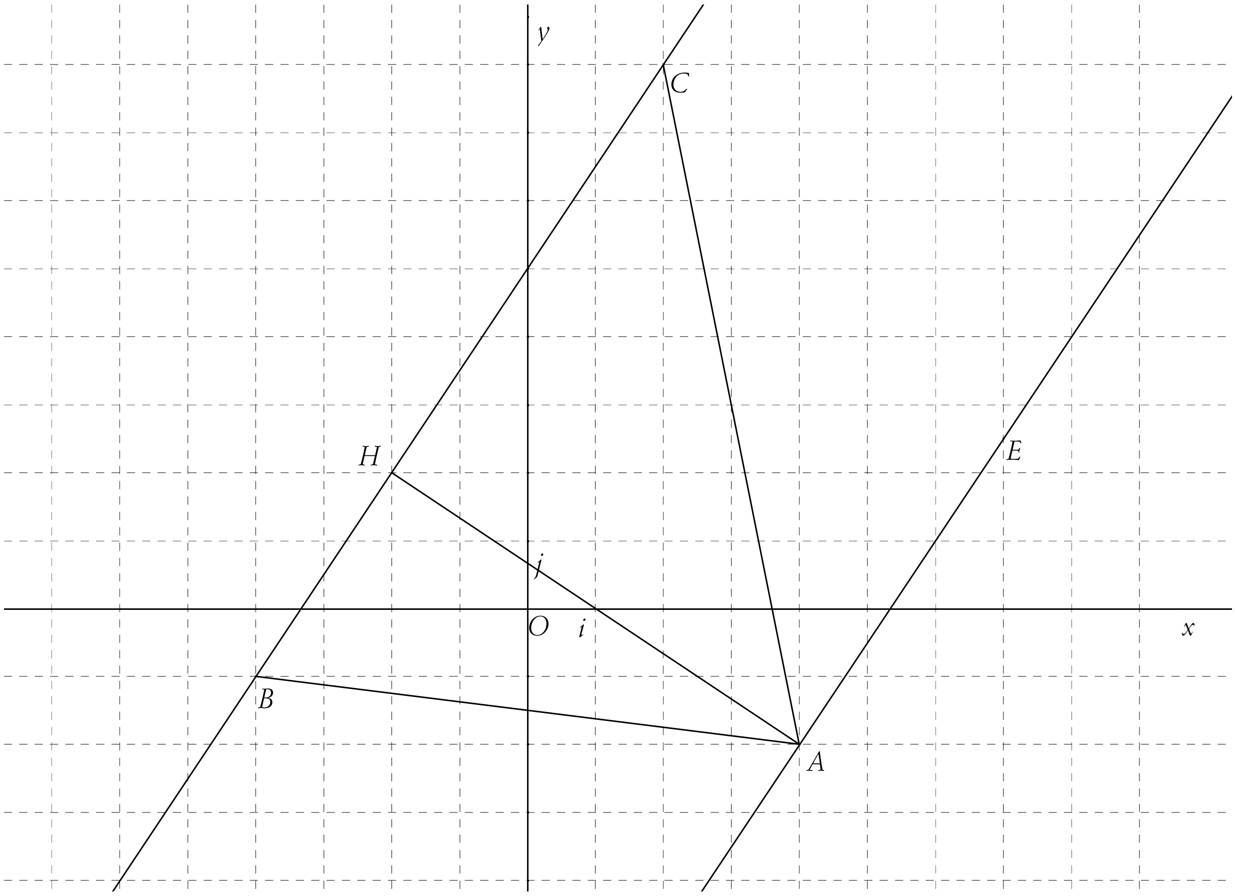
   a. Déterminer le coefficient directeur de (BC) ou un vecteur directeur de (BC).

   b. Déterminer une équation de (D).

   c. Le point $E\left(7\,;\dfrac{5}{2}\right)$ appartient-il à (D) ?

   d. Quelle est l'aire du triangle BCE ?

Correction



Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(4\,;-2)$, $B(-4\,;-1)$, $C(2\,;8)$ et $H(-2\,;2)$.

1. B, C et H sont alignés : $\det\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BH}\right)=\begin{vmatrix}2+4 & -2+4\\ 8+1 & 2+1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 2\\ 9 & 3\end{vmatrix}=18-18=0$.

2. a. $AH=\sqrt{(-2-4)^2+(2+2)^2}=\sqrt{36+16}=\sqrt{52}$, $BH=\sqrt{(-2+4)^2+(2+1)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$,

$AB=\sqrt{(-4-4)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{64+1}=\sqrt{65}$.

b. Pythagore dans AHB : $AH^2+BH^2=52+13=65=AB^2$.

3. Le triangle ABC a pour base BC et pour hauteur AH. Il suffit donc de calculer BC : $BC=\sqrt{(2+4)^2+(8+1)^2}=\sqrt{36+81}=\sqrt{117}$ d'où l'aire du triangle ABC : $\frac{1}{2}AH.BC=\frac{1}{2}\sqrt{52}.\sqrt{117}=39$.

4. a. Le coefficient directeur de (BC) est $\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$; un vecteur directeur de (BC) est $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}6\\9\end{pmatrix}$.

b. (D) passe par A et est parallèle à (BC) donc elle a même coefficient directeur ou même vecteur directeur :

* $y=mx+p \Leftrightarrow \begin{cases} m=3/2 \\ -2=4\frac{3}{2}+p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=3/2 \\ -8=p \end{cases} \Rightarrow y=\frac{3}{2}x-8$ ou bien

* $\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{BC}\right)=\begin{vmatrix} x-4 & 6 \\ y+2 & 9 \end{vmatrix}=9(x-4)-6(y+2)=0 \Leftrightarrow 9x-36-6y-12=0 \Leftrightarrow 3x-2y-16=0$.

c. $E\left(7\,;\frac{5}{2}\right)$ appartient à (D) : $3.7-2.\frac{5}{2}-16=21-5-16=0$.

d. L'aire du triangle BCE est la même que celle du triangle ABC… (même base BC et même hauteur AH).

9. Droites concourantes (c)

On définit trois droites de la manière suivante :

* (D_1) passe par $A(-4\,;\,-1)$ et a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$;

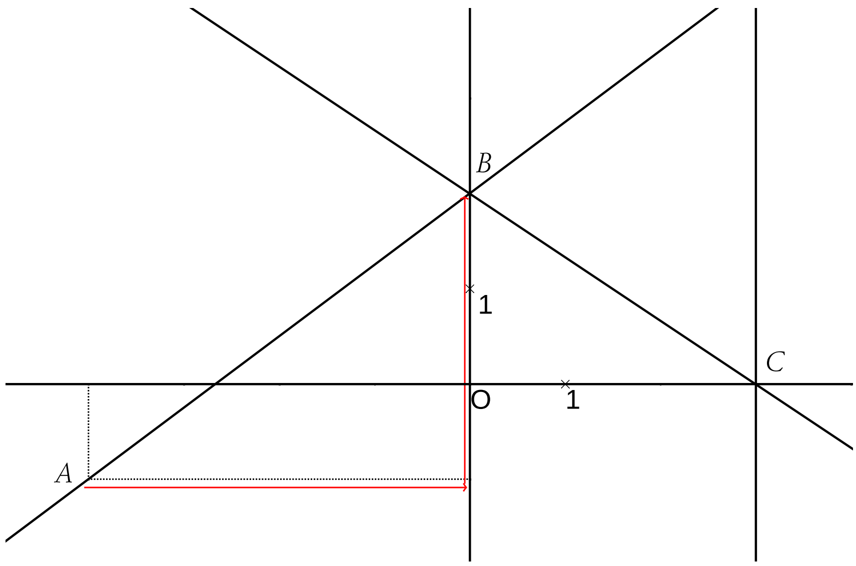
* (D_2) passe par $B(0\,;\,2)$ et $C(3\,;\,0)$;

* (D_3) est parallèle à l'axe (Oy) et passe par C.

1. Représenter ces trois droites.
2. Ecrire une équation de chacune de ces droites.
3. Déterminer leur(s) point(s) d'intersection deux à deux. Sont-elles concourantes ?

Correction

1.



2. (D_1) : $y=\frac{3}{4}x+b$ et $-1=\frac{3}{4}(-4)+b \Rightarrow b=-1+3=2$; on a donc $y=\frac{3}{4}x+2$

(D_2) : $\begin{vmatrix} x-0 & 3-0 \\ y-2 & 0-2 \end{vmatrix}=-2x-3(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x+3y-6=0$;

(D_3) : $x = 3$.

3. (D_2) et (D_3) se coupent en C évidemment.

(D_1) et (D_3) se coupent en un point U : $x = 3$ et $y=\frac{3}{4}(3)+2=\frac{17}{4}$.

(D_1) et (D_2) se coupent en B : B est évidemment sur (D_2), il est également sur (D_1) car lorsque $x = 0$, $y=\frac{3}{4}0+2=2$.

Ces trois droites ne sont évidemment pas concourantes.

10. Equations de droites 3 (c)

(Tous les résultats devront être justifiés par calcul !)

Placer dans un repère orthonormal les points $A(0\ ;\ 1)$, $B(4\ ;\ 3)$ et $C(-2\ ;\ 5)$.

1. A est-il sur la médiatrice de $[BC]$?
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Quelles doivent être les coordonnées de D pour que $ABDC$ soit un carré ? Placer D.
4. Montrer que I, le milieu de $[AB]$, appartient au cercle de centre C et de rayon 5. Placer I.
5. Soit les points $E(2000\ ;\ 1000)$ et $F(2000\ ;\ 1001)$. Lequel de ces deux points appartient à la droite (AB) ?
6. Soit $G(3996\ ;\ 2004)$ et $H(3996\ ;\ 2005)$. Laquelle des droites (CG) ou (CH) est parallèle à la droite (AB) ?

<u>Correction</u>

Pour le dessin, c'est facile !

On rappelle la formule de la distance entre deux points : $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

1. La médiatrice de $[BC]$ est l'ensemble des points équidistants des points B et C. Il suffit donc de vérifier si $AB = AC$.

$AB=\sqrt{(4-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ et $AC=\sqrt{(-2-0)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

Ainsi, $AB = AC$ et donc le point A est bien sur la médiatrice de $[BC]$.

2. D'après la question précédente, ABC est, au moins, un triangle isocèle. Serait-il, de plus, rectangle en A ?

Calculons $BC^2=(-2-4)^2+(5-3)^2=36+4=40$. De même $AB^2 + AC^2 = 20 + 20 = 40$. D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A. Par conséquent, ABC est un triangle isocèle rectangle en A.

3. Etant donné que ABC est un triangle isocèle et rectangle, il suffit de chercher les coordonnées de D pour que $ABDC$ soit un parallélogramme. Or, $ABDC$ est un parallélogrammesi et seulement si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ c'est-à-dire $\begin{cases} x_D-x_C=x_B-x_A \\ y_D-y_C=y_B-y_A \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x_D+2=4-0 \\ y_D-5=3-1 \end{cases}$, ce qui donne : $\begin{cases} x_D=2 \\ y_D=7 \end{cases}$.

Les coordonnées de D doivent être $(2\ ;7)$.

4. I est le milieu de $[AB]$; ses coordonnées sont $x_I=\frac{0+4}{2}=2$ et $y_I=\frac{1+3}{2}=2$.

La distance IC mesure $IC=\sqrt{(2+2)^2+(5-2)^2}=5$. I appartient bien au cercle de centre C et de rayon 5.

5. $\det\left(\overrightarrow{AE}\ ;\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix} 2000 & 4 \\ 999 & 2 \end{vmatrix}=4\neq 0$: les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les points A, E et C ne sont pas alignés. Par conséquent, E n'appartient pas à la droite (AB).

$\det\left(\overrightarrow{AF}\ ;\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix} 2000 & 4 \\ 1000 & 2 \end{vmatrix}=4000-4000=0$: les vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, les points A, F et C sont alignés, F appartient à la droite (AB).

6. $\det\left(\overrightarrow{CG}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}3998 & 4\\ 1999 & 2\end{vmatrix}=7996-7996=0$: les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, les droites (CG) et (AB) sont parallèles.

$\det\left(\overrightarrow{CH}\,;\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}3998 & 4\\ 2000 & 2\end{vmatrix}=7996-8000=-4\neq 0$: les vecteurs $\overrightarrow{CH}$ et $\overrightarrow{AB}$ ne sont pas colinéaires, les droites (CH) et (AB) ne sont pas parallèles.

11. Equations de droites, rectangle (c)

Soit un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ dans lequel on place le carré $OCBA$ où A a pour coordonnées (0 ; 4), B(4 ; 4) et C(4 ; 0).

1. E le milieu de [BC] et F le point tel que $\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CO}$; montrer que les coordonnées de E sont (4 ; 2) et celles de $F\left(-2\,;0\right)$.

2. Calculer les longueurs AE, AF et FE ; montrer que le triangle AFE est rectangle isocèle.

3. Soit (d) la droite passant par O et parallèle à (AE) et (d') la droite (BF). Déterminer une équation de (d) et une équation de (d') ; calculer les coordonnées de leur point d'intersection I. Tracer (d) et (d') et contrôler graphiquement votre résultat.

4. On admet que I a pour coordonnées $\left(-\frac{8}{7}\,;\frac{4}{7}\right)$. Soit G le point d'ordonnée négative tel que le triangle OFG soit rectangle isocèle de sommet F. Placer G sur la figure ; déterminer les coordonnées de G et prouver que les points A, I et G sont alignés.

<u>Correction</u>

1. E le milieu de [BC] : $\begin{cases}x_E=\frac{1}{2}\left(4+4\right)=4\\ y_E=\frac{1}{2}\left(4+0\right)=2\end{cases}$; $\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CO}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_F-4\\ y_F-0\end{pmatrix}=\frac{3}{2}\begin{pmatrix}0-4\\ 0-0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_F=-2\\ y_F=0\end{cases}$.

2. $AE=\sqrt{(4-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{20}$; $AF=\sqrt{(-2-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{20}$; $FE=\sqrt{(4+2)^2+(2-0)^2}=\sqrt{40}$; donc $AE=AF$ et $AE^2+AF^2=FE^2$.

3. $\det\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{AE}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-0 & 4-0\\ y-0 & 2-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & 4\\ y & -2\end{vmatrix}=-2x-4y=0\Leftrightarrow x+2y=0$;

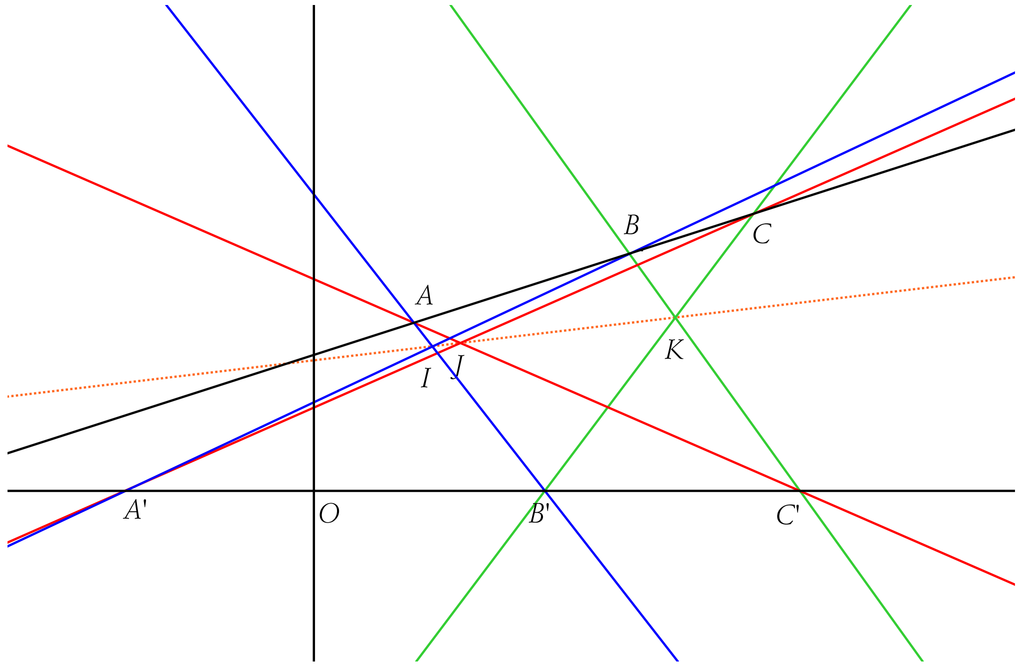
$\det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BF}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-4 & -2-4\\ y-4 & 0-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x-4 & -6\\ y-4 & -4\end{vmatrix}=-4(x-4)+6(y-4)=0\Leftrightarrow -4x+6y-8=0$;

$\begin{cases}x+2y=0\\ -2x+3y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2y\\ 4y+3y-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-8/7\\ y=4/7\end{cases}$.

4. G a évidemment pour coordonnées (−2, −2) ; on a alors A, I, G alignés :

$\det\left(\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AG}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-8/7-0 & -2-0\\ 4/7-4 & -2-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-8/7 & -2\\ -24/7 & -6\end{vmatrix}=\frac{48}{7}-\frac{48}{7}=0$.

12. Equations de droites : Th. de Pappus (c)



On se donne les points $A(1 ; 2)$, $B(5 ; 4)$, $C(u, v)$ sur (AB) et $A'(-2 ; 0)$, $B'(2 ; 0)$, $C'(4 ; 0)$.

On note I le point d'intersection de (AB') et $(A'B)$, J celui de (AC') et $(A'C)$, K celui de (BC') et $(B'C)$.

Montrer que I, J, K sont alignés.

(On pourra prendre $u = 7$ par exemple et trouver l'ordonnée v de C).

Correction

L'équation de (AB) est : $x-2y+3=0$. Si on prend C à l'abscisse u, on a $y=\dfrac{u+3}{2}$. Avec $u = 7$, on a $C(7 ; 5)$.

On trouve les équations des six droites :

$(AB'): 2x+y-4=0, (A'B): 4x-7y+8=0$ et leur point d'intersection : $I\left(\dfrac{10}{9}, \dfrac{16}{9}\right)$;

$(AC'): 2x+3y-8=0, (A'C): 5x-9y+10=0$ et leur point d'intersection : $J\left(\dfrac{14}{11}, \dfrac{20}{11}\right)$;

$(BC'): 4x-y-16=0, (B'C): x-y-2=0$ et leur point d'intersection : $K\left(\dfrac{14}{3}, \dfrac{8}{3}\right)$;

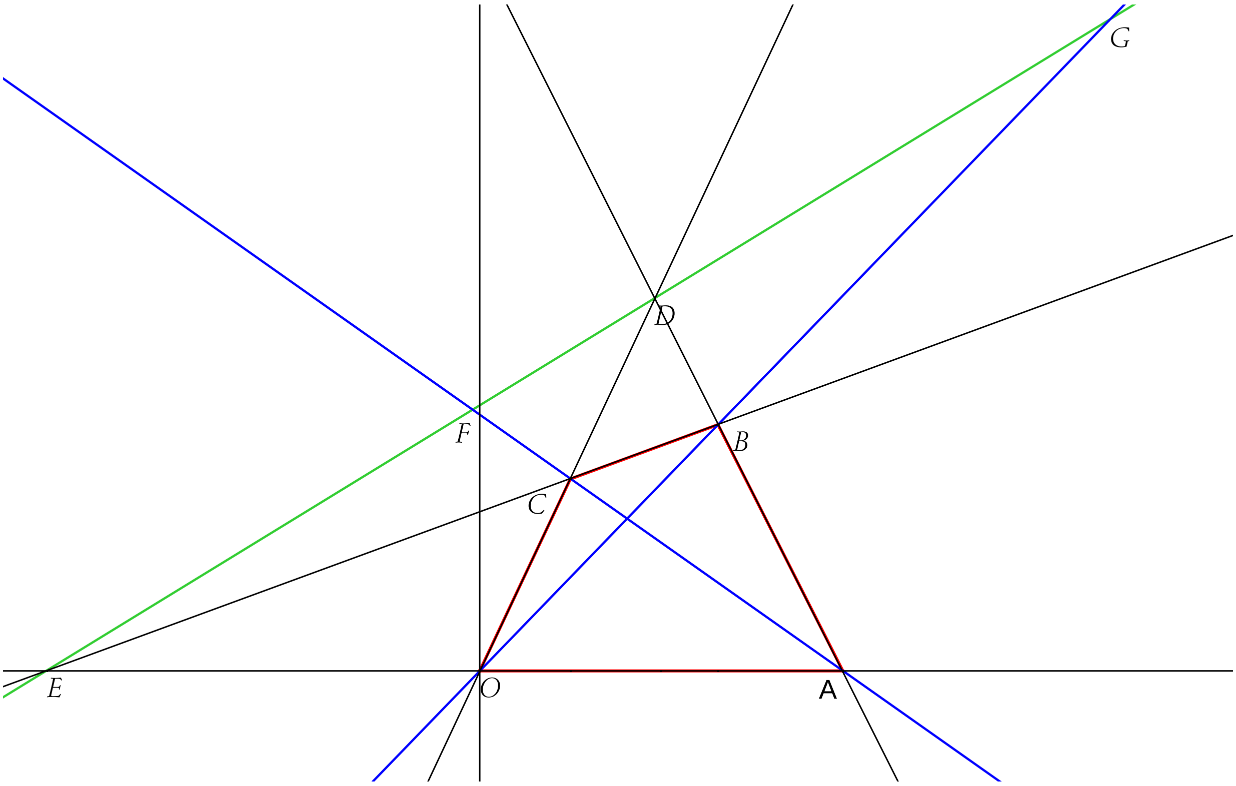
il reste à vérifier que ces points sont alignés :

$$\frac{y_I-y_J}{x_I-x_J}=\frac{\frac{16}{9}-\frac{20}{11}}{\frac{10}{9}-\frac{14}{11}}=\frac{176-180}{110-126}=\frac{-4}{-16}=\frac{1}{4} \text{ et } \frac{y_I-y_K}{x_I-x_K}=\frac{\frac{16}{9}-\frac{8}{3}}{\frac{10}{9}-\frac{14}{3}}=\frac{16-24}{10-42}=\frac{-8}{-32}=\frac{1}{4}.$$

C'est bon.

Ceci est un théorème général…

13. Equations de droites : Quadrilatère complet (c)



On se donne les points A(6 ; 0), B(4 ; 4), C(1 ; 3).

Calculer les coordonnées des points D, E, F, G. Montrer que $\frac{EF}{EG}.\frac{DG}{DF}=1$

Correction

On calcule d'abord les équations des droites (AB), (OC), (AC) et (OB), (BC) et (OA) :

(AB) : $2x+y-12=0$, (OC) : $3x-y=0$, (AC) : $3x+5y-18=0$, (OB) : $y-x=0$, (BC) : $x-3y+8=0$, (OA) : $y=0$.

On cherche E à l'intersection de (OA) et (BC) : $E(0\,;\,-8)$ puis D à l'intersection de (OC) et (AB) : $D\left(\frac{12}{5};\frac{36}{5}\right)$. Equation de (ED) : $9x-13y+72=0$.

On cherche F à l'intersection de (AC) et (ED) : $F\left(\frac{-3}{2};\frac{9}{2}\right)$ et G à l'intersection de (OB) et (ED) : $G(18\,;18)$. Il reste à calculer les distances : $DF=\frac{3\sqrt{10}}{2}$, $DG=6\sqrt{10}$, $EF=\frac{5\sqrt{10}}{2}$, $EG=10\sqrt{10}$ et on vérifie aisément que $\frac{EF}{EG}.\frac{DG}{DF}=1$.

Ceci est en fait une propriété générale …

14. Equations de droites : Centres de gravité, régionnement (c)

Soit un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ du plan et trois points A, B et C définis ci-dessous.

1. La droite (AB) a pour équation $y = x + 3$; la droite (AC) a pour équation $x + 2y + 6 = 0$; les points B et C ont respectivement pour ordonnées 5 et –4.

B' est le milieu de [AC].

Déterminez les coordonnées des points A, B, C et B'.

2. Donnez les équations réduites de (*AC*) et (*BC*). Représentez les droites (*AC*), (*BC*) et (*AB*).

3. Calculez les coordonnées du point *D* de sorte que *ABCD* soit un parallélogramme.

4. Déterminez une équation de la droite (d) parallèle à (*AB*) passant par *B'* et les coordonnées des points d'intersection de (d) avec les axes.

5. Quel est le centre de gravité du triangle *ABC* ?

6. (d) et (*AD*) se coupent en *E*. (d) et (*BC*) se coupent en *F*. Donnez les coordonnées de *E* et *F*. Quelle est la nature du quadrilatère *ABFE* ?

7. Calculez les coordonnées de *G*, centre de gravité du triangle *ADC*, et déterminez le réel *k* tel que le point *G* appartienne à la droite (d') d'équation : $3x - y + k = 0$.

8. Représenter graphiquement, en précisant bien les bords, l'ensemble des points *M* dont les coordonnées sont solutions du système : $\begin{cases} x-y+3>0 \\ x+2y+6\geq 0 \\ x-2>0 \end{cases}$.

Correction

1. *A* est à l'intersection de (*AB*) et (*AC*). Ses coordonnées $(x_A\,;y_A)$ sont solutions du système $\begin{cases} y=x+3 \\ x+2y+6=0 \end{cases}$ c'est-à-dire $\begin{cases} -x+y-3=0 \\ x+2y+6=0 \end{cases}$.

En additionnant les deux lignes, on trouve : $3y + 3 = 0$ et donc : $y = -1$. En reportant dans une équation, il vient $x = -4$.

B a pour ordonnée 5 et appartient à (*AB*) d'équation $y = x + 3$. Son abscisse vaut 2.

C a pour ordonnée – 4 et appartient à (*AC*) d'équation $x + 2y + 6 = 0$. On résout l'équation $x+2(-4)+6 = 0$ ce qui donne $x = 2$.

B' est le milieu de [*AC*]. Ses coordonnées sont donc : $\left(\dfrac{x_A+x_C}{2}\,;\dfrac{y_A+y_c}{2}\right)=\left(-1\,;-\dfrac{5}{2}\right)$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées : $(x_C-x_A\,;y_C-y_A)$, ce qui donne $(6\,;-3)$.

$M(x\,;y)$ appartient à (*AC*) équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires ce qui équivaut encore à déterminant($\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AC}$) = 0, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} x+4 & 6 \\ y+1 & -3 \end{vmatrix}=0$ ou encore $-3(x + 4)–6(y + 1) = 0$.

Après simplification, l'équation *réduite* de (*AC*) est : $y=-\dfrac{1}{2}x-3$.

Les points *B* et *C* ont la même abscisse 2. La droite (*BC*) est donc parallèle à l'axe des ordonnées, son équation réduite est $x = 2$.

3. Pour que *ABCD* soit un parallélogramme, il faut que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$. Appelons x_D et y_D l'abscisse et l'ordonnée du point *D*. Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(6\,;6)$ et celles de $\overrightarrow{DC}$ sont $(2-x_D\,;-4-x_D)$. Les vecteurs sont égaux lorsque leurs coordonnées sont égales : $x_D = -4$ et $y_D = -10$; conclusion $D(-4\,;-10)$.

4. La droite (*AB*) a pour coefficient directeur 1. (d) est parallèle à (*AB*) et a donc le même coefficient directeur. Son équation réduite est donc de la forme $y = x + k$.

Or (d) passe par le point $B'\left(-1\,;-\dfrac{5}{2}\right)$; on trouve, en remplaçant, $k=-\dfrac{3}{2}$. Une équation de (d) est donc : $y=x-\dfrac{3}{2}$.

Les point d'intersection avec les axes ont, soit une abscisse nulle, soit une ordonnée nulle.

Ces points ont donc pour coordonnées : $\left(0\,;-\dfrac{3}{2}\right)$ et $\left(\dfrac{3}{2}\,;0\right)$.

5. Sur la figure, il **semble** que le centre de gravité du triangle *ABC* soit le point *O*. Pour le vérifier, montrons que *O* vérifie la relation vectorielle : $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$, en utilisant les coordonnées.

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ a pour coordonnées : $(x_A + x_B + x_C\,;y_A + y_B + y_C)$. Or $x_A + x_B + x_C = -4+2+2 = 0$ et $y_A + y_B + y_C = -1+5-4 = 0$. Donc la relation est vérifiée. Le centre de gravité de *ABC* est *O*.

6. Comme *ABCD* est un parallélogramme, (*AD*) et (*BC*) sont parallèles. D'après 2. l'équation réduite de (*AD*) est donc $x = -4$ (droite parallèle à l'axe des orodnnées).

Les coordonnées de *E* vérifient donc le système $\begin{cases} x=-4 \\ y=x-3/2 \end{cases}$, soit $E(-4\,;\,-11/2)$. Les coordonnées de *F*

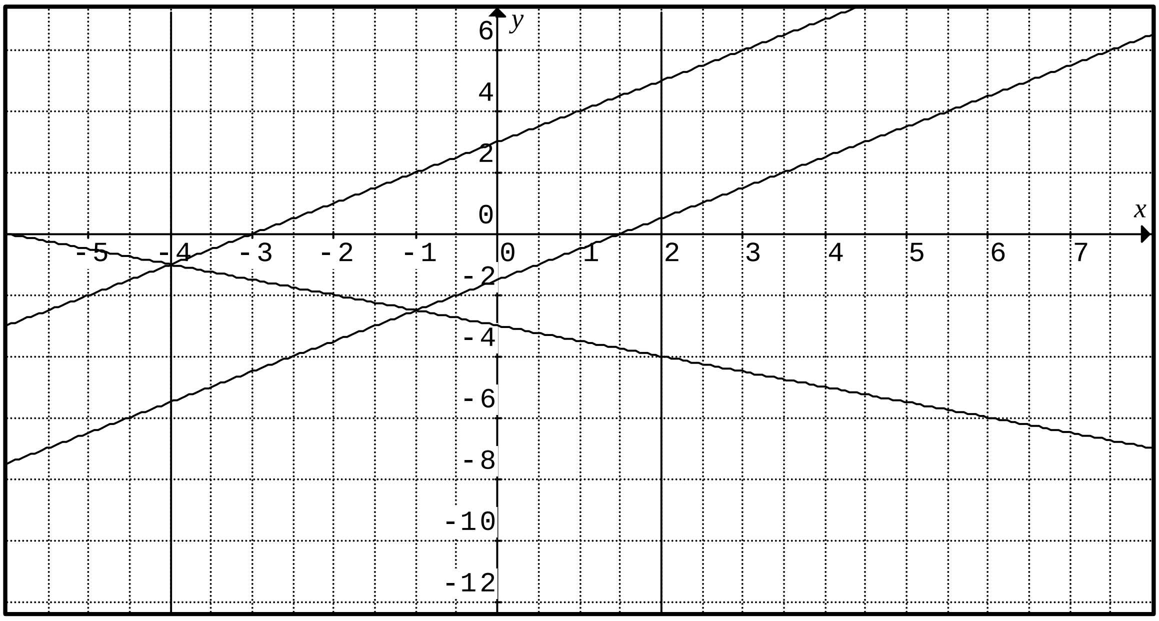
vérifient le système $\begin{cases} x=2 \\ y=x-3/2 \end{cases}$: $F(2\,;\,1/2)$.

Le vecteur $\overrightarrow{EF}$ a pour coordonnées : $(2-(-4)\,;\,(1/2)-(11/2)) = (6\,;\,6)$. Les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont donc égaux, *ABFE* est un parallélogramme .

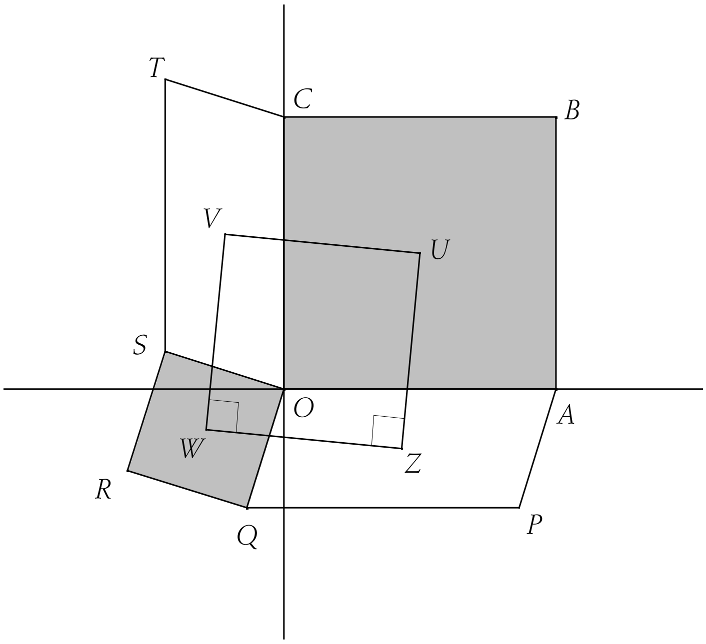
7. Soit $G(x_G\,;y_G)$ le centre de gravité de *ADC*. Alors $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Avec les coordonnées, cela se traduit par : $\begin{cases} (-4-x_G)+(-4-x_G)+(2-x_G)=0 \\ (-1-y_G)+(-10-y_G)+(-4-y_G)=0 \end{cases}$.

D'où, après résolution des deux équations : G $(-2\,;\,-5)$. Comme *G* appartient à (d'), ses coordonnées vérifient l'équation $3x - y + k = 0$, d'où : $3(-2) - (-5) + k = 0$ et finalement : $k = 1$.

8. Voir le graphique (un des côtés est compris dans l'ensemble cherché).



15. Fabriquer un carré (c)



On se donne les points $A(4\ ;\ 0)$, $B(4\ ;\ 4)$, $C(0\ ;\ 4)$, $P(3\ ;\ -2)$, $Q(-1\ ;\ -2)$, $S(-2\ ;\ -1)$, $T(-2\ ;\ 5)$.

U, V, W et Z sont les centres des parallélogrammes $OABC$, $OCTS$, $OSRQ$, $OQPA$.

Montrer que $UVWZ$ est un carré.

Correction

Les milieux de chaque parallélogramme sont donc :

$U\left(\frac{4+0}{2},\frac{0+4}{2}\right)=(2,2)$, $V\left(\frac{0-2}{2},\frac{0+5}{2}\right)=\left(-1,\frac{5}{2}\right)$, $W\left(\frac{-2-1}{2},\frac{-1-2}{2}\right)=\left(\frac{-3}{2},\frac{-3}{2}\right)$

$Z\left(\frac{0+3}{2},\frac{0-2}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},-1\right)$.

On calcule les longueurs

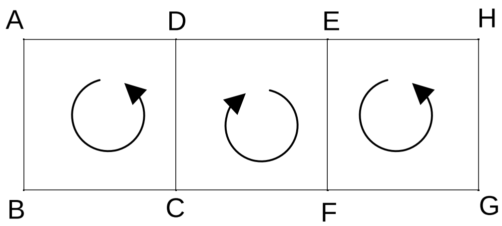
$$UZ=\sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+(-1-2)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+9}=\frac{\sqrt{37}}{2},\ UV=\sqrt{(-1-2)^2+\left(\frac{5}{2}-2\right)^2}=\sqrt{9+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{37}}{2}\text{, etc.}$$

Il nous faut vérifier Pythagore : $VZ=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+\left(-1-\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{49}{4}}=\frac{\sqrt{74}}{2}$.

On a donc bien $UZ^2+UV^2=\frac{37}{4}+\frac{37}{4}=\frac{74}{4}=VZ^2$.

16. Trois carrés (c)

Soit les trois carrés accolés ci-dessous : le carré direct $ABCD$, le carré indirect $CDEF$ et le carré direct $EFGH$.



1. Reconstruire cette figure.

2. Placer le point I milieu du segment $[BD]$ et J le point d'intersection des droites (BH) et (CD).

Les points I, J et F "semblent" alignés. On va déterminer par le calcul s'ils le sont ou pas !

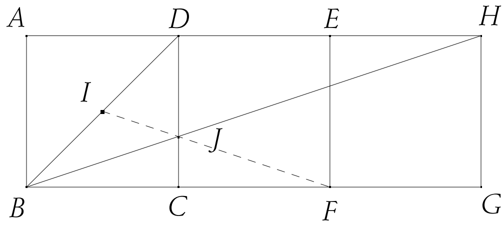
3. Montrer que : $CJ = \frac{1}{3} CD$.

4. Choisir un repère *judicieux* (d'origine $B(0\ ;\ 0)$) et donner les coordonnées de tous les points du plan. *(On ne justifiera pas sauf pour les points I et J).*

5. En déduire alors par un simple calcul si les points I, J et F sont alignés.

6. En déduire que la droite (BH) coupe le segment $[DF]$ en son milieu.

Correction



1. Facile !

2. Idem !!

3. Les droites (CG) et (JH) sont sécantes en B et les droites (CJ) et (GH) sont parallèles (puisque $CDEF$ et $EFGH$ sont des carrés) donc d'après le Théorème de Thalès, on a : $\frac{CJ}{GH} = \frac{BC}{BG}\left(= \frac{BJ}{BH}\right)$ dont on déduit que :

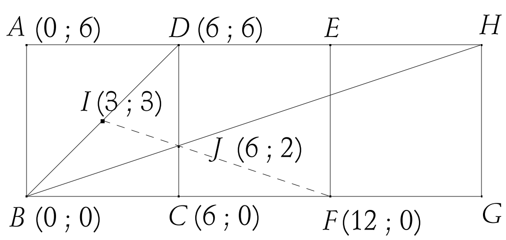
$$\frac{CJ}{GH} = \frac{BC}{3BC} = \frac{1}{3}.$$

Donc $CJ = \frac{1}{3}GH$. Comme $ABCD$, $CDEF$ et $EFGH$ sont des carrés alors $GH = CD$ d'où, finalement, $CJ = \frac{1}{3}CD$.

4. Le repère qui semble le *"plus judicieux"* est le repère $\left(B\ ; \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{6}\overrightarrow{BA}\right)$ qui donne des coordonnées entières pour tous les points : $A(0\ ;\ 6)$, $B(0\ ;\ 0)$, $C(6\ ;\ 0)$, $D(6\ ;\ 6)$, $E(12\ ;\ 6)$, $F(12\ ;\ 0)$, $G(18\ ;\ 0)$, $H(18\ ;\ 6)$.

Comme I est le milieu du segment $[BD]$, $x_I = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$ et $y_I = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{0+6}{2} = 3$ d'où $I(3\ ;\ 3)$.

Comme J est sur le segment $[CD]$ et que $CJ = \frac{1}{3}CD$ on obtient $J(6\ ;\ 2)$.



5. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IF}$ ont les coordonnées suivantes : $\overrightarrow{IJ}\ (3\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{IF}\ (9\ ;\ -3)$.

On calcule : $\det(\overrightarrow{IJ};\overrightarrow{IF})=\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}=-9-(-9)=0$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IF}$ sont colinéaires.

Par conséquent, les points I, J et F sont alignés.

6. Dans le triangle *BDF*, les droites (*DC*) et (*IF*) sont des médianes (droites joignant un sommet et le milieu du côté opposé) et elles sont sécantes en J.

Or les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité du triangle. Donc J est le centre de gravité du triangle *BDF* et la droite (*BJ*) est une médiane. Elle coupe donc le côté opposé en son milieu.

Bilan des courses, la droite (*BH*) coupe le segment [*DF*] en son milieu.