Classe de Seconde

Géométrie vectorielle et analytique

1. Construire

1. On donne deux points A et B. Placer C tel que $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

2. Exprimer $\overrightarrow{BC}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

3. Placer D tel que $\overrightarrow{AD}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Exprimer $\overrightarrow{CD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

2. Triangle facile

Soit un triangle ABC.

1. Placer les points D et E définis par $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

2. Montrer que les points A, D, E sont alignés.

3. Parallélogramme - 1

On considère un triangle ABC et les points D, E, F, G tels que : $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$, $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, G milieu de $[BD]$.

1. Faire la figure.

2. Montrer que $EBGF$ est un parallélogramme.

3. La droite (EG) coupe (BF) en I, (CD) en J et (AC) en K. Montrer que $\overrightarrow{JG}=\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{EK}$.

4. Parallélogramme - 2

Soit un parallélogramme $ABCD$. On désigne par O le centre du parallélogramme, E le symétrique de A par rapport à B, F le symétrique de B par rapport à C, G le symétrique de C par rapport à D, H le symétrique de D par rapport à A.

Il semble que le quadrilatère $EFGH$ soit un parallélogramme. Montrons le en utilisant trois méthodes différentes.

Méthode 1 : *Calcul analytique.*

Indications : Choisir un repère ; donner les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G et H.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GF}$ et conclure.

Méthode 2 : *Transformations.*

Trouver les symétriques de E et F par rapport à O.

Méthode 3 : *Calcul vectoriel.*

Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GF}$ à l'aide des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

5. Parallélogramme - 3

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O. E le point du segment $[CD]$ tel que $\overrightarrow{CD} = 3\overrightarrow{CE}$ et F donné par $\overrightarrow{AF} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. Démontrer que les points B, C et F sont alignés.

2. Construire le point G défini par $\overrightarrow{AG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Démontrer que les points E, O et G sont alignés.

3. Construire les points H et K définis par $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BD}$. Montrer que D est le milieu de $[AK]$ et de $[CH]$.

4. M, N, P et Q sont les points définis par : $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CP} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DQ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$. Prouver que $MNPQ$ est un parallélogramme .

6. Parallélogramme - 4

Soit un parallélogramme $ABCD$.

1. Construire les points E, F et H tels que $2\overrightarrow{EA} + 3\overrightarrow{EB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{BF} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$, et $\overrightarrow{DH} = -\dfrac{5}{4}\overrightarrow{DA}$.

2. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EH}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$.

3. Trouver k réel tel que $\overrightarrow{EH} = k\overrightarrow{EF}$. Que peut-on en déduire pour les points E, F et H ?

7. Parallélogramme - 5

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1. Placer les points I, J, K et L définis par : $\overrightarrow{DI} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BJ} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AK} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DL} = -\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AD}$.

2. a. En utilisant la relation de Chasles, exprimer $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$, puis $\overrightarrow{KL}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

b. En déduire que les droites (IJ) et (KL) sont parallèles.

3. a. On se place dans le repère $\left(A\ ;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$.

Déterminer dans ce repère les coordonnées des points *A, B, C, D, I, J, K et L.*

b. Les droites (IL) et (JK) sont-elles parallèles ? Justifier.

4. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?

8. Parallélisme

On donne un triangle ABC et les trois points D, E et F définis par : $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AE}=-3\overrightarrow{AC}$.

1. Prouver que D,E et F sont alignés.

2. On donne le point G tel que : $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{BC}$. On appelle le point I le milieu de $[AC]$. Prouver que (DG) est parallèle à (BI).

3. On donne les points H et K tels que $\overrightarrow{CH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{BK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$. Prouver que (HK) est parallèle à (BI).

9. Alignement - 1

Soit un parallélogramme $ABCD$ de centre O (rappel : on place les points dans le sens trigonométrique direct).

1. On choisit $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ comme base de vecteurs. Pourquoi ce choix est-il possible ?

2. Quelles sont les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{DB}$ (justifiez) ?

3. Construire E tel que les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$ soient $\left(\frac{2}{3};-\frac{5}{3}\right)$.

4. Démontrer que D, B et E sont alignés.

10. Alignement - 2

Soit un parallélogramme non aplati $ABCD$, E et F deux points de la droite (BD).

1. Placer les points G et H définis par $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}$.

2. Montrer que les points C, G et H sont alignés.

3. On pose $\overrightarrow{BE}=x.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BF}=y.\overrightarrow{BD}$ Comment choisir les réels x et y pour que :

a. G appartienne à (AB) et H à (DC).

b. C soit le milieu de $[GH]$.

c. G soit le milieu de $[CH]$.

d. H soit le milieu de $[CG]$.

11. Alignement - 3

Soit le rectangle $ABCD$ de centre O, I le milieu du segment $[AD]$.

1. Placer le point J tel que $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$.

2. Il semble que les points A, J et C soient alignés. Montrons le en utilisant deux méthodes différentes …

Méthode 1 : *Calcul analytique.*

On se place dans le repère $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Trouver les coordonnées du point J. Démontrer que les points A, J et C sont alignés.

Méthode 2 : *Méthode géométrique.*

Que représente le segment $[IB]$ pour le triangle ADB ? Que représente le point J pour le triangle ADB ? Rédiger une démonstration de l'alignement des points A, J et C.

12. Alignement - 4

On donne un triangle ABC.

1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{EB}=\vec{0}$ (on cherchera d'abord une relation du type $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AB}$).

2. F un point quelconque. Montrer que $\overrightarrow{FA}+2\overrightarrow{FB}=3\overrightarrow{FE}$. Placer le point H tel que $\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HB}+3\overrightarrow{HC}=\vec{0}$.

3. Quelle conjecture peut-on faire pour les points C, E et H ?. La démontrer.

13. Alignement - 5

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$, D et E les points définis par : $\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Soit J le milieu de $[DE]$. Faire une figure.

1. Montrer l'égalité $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AI}$, d'autre part l'égalité $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{IJ}$.

2. Déduire des questions précédentes que A, I et J sont alignés.

3. Soit F le point défini par $\overrightarrow{AF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AI}$. Montrer que F est le milieu de $[AJ]$.

14. Barycentres -1

ABC est un triangle de centre de gravité G. On appelle I le milieu de $[BC]$. La parallèle à (BC) menée par G coupe (AC) en E.

1. Faire la figure et construire le point D défini par $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$.

2. Trouver k réel tel que $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AC}$.

3. Montrer que $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}=\vec{0}$.

4. Monter que les points I, D et E sont alignés.

15. Barycentres -2

Deux triangles ABC et DBC ont en commun le côté BC. On note O le milieu de $[BC]$, I le centre de gravité du triangle ABC et J celui de DBC. Montrez que (IJ) est parallèle à (AD).

16. Orthogonalité

Dans un carré de côté 1, on place M tel que $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$, et N tel que $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$.

P est le milieu de $[AB]$. La droite (MP) coupe la droite (CB) en S.

La perpendiculaire à (MP) passant par N coupe (DC) en R.

Démontrez que (MN) et (RS) sont perpendiculaires (pour la figure prendre un carré de côté 3 cm).

17. Construction de vecteurs - 1

Soient les points $A(2\,;3)$, $B(-2\,;-1)$ et $C(0\,;2)$.

1. Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Sont-ils colinéaires ? Les points A, B, C sont ils alignés ?

2. Déterminer les coordonnées de D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme : on utilisera l'égalité de deux vecteurs puis le symétrique de B par rapport au milieu de $[AC]$ pour vérifier.

3. Soit E le point de coordonnées $(-1\,;-1)$. Est-ce que $ABEC$ est un parallélogramme ? (indiquer 3 méthodes pour montrer que 3 points forment un parallélogramme, en choisir une et l'appliquer).

4. Les droites (ED) et (AB) sont-elles parallèles ?

18. Construction de vecteurs - 2

Dans un repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ on se donne les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}$ et $\vec{v}=-\vec{i}+2\vec{j}$.

1. Construire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis les vecteurs $\frac{1}{2}\vec{u}+3\vec{v};-2\vec{u}-\vec{v};\ -3\vec{u}-2\vec{v};\vec{u}+2\vec{v}$.

2. Donner les coordonnées de chacun de ces vecteurs.

3. Construire le vecteur $\vec{w}=2\vec{u}-\vec{v}+3\vec{i}-\vec{j}$. Quelles sont ses coordonnées ? Donner une expression vectorielle simple de $\vec{w}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

19. Trigo/ lignes trigo de 75°

Soit ABC un triangle tel que l'angle $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$ et l'angle $\hat{C} = \frac{\pi}{3}$ radians. H et K sont les projetés orthogonaux de A sur (BC) et de C sur (AB). De plus $BH = 6$.

1. Faire la figure. Quelle est la mesure en radians de l'angle $\hat{A}$? En degrés ? Placer le point M d'abscisse curviligne $\hat{A}$ sur le cercle trigonométrique.

2. Donner une valeur approchée de cos, sin et tan de $\hat{A}$ avec le cercle (inutile d'utiliser la calculatrice…).

3. Calculez les longueurs AH, AC, BC, CK et AK.

4. Déduisez en les valeurs exactes de $\cos(\hat{A})$, $\sin(\hat{A})$ et $\tan(\hat{A})$.

20. Droites/rectangle

Soit un rectangle $ABCD$, $AB = 6$ cm, $AD = 4$ cm. M le milieu de $[AB]$, N le milieu de $[CD]$, les droites (DM) et (BN) coupent $[AC]$ en I et J.

1. Montrer que (DM) et (BN) sont parallèles.

2. Montrer que $AI = IJ = JC$.

On prend maintenant le repère $\left(A\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ (A en bas à gauche, $\vec{i}$ de longueur 1 cm et colinéaire à $\overrightarrow{AB}$, $\vec{j}$ de longueur 1 cm et colinéaire à $\overrightarrow{AD}$).

3. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, M et N.

4. En déduire les équations des droites (DM), (BN), (AC). Reprendre alors les questions 1° et 2°.

21. Droites orthogonales (en utilisant Pythagore…)

On se donne la droite $D(x+y = 0)$ ainsi que le point $A(4\,;-2)$.

1. Déterminer l'équation de la droite Δ orthogonale à D et passant par A.

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection H entre D et Δ.

3. Calculer la distance AH.

22. Vecteur directeur, coefficient directeur

On se donne deux vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$.

1. Montrer que ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si $ad - bc = 0$.

2. Montrer que ces deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si $ac + bd = 0$.

3. On dira que $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite (d) si et seulement si pour tout point M de (d), si A est un point de (d) alors $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

a. Trouver un vecteur directeur de chacune des droites suivantes :

$$* \ 2x+3y-4=0 \ ; * \ \frac{1}{2}x-\sqrt{3}y+\frac{2}{5}=0 \ ; * \ 4x+5=0 \ ; * \ 2y=1 \ ; * \ x=y \ ; \ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}.$$

b. On se donne la droite (d) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$; donner une équation cartésienne de (d).

$$* \ A(-1:1),\ \vec{u}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} ; * \ A\left(0:\frac{1}{2}\right),\ \vec{u}=\begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} ; * \ A\left(\frac{1}{2}:1\right),\ \vec{u}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} ;$$

$$* \ A\left(\frac{2}{5}:\frac{7}{3}\right),\ \vec{u}=\begin{pmatrix} 1/4 \\ -3 \end{pmatrix} ; * \ A(-1:1),\ \vec{u}=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} ; * \ A(-1:-2),\ \vec{u}=\begin{pmatrix} 2008 \\ -1004 \end{pmatrix}.$$

4. a. Montrer que pour une droite d'équation $ax+by+c=0$ un vecteur directeur est $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

b. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite d'équation $y = mx + p$.

c. Comment passe-t-on de l'un à l'autre ?

d. Quel est le lien entre vecteur directeur et coefficient directeur ?

e. Une droite fait un angle α avec l'horizontale. Donner en fonction de α les coordonnées d'un vecteur directeur et du coefficient directeur de cette droite.

23. Equations de droites : lecture graphique 1

Donner, sans justification, les équations des droites ci-contre.

(D1) : ....

(D2) : ....

(D3) : ....

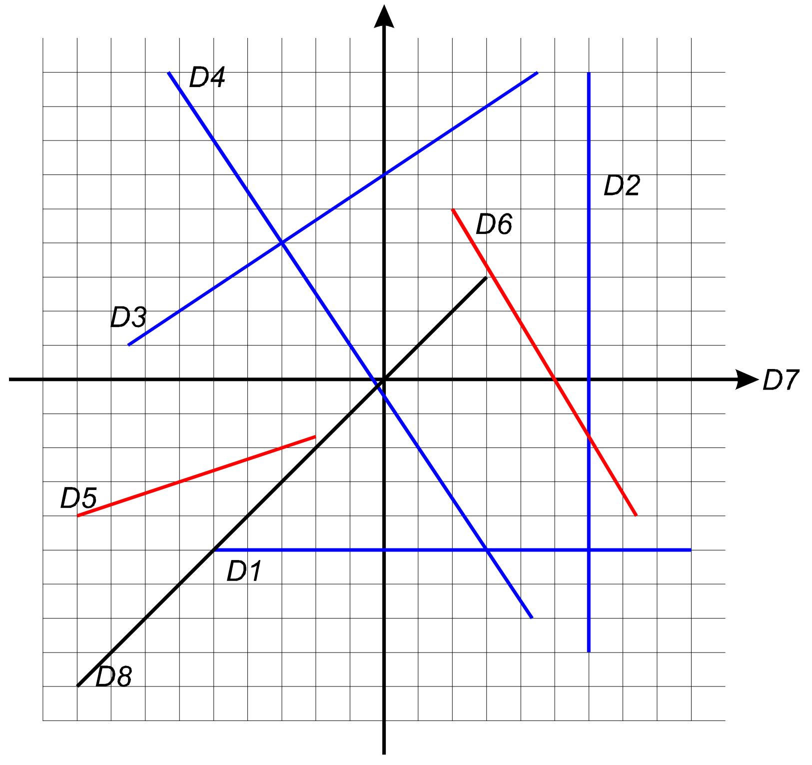
(D4) : ....

(D5) : ....

(D6) : ....

(D7) : ....

(D8) : ....



24. Equations de droites : lecture graphique 2

1. En utilisant les informations données sur le dessin, déterminer une équation de chacune des droites ci-contre (*on donnera des valeurs exactes*).

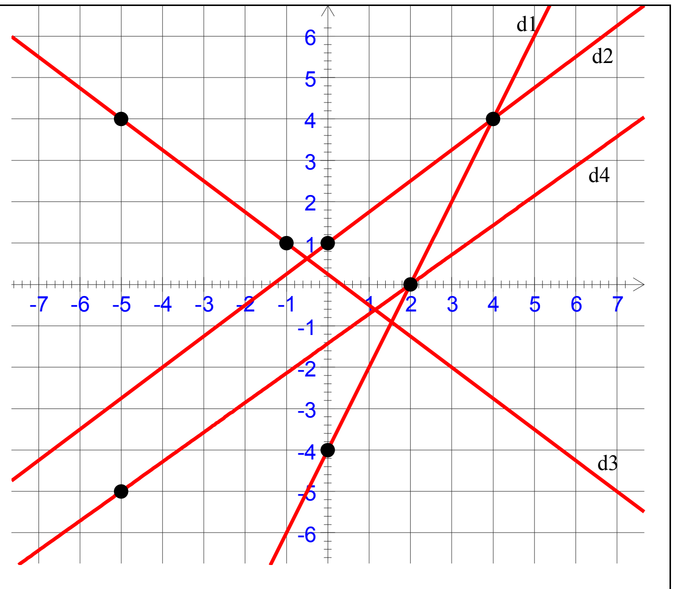
(d1) : ....

(d2) : ....

(d3) : ....

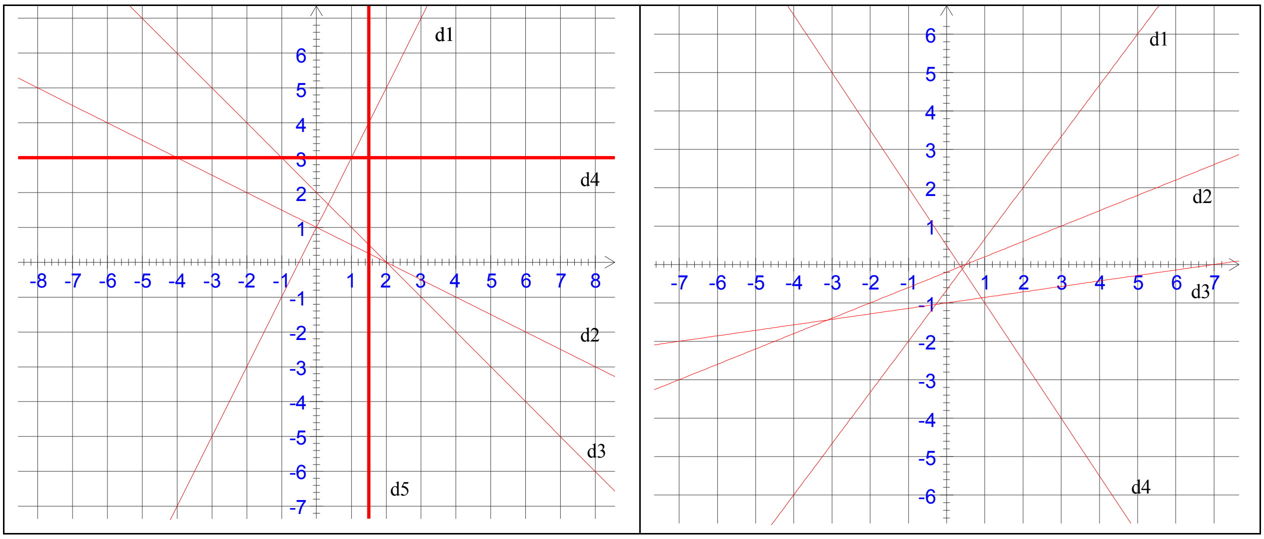
(d4) : ....

2. Les droites (d2) et (d4) sont elles parallèles ? Pourquoi ?

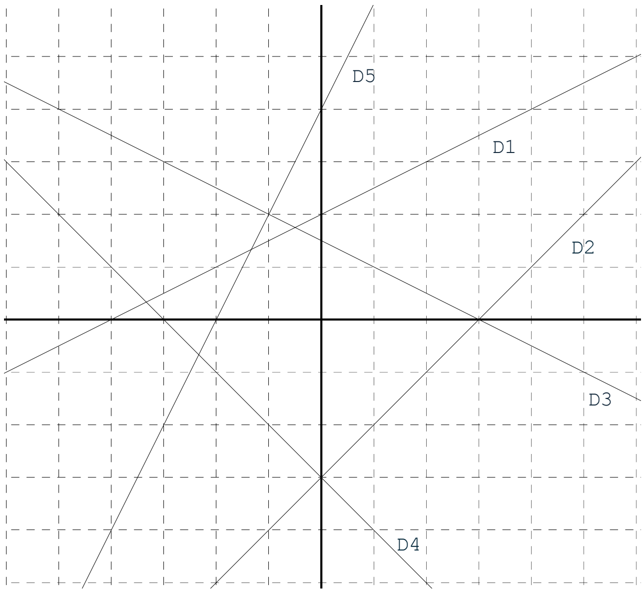


25. Equations de droites : lecture graphique 3

Déterminer graphiquement une équation de chacune des droites ci-dessous :



26. Equations de droites : lecture graphique 4



1. Voici 5 droites dans un repère (chaque carreau a pour côté 1).

a. Associer à chaque droite l'une des équations suivantes en justifiant votre choix :

$$x+2y-3=0\ ;\ -2x+y-4=0\ ;\ x+y+3=0\ ;\ x-y-3=0\ ;\ x-2y+4=0.$$

b. Donner l'équation de la droite parallèle à D_2 passant par le point de coordonnées $(-1\ ;\ -2)$.

27. Equations de droites 1

$OABC$ est un carré de côté 4 cm. Soit F le point tel que $\overrightarrow{CF}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CO}$ et E le milieu de $[BC]$. On rapporte le plan au repère orthonormal $\left(O\ ;\vec{i},\vec{j}\right)$ avec $\vec{i}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ et $\vec{j}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$.

1. Donner par lecture graphique les coordonnées des points A, B, C et calculer celles de E et F. Montrer que le triangle AEF est rectangle isocèle.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BF)

3. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur (h) issue de O dans le triangle OAF et calculer les coordonnées du point d'intersection I de (BF) et (h)

4. Soit G le point d'ordonnée négative tel que le triangle OFG soit rectangle et isocèle en F. Préciser les coordonnées de G et prouver que les points A, I et G sont alignés. Quelle propriété possèdent les droites (AG), (BF) et (h) ?

28. Equations de droites 2

Soient dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ les points de coordonnées $A(1\,;\,2)$, $B(4\,;\,2)$ et $C(6\,;\,0)$.

1. Faire une figure (unité 3 cm) et montrer que $OABC$ est un trapèze.

2. Déterminer les équations des diagonales de $OABC$ et les coordonnées de leur point d'intersection D.

3. Déterminer les coordonnées des milieux I et J de $[OC]$ et $[AB]$.

4. Déterminer les coordonnées du point d'intersection E de (OA) et (BC).

5. Montrer que D, E, I, et J sont alignés.

29. Equations de droites 4

1. Parmi ces droites, lesquelles sont parallèles, confondues ou sécantes ?

$(D_1) : 6x - 3y + 4 = 0$	$(D_2) : 2x - y + 7 = 0$	$(D_3) : y = 2x + \dfrac{4}{3}$	$(D_4) : -12x + 6y - 8 = 0$
$(D_5) : 5x + 2y + 10 = 0$	$(D_6) : x - 5y - 10 = 0$	$(D_7) : 3x - 2y + 5 = 0$	$(D_8) : 2x + 3y = 5$

2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D_7 et D_2.

30. Equations de droites 5

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé de centre O, on considère les points

$$A(3\,;\,1)\,;\,B(1\,;\,3)\,;\,C\left(2+\sqrt{3}\,;\,2+\sqrt{3}\right)$$

1. Faire une figure. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. On considère la symétrie de centre O. Soient A', B' et C' les symétriques de A, B, C dans cette symétrie. Trouver les coordonnées de A', B', C'.

3. Soit (D) la droite passant par A' et B'. Trouver une équation de (D).

4. Soit (D') la droite passant par C et C' ; trouver une équation de (D'). Montrer que (D) et (D') sont perpendiculaires.

5. Par quelle symétrie autre que celle du 2. peut on passer du triangle ABC au triangle $A'B'C'$?

31. Equations de droites 6

Dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ on donne les points $A(2\,;\,-4)$ et $B\,(3\,;\,-5)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB)

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) parallèle à (AB) et passant par le point $C(0\,;\,3)$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la médiane issue de A dans le triangle ABC.

32. Equations de droites 7

Tracer les droites d'équation :

$(\Delta_1) : y = 2x - 4$	$(\Delta_2) : y = -3x + 5$	$(\Delta_3) : y = \dfrac{3}{2}x - 4$	$(\Delta_4) : y = -\dfrac{2}{5}x + \dfrac{1}{5}$

$(\Delta_5) : x + 2y - 2 = 0$	$(\Delta_6) :\ 2x - \frac{1}{4}y + 1 = 0$	$(\Delta_7) :\ 5x + 2y - 3 = 0$	$(\Delta_8) :\ -3x + 2y - 7 = 0$

33. Equations de droites 8

Dans un repère orthonormé :

1. Tracer les droites (D_1) d'équation $2x + 5y = 7$ et (D_2) d'équation $3x - 4y = -5$.

2. Calculer par la méthode de votre choix les coordonnées du point A intersection de (D_1) et (D_2). Vérifier graphiquement votre résultat.

34. Equation hauteur et médiatrice 1

Placer les points $A(5\ ;\ -2)$, $B(-8\ ;\ 7)$ et $C(13\ ;\ 4)$ dans un repère orthonormal.

1. Dans le triangle ABC déterminer une équation de la hauteur issue de A et une équation de la médiane issue de B. On appellera J le pied de cette médiane.

2. Vérifier que le point $H(6\ ;\ 5)$ est le pied de la hauteur issue de A. Calculer la distance AH et la distance HC. Que peut-on en déduire pour la droite (HJ) ?

35. Equation hauteur et médiatrice 2

Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-4\ ;\ -1)$; $B(2\ ;\ 6)$; $C(4\ ;\ -5)$.

1. a. Déterminer une équation de la droite (AC)

b. Démontrer que la droite d'équation : $7x - 6y + 22 = 0$ passe par A et B.

2. a. Déterminer une équation de la droite (Δ) perpendiculaire à (AC) passant par B.

b. Vérifier que $(\Delta') :\ y = -\frac{6}{7}x - \frac{11}{7}$ est perpendiculaire à (AB) et passe par C *(utiliser Pythagore)*.

c. Déterminer les coordonnées de l'orthocentre du triangle ABC (*intersection des hauteurs du triangle*).

36. Equation d'une médiatrice.

On rappelle que la distance entre deux points U, de coordonnées x_U et y_U, et V de coordonnées x_V et y_V est

$$UV = \sqrt{(x_U - x_V)^2 + (y_U - y_V)^2}\ .$$

On fera une figure soignée que l'on complètera au fur et à mesure (unité : 3 cm).

1. Soient les points $A(2\ ;\ 1)$ et $B(-1\ ;\ 3)$. En écrivant que pour un point $M(x\ ;\ y)$ de la médiatrice de $[AB]$ on a $MA = MB$, montrez que l'équation de la médiatrice (d) de $[AB]$ est $6x - 4y + 5 = 0$.

2. Donnez l'équation de (AB) et vérifiez que (d) et (AB) sont sécantes en I, milieu de $[AB]$.

3. On prend le point $C(0\ ;\ -2)$. De la même manière que précédemment déterminez l'équation de la médiatrice (d') de $[AC]$. Vérifiez que (AC) et (d') sont sécantes en J, milieu de $[AC]$.

4. Déterminez les coordonnées du point d'intersection P de (d) et (d'). Déduisez-en le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

5. On considère la droite (h) parallèle à (d) et passant par C. Déterminez son équation, déduisez-en les coordonnées du pied H_C de la hauteur (h) issue de C.

6. De la même manière déterminez l'équation de la hauteur issue de B ainsi que les coordonnées du pied H_B de la hauteur issue de B. Déterminez les coordonnées de l'orthocentre H du triangle ABC.

7. Déterminez les coordonnées du centre de gravité G du triangle ABC (on cherchera les équations de deux médianes puis leur intersection) ; montrez que P, H et G sont alignés et que $PH = 3PG$.

37. Equations de droites et intersections

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O\ ;\vec{i}, \vec{j}\right)$ soient le point $A(-2\ ;\ 1)$ et le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On note d la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

1. Le point O appartient-il à d ? Le point $B(-1\ ;\ -1/2)$?

2. Donner une équation de d et la tracer. Quelles sont les coordonnées de ses points d'intersection avec les axes ?

3. C est le point tel que $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AO}$. Déterminer les coordonnées de C ainsi qu'une équation de la droite (BC). La tracer et déterminer son intersection avec d.

4. Soit d' la droite passant par $D(0\ ;\ 4)$ et parallèle à d. Donner une équation de d', la tracer et déterminer graphiquement puis par le calcul les coordonnées de son point d'intersection K avec (BC).

5. Soit δ la droite d'équation $x + 2y - 4 = 0$. Déterminer son vecteur directeur ainsi que deux de ses points. Tracer δ. Que peut on en dire ? Déterminer ses points d'intersection avec d et d'.

6. Montrer de trois manières différentes que la figure formée par d, d', δ et (BC) est un parallélogramme.

38. Parallélogramme 1

On considère un parallélogramme $ABCD$. Les points I et J sont les milieux respectifs de $[CD]$ et $[AB]$. Les droites (AI) et (CJ) coupent la droite (BD) en M et N.

1. Faire la figure (il est conseillé de mettre A en bas à gauche).

2. On choisit le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, I et J.

3. Donner les équations des droites (AI), (CJ) et (BD) puis les coordonnées de M et N. Montrer que $(MINJ)$ est un parallélogramme.

39. Parallélogramme 2

Soient les points $A(3\,;1)$, $B(-2\,;-2)$ et $C\left(5\,;\dfrac{1}{2}\right)$. Soit D le quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.

1. Déterminer les coordonnées de D.

2. $ABCD$ est il un rectangle ?

3. Vérifier l'égalité $2\left(AB^2 + BC^2\right) = AC^2 + BD^2$.

40. Parallélogramme 3

On se donne les points $A(-2\ ;\ 7)$, $B(10\ ;\ -1)$, $C(0\ ;\ -4)$ et $D(-6\ ;\ 0)$.

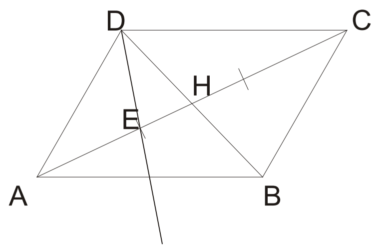
1. Les points I, J, K, L sont les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

2. Déterminer la nature des quadrilatères $ABCD$ et $IJKL$.

3. La droite (IK) passe-t-elle par l'origine du repère ?

41. Parallélogramme 4

$ABCD$ est un parallélogramme.



1. Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, donner les coordonnées de A, B, C et D.

2. Ecrire (*sans justifier*) une équation de chacune des droites (AC), (BD), (BC) et (DC).

3. Trouver les coordonnées du point E tel que : $\vec{AE} = \dfrac{1}{3}\vec{AC}$

4. Déterminer une équation de la droite (DE) et montrer qu'elle passe par le milieu de $[AB]$.

42. Carré

ABCD est un carré. *DIC* et *BCJ* sont des triangles équilatéraux. On veut démontrer que *A*, *I* et *J* sont alignés.

1. Avec un repère : choisissons le repère orthonormé $(D\,;\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA})$.

a. Quelles sont les coordonnées des points *D*, *C*, *A* et *B* ?

b. Calculer les coordonnées des points *I* et *J*.

c. Donner une équation de la droite (*AI*).

d. Démontrer que *J* appartient à la droite (*AI*).

2. Calculer les angles $\widehat{BAI}$ et $\widehat{BAJ}$ et conclure.

3. Avec les rotations.

a. Construire le triangle équilatéral *ACK*, où *K* est dans le demi plan contenant *D*.

b. Démontrer que les points *B*, *D* et *K* sont alignés.

c. En utilisant la rotation de centre *C* et d'angle 60°, déterminer l'image des points *B*, *D* et *K*.

d. Conclure.

43. Distances - 1

Soit un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ tel que l'unité soit le centimètre.

1. Soient, dans ce repère, les points $A\left(\frac{7}{2}\,;6\right)$, $B\left(\frac{9}{2}\,;3\right)$ et $C\left(\frac{5}{2}\,;4\right)$. Faire une figure.

2. Quelle est la nature du triangle *ABC* ?

3. Calculer son aire en centimètres carrés.

4. Déterminer les coordonnées du milieu *I* du segment [*AB*].

5. Déterminer une équation cartésienne de la droite (*CI*).

6. Soit le point *D* symétrique de *C* par rapport à *I*. Quelle est la nature du quadrilatère *ACBD* ? Justifier.

44. Distances - 2

Soit un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ tel que l'unité soit le centimètre.

1. Soient, dans ce repère, les points $A(2\,;-1)$, $B\left(-1\,;-\frac{1}{2}\right)$, $C\left(-\frac{3}{2}\,;\frac{5}{2}\right)$ et $D\left(\frac{3}{2}\,;2\right)$. Faire une figure.

2. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$. Que peut-on en déduire pour le quadrilatère *ABCD* ?

3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont-ils orthogonaux ? Justifier.

4. Calculer les longueurs *AB* et *AD*. En déduire la nature du quadrilatère *ABCD*.

5. Déterminer les coordonnées du milieu *I* de [*AC*].

45. Distances 3

Soit $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé. Soient les points $A\left(\frac{-1}{2}\,;-2\right)$, $B\left(\frac{7}{2}\,;\frac{-7}{2}\right)$ et $C(1\,;2)$.

1. Quelles sont les particularités du triangle *ABC* ?

2. Trouver les coordonnées du point *D* tel que *ABDC* est un carré.

46. Equations de droites et intersections / Rectangle d'or.

Dans un rectangle $ABCD$, on note I et K les milieux des côtés $[AB]$ et $[CD]$. On note L sa longueur (par exemple AB) et on note l sa largeur. On va chercher le rapport $\frac{L}{l}$ pour que les droites (DB) et (AK) soient orthogonales.

1. Prendre une feuille de brouillon que vous joindrez à la copie et qui sera le rectangle $ABCD$. Placer les points, tracer les droites. Est ce que les droites sont orthogonales (à l'œil) ? Relever à la règle les longueurs des côtés et calculer leur rapport $\frac{L}{l}$.

2. On prend un repère $\left(A\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ tel que $\vec{i}$ ait pour direction (AB) et pour longueur 1 et $\vec{j}$ la direction (AD) et pour longueur 1. Déterminez en fonction de l et L les coordonnées de A, B, C, D, I et K, puis des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{BD}$.

3. Vérifiez que (AK) est perpendiculaire à (BD) si et seulement si $\frac{L}{l}=\sqrt{2}$

4.On suppose que le rectangle $ABCD$ est tel que $\frac{L}{l}=\sqrt{2}$. Exprimez en fonction de l la longueur et la largeur du rectangle $AIKD$. On note L_1 et l_1 sa longueur et sa largeur. Que peut on dire de $\frac{L_1}{l_1}$?

5. Calculer le cosinus et le sinus des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{BAK}$, $\widehat{AKB}$. Donner une valeur approchée de ces angles en radian et en degré.

47. Equations de droites orthogonalité.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité 2 cm) on considère la droite (d) d'équation $x-2y+3=0$ ainsi que les points $A\left(2\,;\frac{5}{2}\right)$, $B(-3\,;1)$, $C\left(6\,;\frac{9}{2}\right)$ et E(–1 ; –1).

1. Soit F le point tel que $\overrightarrow{OF}=3\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}$. Démontrer que le triangle ACF est rectangle en F.

2. On considère le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (2 ; 0). Déterminer les coordonnées du point G tel que $\overrightarrow{FG}=\vec{u}$

3. On appelle H le milieu du segment $[AC]$. Calculer ses coordonnées. Montrer que (d) et (GH) sont perpendiculaires.

4. Soit K le point tel que $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{GH}$. Quelle est la nature du quadrilatère $AKGC$?

5. Démontrer que les points A, C, F, G et K appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

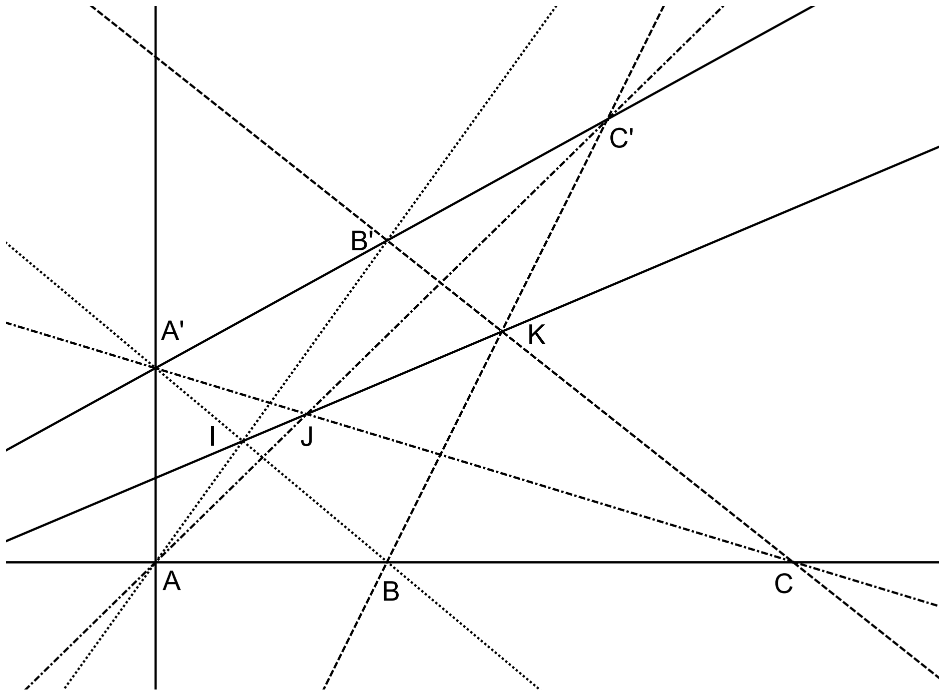
48. Equations de droites

Dans un repère orthonormé on se donne les points $A(-2\,;-3)$, $B(5\,;-1)$, $C(-4\,;4)$.

On fera la figure et on vérifiera par avance toutes les affirmations du texte et de vos calculs (coordonnées des points, distances, etc.)

1. Trouver les coordonnées du point D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.
2. Vérifier que $ABDC$ est un carré. On précisera la longueur de son côté.
3. Trouver les coordonnées de E le milieu de $[AB]$ et de F le milieu de $[DB]$.
4. Ecrire les équations des droites (AF) et (CE) ; trouver les coordonnées de leur point d'intersection H.
5. Montrer que (AF) et (CE) sont perpendiculaires. Quelle est l'aire du quadrilatère $BFHE$?

49. Equations de droites : Th. de Pappus



On se donne les points $A(0\ ;\ 0)$, $B(1\ ;\ 0)$, $C(3\ ;\ 0)$ et $A'(0\ ;\ 1)$, $B'(1\ ;\ 2)$, $C'(2\ ;\ 3)$.

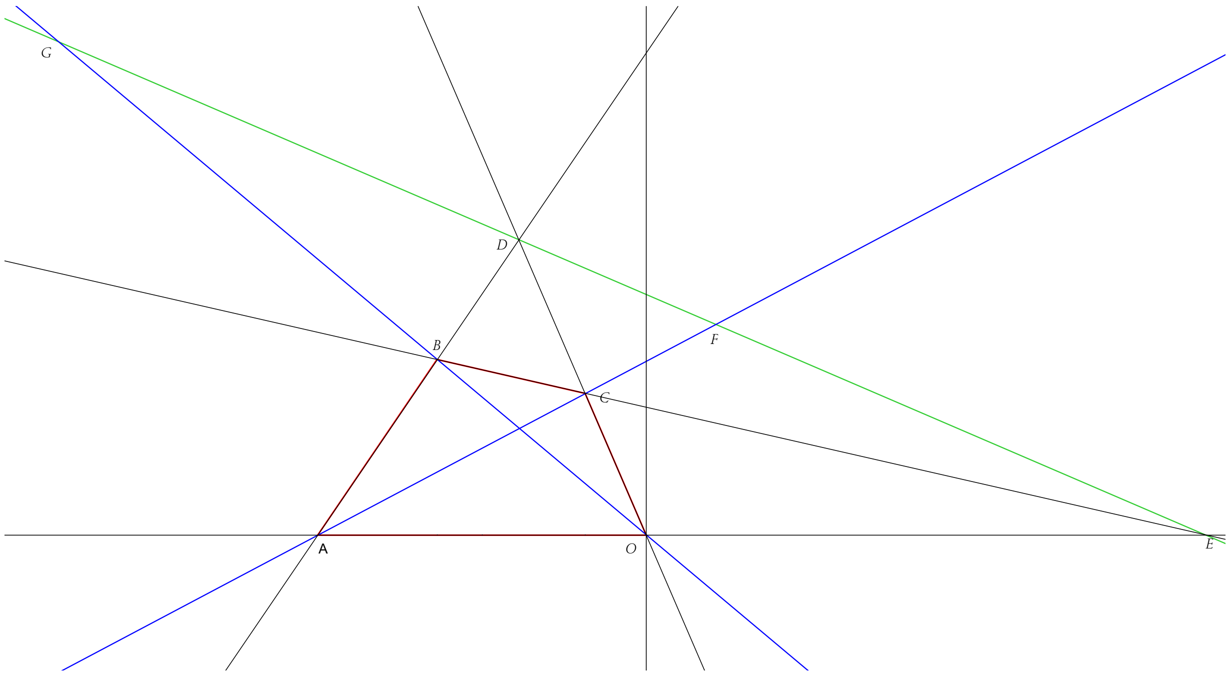
On note I le point d'intersection de (AB') et $(A'B)$, J celui de (AC') et $(A'C)$, K celui de (BC') et $(B'C)$.

Montrer que I, J, K sont alignés.

50. Equations de droites : Quadrilatère complet

On se donne les points $A(-6\ ;\ 0)$, $B(-4\ ;\ 4)$, $C(-1\ ;\ 3)$.

1. Calculez les équations des droites (AB), (AC), (OB), (OC), (BC).
2. En déduire les coordonnées de D, intersection de (AB) et (OC) et de E, intersection de (AO) et (BC).
3. Vérifiez que l'équation de (ED) est $9x+13y-72=0$.
4. Déterminez alors les coordonnées de F, intersection de (AC) et (ED) puis de G, intersection de (OB) et (ED).
5. Montrez que $\frac{EF}{EG}.\frac{DG}{DF}=1$.


G
D
B
F
C
A
O
E