

## Géométrie dans l'espace

- |                                    |                     |
|------------------------------------|---------------------|
| 1. Cours : géométrie dans l'espace | 7. Tétraèdre 1 (c)  |
| 2. Cube 1 (c)                      | 8. Tétraèdre 2      |
| 3. Cube 2                          | 9. Tétraèdre 3 (c)  |
| 4. Cube 3                          | 10. Tétraèdre 4 (c) |
| 5. Pyramide (c)                    | 11. Constructions   |
| 6. Les Solides de Platon           |                     |

### 1. Cours : géométrie dans l'espace

#### 1. Plan

Par 3 points  $A$ ,  $B$  et  $C$ , non alignés, il ne passe qu'un seul plan noté  $(ABC)$ .

Deux droites sécantes définissent un plan.

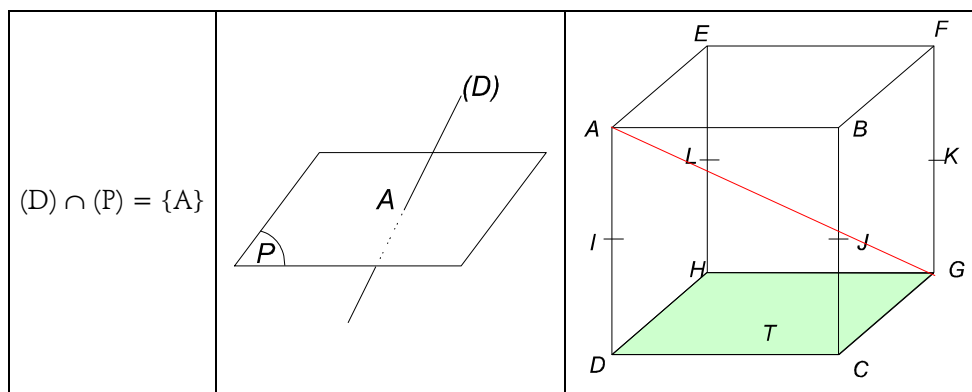
Deux droites parallèles définissent un plan.

Deux droites contenues dans un même plan sont *coplanaires*.

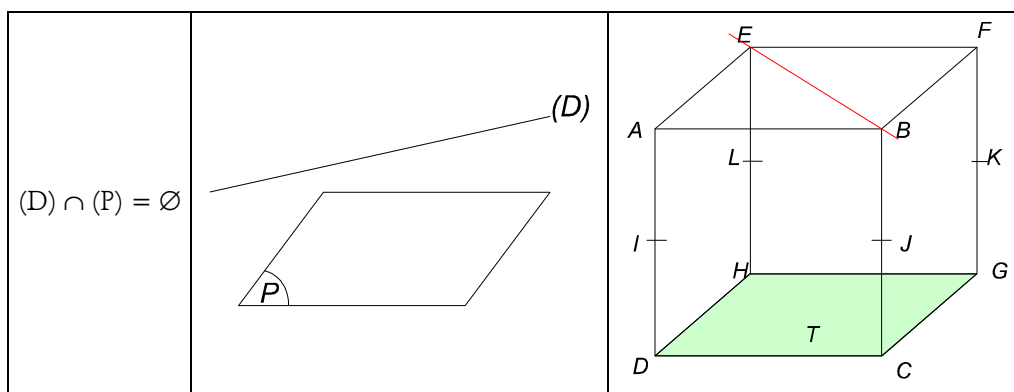
Une droite passant par deux points d'un plan est contenue dans ce plan.

#### 2. Position relative d'une droite et d'un plan.

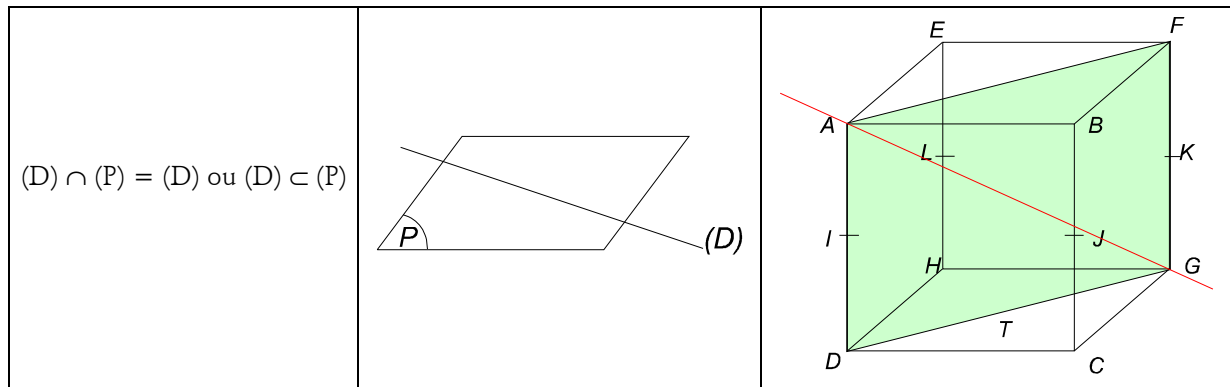
Une droite peut être sécante à un plan lorsqu'elle n'a qu'un seul point commun avec ce plan.



Une droite peut être parallèle à un plan, si elle n'a aucun point commun avec ce plan.

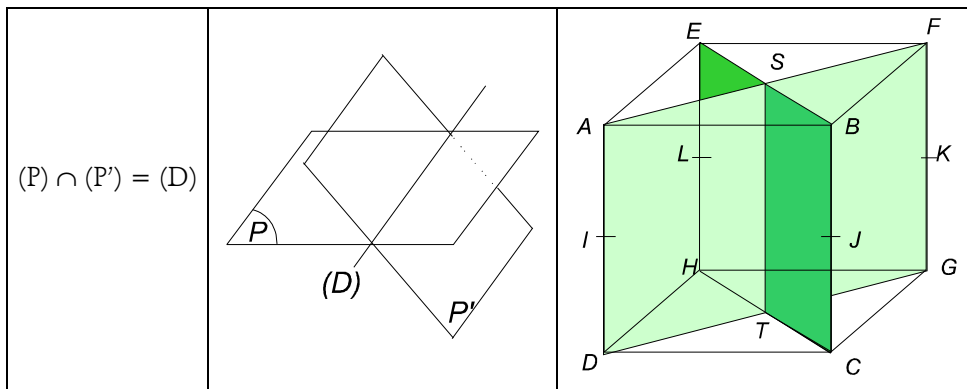


Une droite peut être contenue dans un plan. On dit qu'elle est incluse dans ce plan.

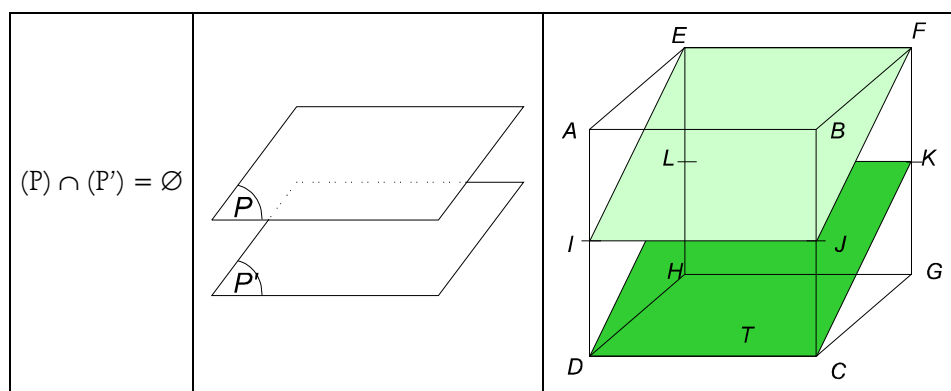


### 3. Position relative de deux plans.

Deux plans peuvent être sécants lorsque leur intersection est une droite.



Deux plans peuvent être parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun.



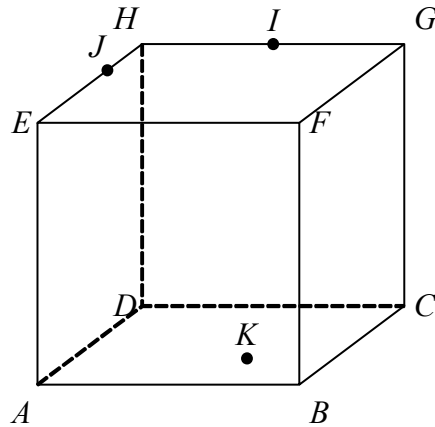
Deux plans peuvent être confondus :  $(P) \cap (P') = (P) = (P')$ .

### 2. Cube 1 (c)

$ABCDEFGH$  est un cube.  $I$  et  $J$  sont deux points des arêtes  $[GH]$  et  $[EH]$ , et  $K$  est dans le plan  $(BCD)$ .

1. Construire l'intersection des plans  $(ABC)$  et  $(IJK)$ . Justifier la construction.

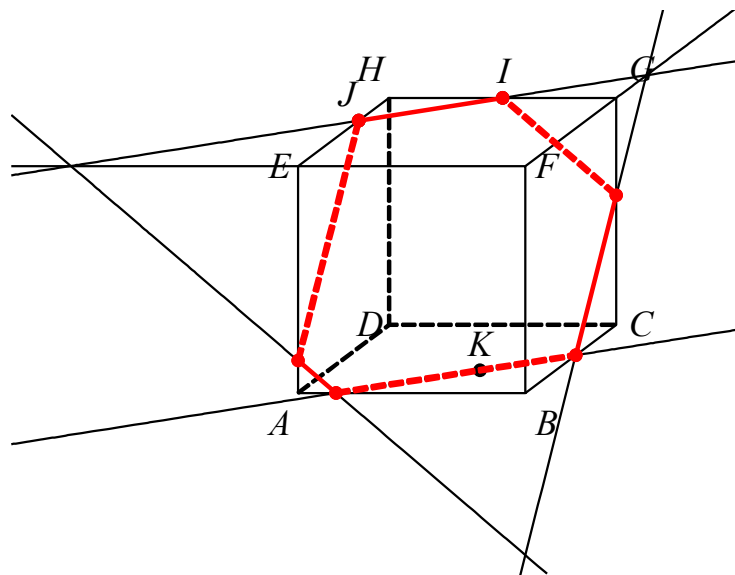
2. Tracer la section du cube par le plan  $(IJK)$ .



**Correction**

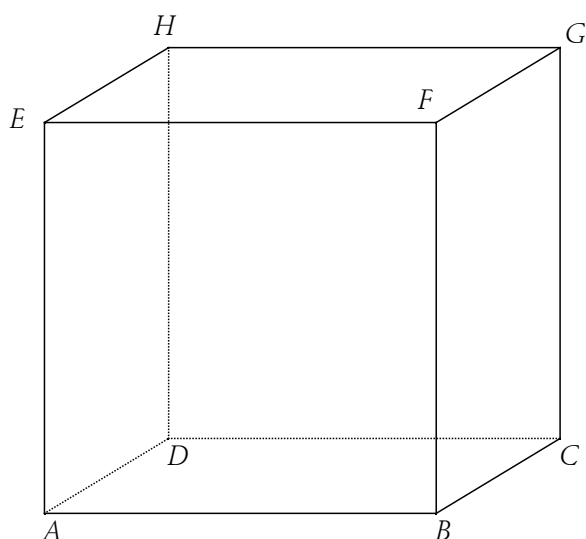
1. Les points  $I$  et  $J$  appartiennent aux plans  $(EFG)$  et  $(IJK)$ , donc la droite  $(IJ)$  est l'intersection des plans  $(EFG)$  et  $(IJK)$ . De plus, comme  $ABCDEFGH$  est un cube, les plans  $(ABC)$  et  $(EFG)$ , donc le plan  $(IJK)$  coupe ces deux plans, et les droites d'intersection sont parallèles. La droite d'intersection des plans  $(IJK)$  et  $(ABC)$  est donc la parallèle à  $(IJ)$  passant par  $K$ .

2. Voir figure.



### 3. Cube 2

---



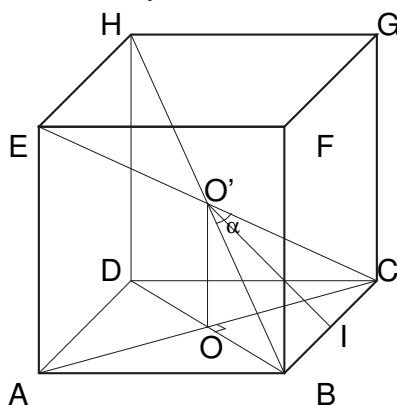
On considère un cube  $ABCDEFGH$ .

- Citer toutes les arêtes
  - qui sont parallèles à  $(AB)$ ,
  - qui coupent  $(AB)$ ,
  - ne sont pas coplanaires avec  $(AB)$ .
- Citer toutes les faces du cube qui
  - sont parallèles à  $(AB)$ ,
  - coupent  $(AB)$ .
- Citer toutes les faces du cube qui
  - sont parallèles à  $(ABCD)$
  - coupent  $(ABCD)$ .
- Soit  $I$  le milieu de  $[EF]$  et  $J$  celui de  $[FG]$ . Les droites  $(DF)$  et  $(IJ)$  sont-elles coplanaires ?
- Représenter la droite d'intersection des plans  $(ACH)$  et  $(BDF)$ .
- Soient  $P$  et  $Q$  les centres des carrés  $EFGH$  et  $ABFE$ .
  - Montrer que la droite  $(PQ)$  est parallèle au plan  $(ADHE)$ .
  - Montrer que les plans  $(PQE)$  et  $(ADHE)$  sont sécants suivant une droite  $\Delta$  parallèle à  $(IJ)$ .
  - Représenter  $\Delta$  dans le plan  $(ADHE)$  en précisant son intersection  $M$  avec  $(AD)$  puis représenter cette droite dans l'espace.
- Le côté du cube mesure 4 cm. On considère les points  $U$  tel que  $\overline{BU} = \frac{1}{4}\overline{BA}$  et  $V$  tel que  $\overline{BV} = \frac{1}{4}\overline{BC}$  ainsi que les points  $W$  tel que  $\overline{EW} = \frac{1}{4}\overline{EF}$  et  $Z$  tel que  $\overline{GZ} = \frac{1}{4}\overline{GF}$ .
  - Montrer que les droites  $(UV)$  et  $(AC)$  sont parallèles.
  - Montrer que les droites  $(WZ)$  et  $(EG)$  sont parallèles.
  - Déduire des questions précédentes que les droites  $(UV)$  et  $(WZ)$  sont parallèles.
- Soit  $K$  le milieu de  $[BF]$ , montrer que le plan  $(IJK)$  est parallèle au plan  $(BEG)$ .

#### 4. Cube 3

Soit  $ABCDEFGH$  un cube d'arêtes de longueur  $a$  et  $O$  le centre du carré  $ABCD$ . Soit  $I$  le milieu du segment  $[AB]$ .

1. a. Démontrer que la droite  $(EH)$  est orthogonale au plan  $(ABF)$ .
- b. Montrer que  $EBCH$  est un rectangle. Ses diagonales se coupent en  $O'$ .
2. On appelle  $\alpha$  la mesure de l'angle  $\widehat{BO'C}$ .
  - a. Démontrer que les droites  $(O'I)$  et  $(EB)$  sont parallèles.
  - b. En déduire que  $\widehat{CEB} = \frac{\alpha}{2}$ .
  - c. Déterminer une valeur approchée de  $\alpha$  à  $10^{-1}$  près.



#### Correction

1. a. Comme  $ABCDEFGH$  est un cube, la droite  $(EH)$  est perpendiculaire aux droites  $(EF)$  et  $(EA)$ , sécantes dans le plan  $(ABF)$ . Donc  $(EH)$  est orthogonale au plan  $(ABF)$ .

b.  $BCGF$  et  $FGEH$  étant des carrés, on a  $\overline{BC} = \overline{FG}$  et  $\overline{FG} = \overline{EH}$ . On obtient donc  $\overline{BC} = \overline{EH}$ , ce qui prouve que  $EBCH$  est un parallélogramme.

De plus, comme  $(EH)$  est orthogonale au plan  $(ABF)$ , alors  $(EH)$  est en particulier perpendiculaire à  $(EB)$ .

Le parallélogramme  $EFGH$  a donc un angle droit, ce qui prouve que c'est un rectangle.

2. On appelle  $\alpha$  la mesure de l'angle  $\widehat{BO'C}$ .

a.  $O'$  est le milieu de  $[CE]$  (car centre du rectangle  $EBCH$ ) et  $I$  est le milieu de  $[BC]$ . En appliquant le théorème des milieux au triangle  $BCE$ , on obtient bien que les droites  $(IO')$  et  $(BE)$  sont parallèles.

b. Les droites  $(O'I)$  et  $(BE)$  sont parallèles.

Les angles correspondants  $\widehat{CEB}$  et  $\widehat{CO'I}$  sont donc égaux.

De plus,  $BH = CE$  (diagonales du rectangle  $EBCH$ ), donc  $BO' = O'C$  et  $BO'C$  est isocèle en  $O'$ .  $I$  étant le milieu de  $[BC]$ ,  $(O'I)$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{BO'C}$ , et  $\widehat{CO'I} = \frac{\alpha}{2}$ , et  $\widehat{CEB} = \frac{\alpha}{2}$  ( $= \widehat{CO'I}$ ).

c. Dans le triangle  $EBC$  rectangle en  $B$ ,  $\tan \frac{\alpha}{2} = \tan \widehat{CEB} = \frac{BC}{BE} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$ . On obtient

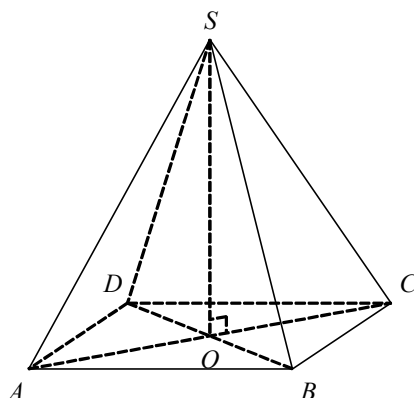
donc  $\frac{\alpha}{2} \approx 35,26^\circ$  et  $\alpha \approx 70,5^\circ$ .

$SABCD$  est une pyramide régulière à base carrée dont toutes les arêtes mesurent  $a$ .

$O$  est le centre de  $ABCD$  et  $[SO]$  est la hauteur de la pyramide.

### 5. Pyramide (c)

$SABCD$  est une pyramide régulière à base carrée dont toutes les arêtes mesurent  $a$ .  $O$  est le centre de  $ABCD$  et  $[SO]$  est la hauteur de la pyramide



1. Exprimer  $AC$  et  $AO$  en fonction de  $a$ .
2. Montrer que  $SO = a \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
3. Déterminer, en fonction de  $a$ , le volume de  $SABCD$ .
4. Calculer ce volume lorsque  $a = \sqrt{2}$  cm.

*NB : on conservera les valeurs exactes.*

#### **Correction**

1.  $AC = a\sqrt{2}$  (diagonale d'un carré de côté  $a$ ) et  $AO = a \frac{\sqrt{2}}{2}$  (car  $O$  est le centre du carré  $ABCD$ ).

2. Dans le triangle  $SAO$ , d'après le théorème de Pythagore :  $SO^2 + OA^2 = SA^2$ ,  $SO^2 + (a \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = a^2$ ,

$$SO^2 + \frac{2a^2}{4} = a^2, SO^2 = a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}, SO = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = a \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3.  $\text{Volume}(SABCD) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABCD) \times SO = \frac{1}{3} \times a^2 \times a \frac{\sqrt{2}}{2} = a^3 \frac{\sqrt{2}}{6}$ .

4. Lorsque  $a = \sqrt{2}$  cm,  $\text{Volume}(SABCD) = \frac{\sqrt{2}^3 \times \sqrt{2}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  cm<sup>3</sup>.

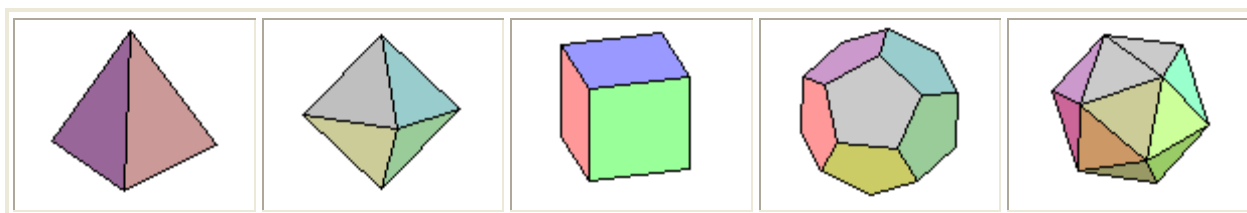
### 6. Les Solides de Platon

Un polyèdre  $P$  est dit *convexe* si ses faces sont elles mêmes des polygones réguliers *convexes*, si ses faces sont égales et si de tout sommet sont issus le même nombre de côtés.

Pour la suite, nous désignerons par  $F$  le nombre de faces,  $S$  le nombre de sommets et  $A$  le nombre d'arêtes.

Un résultat étonnant est qu'il n'existe que 5 polyèdres convexes réguliers. Ce sont les cinq polyèdres (ou solides) de Platon :

le **Tétraèdre**, l'**Octaèdre**, le **Cube**, le **Dodécaèdre** et l'**Icosaèdre**.



Tétraèdre	Octaèdre	Cube	Dodécaèdre	Icosaèdre
-----------	----------	------	------------	-----------

Le tableau suivant résume les différentes caractéristiques de chacun des polyèdres de Platon:

POLYEDRE	Type des Faces	Nombre de faces $F$	Nombre de sommets $S$	Nombre d'arêtes $A$	Nombre d'arêtes par sommet $m$	Nombre de côtés d'une face $n$	Symbole de Schläfli $(m ; n)$
Tétraèdre	Triangles équilatéraux						
Octaèdre	Triangles équilatéraux						
Cube	Carrés						
Dodécaèdre	Pentagones						
Icosaèdre	Triangles équilatéraux						

1. Conjecturer une relation entre  $F$ ,  $S$  et  $A$  (on admettra ce résultat appelé *Formule d'Euler*)
2. On admettra également que dans un polyèdre convexe et régulier :
  - à chaque sommet aboutit le même nombre d'arête ;
  - chaque arête est terminée par deux sommets ;
  - chaque arête est commune à deux faces ;
  - chaque face est « bordée » par le même nombre d'arêtes.

En utilisant ces assertions, exprimer  $A$  en fonction de  $m$  et  $S$ , puis en fonction de  $n$  et  $F$ .

**Il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes : ce sont les cinq solides de Platon.**

$$(i) S + F - A = 2 \text{ (Formule d'Euler)}$$

$$(ii) 2A = mS = nF$$

1. Démontrer que quels que soient les nombres  $a, b, c$  et  $d$  (non nuls) tels que  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  on a :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \text{ puis } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

2. Démontrer que  $2a + 2b - ab > 0$  est équivalent à  $(a-2)(b-2) < 4$ .
3. Compléter :  $nF = mS = 2A$  équivaut à :

$$\frac{F}{\boxed{\phantom{000}}} = \frac{S}{\boxed{\phantom{000}}} = \frac{A}{\boxed{\phantom{000}}}$$

donc

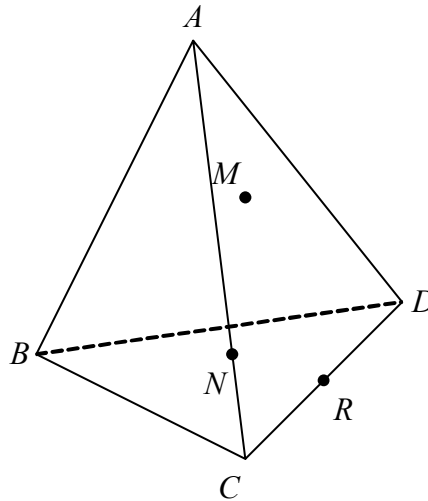
$$\frac{F}{\square} = \frac{S}{\square} = \frac{A}{\square} = \frac{F+S-A}{\square} = \frac{\square}{\square}$$

4. Démontrer que :  $A = \frac{2mn}{2m+2n-mn}$  ;  $S = \frac{4n}{2m+2n-mn}$  et  $F = \frac{4m}{2m+2n-mn}$ .

- Quel est le signe du dénominateur ?
- Quelles sont les valeurs possibles de  $m$  et  $n$  ?
- A chaque valeur de  $m$ , associer une valeur de  $n$ .
- Conclure.

### 7. Tétrèdre 1 (c)

$ABCD$  est un tétrèdre.  $M$  est un point de la face  $ABD$ ,  $N$  un point de  $[AC]$  et  $R$  un point de  $[CD]$ .  
Construire la section du tétrèdre  $ABCD$  par le plan  $(MNR)$ .



### Correction

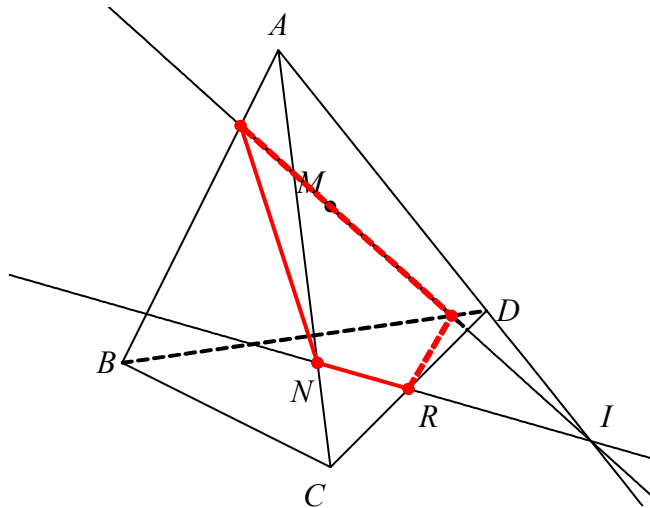
Il est évident que la droite  $(NR)$  est l'intersection des plans  $(MNR)$  et  $(ACD)$ .

$M$  est un point de la face  $ABD$ , et les droites  $(NR)$  (de  $(ACD)$ ) et  $(AD)$  (de  $(ABD)$ ) se coupent en  $I$  (car sécantes dans le plan  $(ACD)$ ).

La droite  $(MI)$  est donc l'intersection des plans  $(MNR)$  et  $(ABD)$ .

$(MI)$  coupe les arêtes  $[BD]$  et  $[AB]$ , ce qui permet d'obtenir la section du tétrèdre  $ABCD$  par le plan  $(MNR)$ .



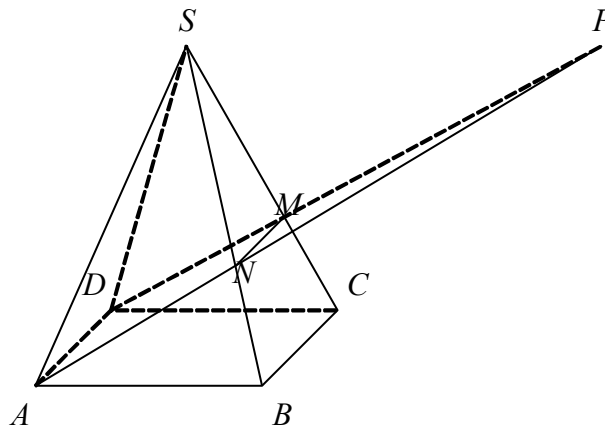


### 8. Tétraèdre 2

$SABCD$  est une pyramide de sommet  $S$  et dont la base  $ABCD$  est un parallélogramme.

$M$  est un point de l'arête  $[SC]$ ,  $N$  est un point de l'arête  $[SB]$ , et  $(MN)$  est parallèle à  $(BC)$ .

1. Montrer que  $(AD)$  et  $(MN)$  sont parallèles.
2. Dans le plan  $(ADM)$ , les droites  $(AN)$  et  $(DM)$  se coupent en  $P$ .
  - a. Démontrer que  $P$  appartient à chacun des plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$ .
  - b. Pourquoi la droite d'intersection des plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$  est-elle la droite  $(SP)$  ?
  3. En déduire que  $(SP)$  est parallèle à  $(AB)$  et à  $(CD)$ .



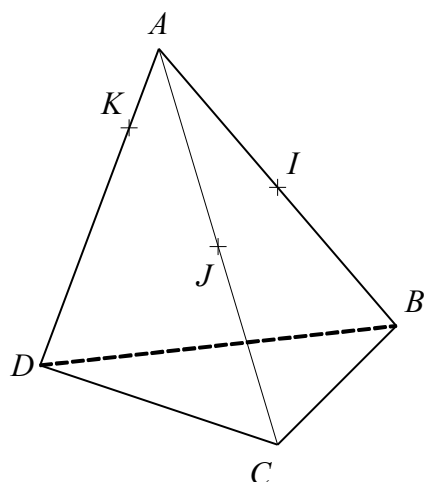
### Correction

1.  $(AD)$  et  $(MN)$  sont parallèles à la droite  $(BC)$ , donc elles sont parallèles.
2. Dans le plan  $(ADM)$ , les droites  $(AN)$  et  $(DM)$  se coupent en  $P$ .
  - a. La droite  $(AN)$  appartient au plan  $(SAB)$ , donc  $P$  aussi (car  $P \in (AN)$ ).  
La droite  $(DM)$  appartient au plan  $(SDC)$ , donc  $P$  aussi (car  $P \in (DM)$ ).
  - b.  $S$  et  $P$  appartiennent aux plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$ , donc la droite d'intersection des plans  $(SAB)$  et  $(SDC)$  est la droite  $(SP)$
  - c.  $(AB)$  (du plan  $(SAB)$ ) et  $(CD)$  (du plan  $(SDC)$ ) sont parallèles donc, d'après le théorème du toit, elles sont parallèles également à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la droite  $(SP)$ .

### 9. Tétraèdre 3 (c)

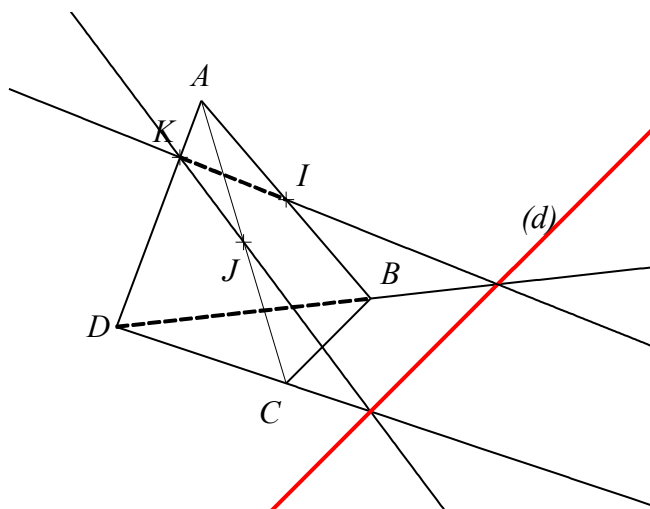
$ABCD$  est un tétraèdre.  $I$  est le milieu de  $[AB]$ ,  $J$  est le milieu de  $[AC]$  et  $K$  est le point de  $[AD]$  tel que  $AK = \frac{1}{4}AD$ .

1. Démontrer que  $(IJ)$  est parallèle  $(BC)$ .
2. Tracer l'intersection  $(d)$  des plans  $(IJK)$  et  $(BDC)$ .
3. Démontrer que  $(d)$  est parallèle aux droites  $(IJ)$  et  $(BC)$ .



### Correction

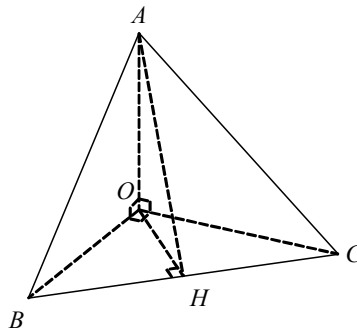
1. Dans le triangle  $ABC$ ,  $I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $J$  est le milieu de  $[AC]$  donc, d'après le théorème des milieux,  $(IJ)$  est parallèle  $(BC)$ .
2. Voir figure ci-contre.



3. Les plans  $(DCB)$  et  $(IJK)$  sont sécants suivant  $(d)$ . De plus, les droites  $(IJ)$  (de  $(IJK)$ ) et  $(BC)$  (de  $(DBC)$ ) sont parallèles.  
Donc, d'après le théorème du toit,  $(d)$  est parallèle aux droites  $(IJ)$  et  $(BC)$ .

### 10. Tétraèdre 4 (c)

$OABC$  est un tétraèdre dont les faces  $OAB$ ,  $OAC$  et  $OBC$  sont des triangles rectangles isocèles en  $O$ , et  $ABC$  est un triangle équilatéral. On pose  $OA = OB = OC = a$  (on a donc  $AB = AC = BC = a\sqrt{2}$ ).



1. Démontrer que la droite  $(OA)$  est orthogonale au plan  $(OBC)$ .
2. Calculer en fonction de  $a$  le volume du tétraèdre  $OABC$ .
3.  $H$  est le pied de la hauteur issue de  $O$  dans  $OBC$  ( $H$  est donc le milieu de  $[BC]$ ).

Exprimer  $OH$  en fonction de  $a$ , puis montrer que  $AH = a \frac{\sqrt{6}}{2}$ .

4. Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .
5. Dédurre des questions 2. et 4. la longueur de la hauteur issue de  $O$  du tétraèdre  $OABC$ .

### **Correction**

1.  $(OA)$  est perpendiculaire aux droites  $(OB)$  et  $(OC)$  (sécantes dans le plan  $(OBC)$ ), donc  $(OA)$  est orthogonale au plan  $(OBC)$ .

$$2. \text{Volume}(OABC) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(OBC) \times AO = \frac{1}{3} \times \frac{a \times a}{2} \times a = \frac{a^3}{6}.$$

3.  $H$  étant le milieu de  $[BC]$ ,  $[OH]$  est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle  $OBC$  rectangle en  $O$ , donc  $OH = \frac{1}{2}BC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

$(OA)$  est orthogonale au plan  $(OBC)$  donc  $AOH$  est rectangle en  $O$ .

$$\text{D'après le théorème de Pythagore : } AH^2 = AO^2 + OH^2, AH^2 = a^2 + \frac{2a^2}{4} = \frac{6}{4}a^2, AH = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = a \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

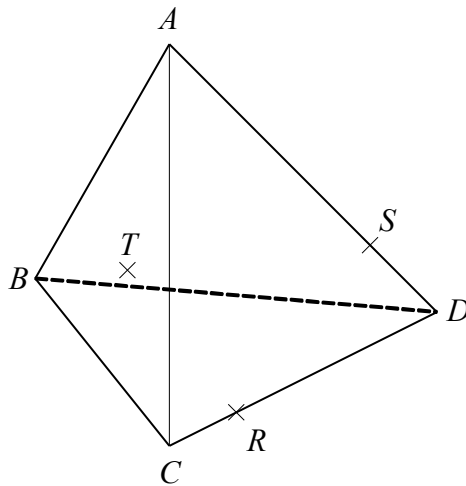
$$4. \text{Aire}(ABC) = \frac{BC \times AH}{2} = \frac{a\sqrt{2} \times a \frac{\sqrt{6}}{2}}{2} = a^2 \frac{\sqrt{12}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{4 \times 3}}{4} = a^2 \frac{2\sqrt{3}}{4} = a^2 \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

5. Soit  $h$  la longueur de la hauteur issue de  $O$  du tétraèdre  $OABC$ .

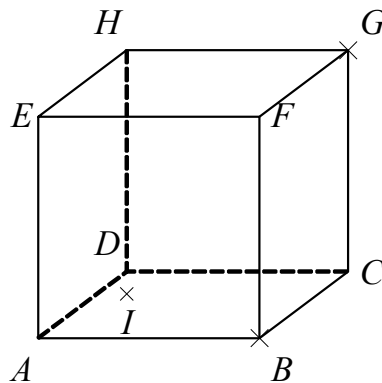
$$\text{Volume}(OABC) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABC) \times h, \text{ soit } \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} a^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \times h = a^2 \frac{\sqrt{3}}{6} \times h \text{ donc } h = \frac{a^3}{a^2 \sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} = a \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

### **11. Constructions**

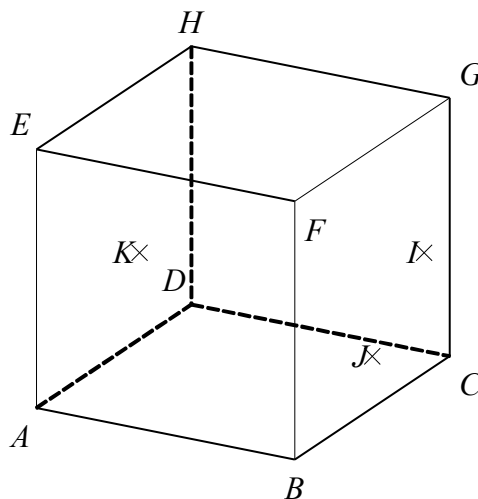
1.  $ABCD$  est un tétraèdre,  $T \in (ABC)$ ,  $S \in [AD]$  et  $R \in [CD]$ . Construire la section du tétraèdre  $ABCD$  par le plan  $(RST)$ .



2.  $ABCDEFGH$  est un cube, et  $I$  est dans la face  $ABFE$ . Construire la section du cube par le plan  $(IBG)$ .

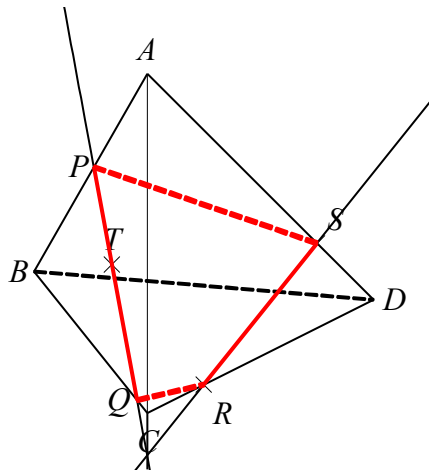


3.  $ABCDEFGH$  est un cube,  $I$  et  $J$  sont dans la face  $BCGF$ , et  $K$  est dans la face  $ABFE$ . Construire la section du cube par le plan  $(IJK)$ .

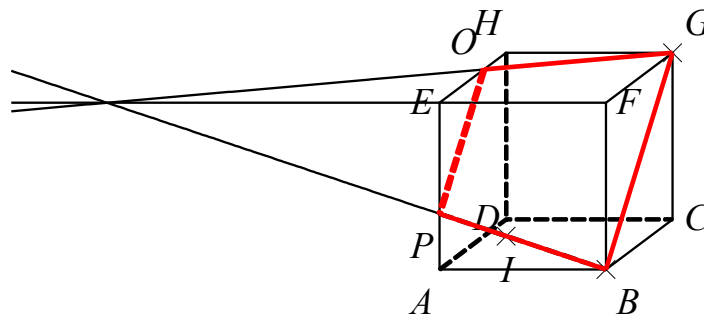


**Correction**

1.  $ABCD$  est un tétraèdre,  $T \in (ABC)$ ,  $S \in [AD]$  et  $R \in [CD]$ . Construire la section du tétraèdre  $ABCD$  par le plan  $(RST)$ .  $PQRS$  est la section cherchée.



2.  $ABCDEFGH$  est un cube, et  $I$  est dans la face  $ABFE$ . Construire la section du cube par le plan  $(IBG)$ .  $BGOP$  est la section cherchée.



3.  $ABCDEFGH$  est un cube,  $I$  et  $J$  sont dans la face  $BCGF$ , et  $K$  est dans la face  $ABFE$ . Construire la section du cube par le plan  $(IJK)$ .  $MNOPQ$  est la section cherchée.

