Classe de Seconde

# Géométrie dans l'espace


1. Cours : géométrie dans l'espace
2. Cube 1 (c)
3. Cube 2
4. Cube 3
5. Pyramide (c)
6. Les Solides de Platon
7. Tétraèdre 1 (c)
8. Tétraèdre 2
9. Tétraèdre 3 (c)
10. Tétraèdre 4 (c)
11. Constructions


## *1. Cours : géométrie dans l'espace*

1. Plan

Par 3 points $A$, $B$ et $C$, non alignés, il ne passe qu'un seul plan noté ($ABC$).

Deux droites sécantes définissent un plan.

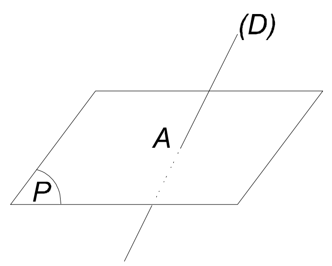
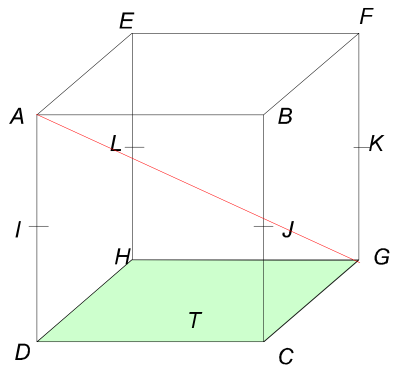
Deux droites parallèles définissent un plan.

Deux droites contenues dans un même plan sont *coplanaires*.

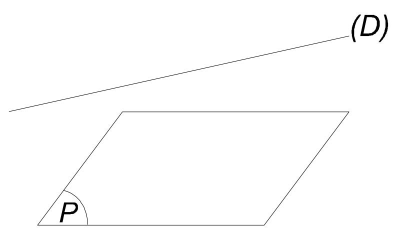
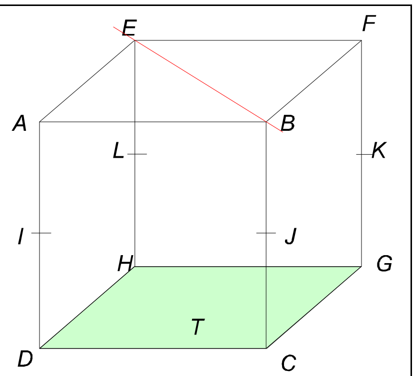
Une droite passant par deux points d'un plan est contenue dans ce plan.

2. Position relative d'une droite et d'un plan.

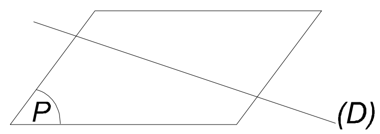
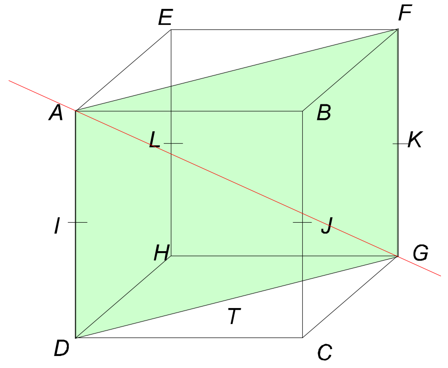
Une droite peut être sécante à un plan lorsqu'elle n'a qu'un seul point commun avec ce plan.

| | | |
|---|---|---|
| (D) ∩ (P) = {A} |  |  |

Une droite peut être parallèle à un plan, si elle n'a aucun point commun avec ce plan.

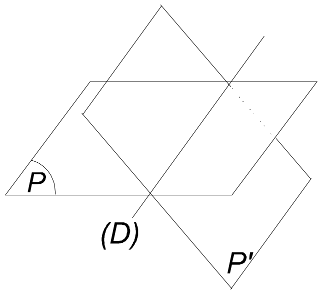
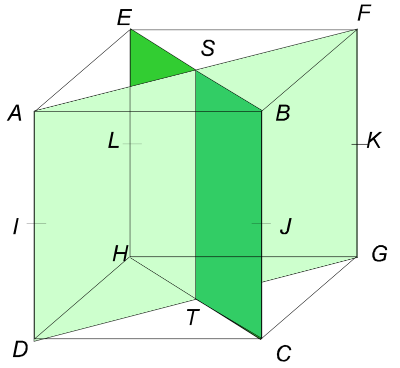
| | | |
|---|---|---|
| (D) ∩ (P) = ∅ |  |  |

Une droite peut être contenue dans un plan. On dit qu'elle est incluse dans ce plan.

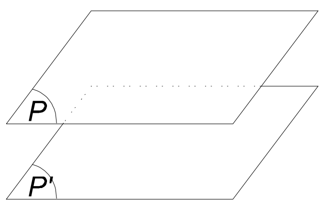
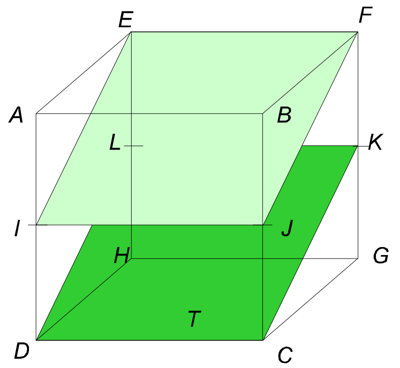
| | | |
|---|---|---|
| (D) ∩ (P) = (D) ou (D) ⊂ (P) |  |  |

3. Position relative de deux plans.

Deux plans peuvent être sécants lorsque leur intersection est une droite.

| | | |
|---|---|---|
| (P) ∩ (P') = (D) |  |  |

Deux plans peuvent être parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun.

| | | |
|---|---|---|
| (P) ∩ (P') = ∅ |  |  |

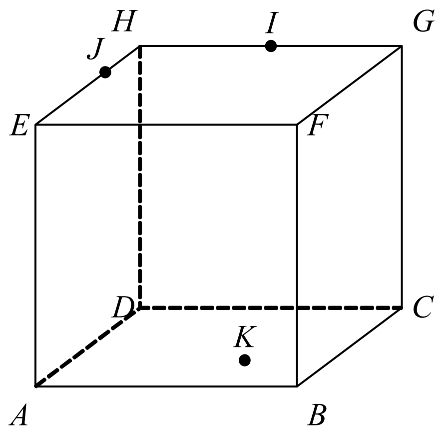
Deux plans peuvent être confondus : (P) ∩ (P') = (P) = (P').

## 2. Cube 1 (c)

*ABCDEFGH* est un cube. *I* et *J* sont deux points des arêtes [*GH*] et [*EH*], et *K* est dans le plan (*BCD*).

1. Construire l'intersection des plans (*ABC*) et (*IJK*). Justifier la construction.

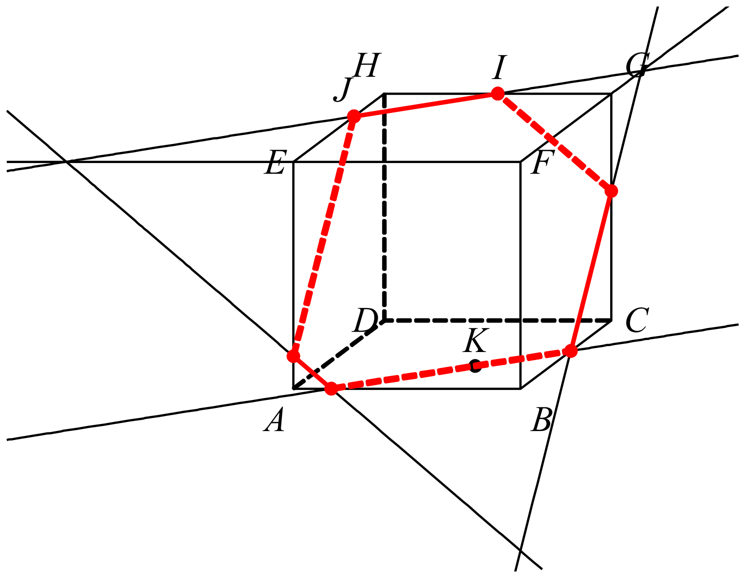
2. Tracer la section du cube par le plan $(IJK)$.



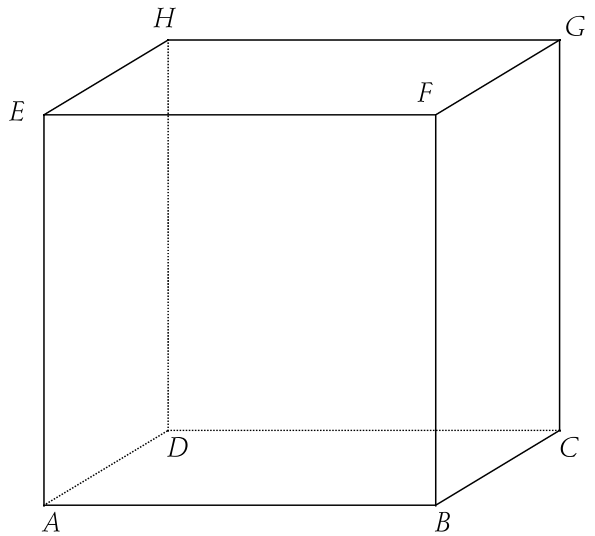

**Correction**

1. Les points $I$ et $J$ appartiennent aux plans $(EFG)$ et $(IJK)$, donc la droite $(IJ)$ est l'intersection des plans $(EFG)$ et $(IJK)$. De plus, comme $ABCDEFGH$ est un cube, les plans $(ABC)$ et $(EFG)$, donc le plan (IJK) coupe ces deux plans, et les droites d'intersection sont parallèles. La droite d'intersection des plans $(IJK)$ et $(ABC)$ est donc la parallèle à $(IJ)$ passant par $K$.

2. Voir figure.



### *3. Cube 2*




On considère un cube *ABCDEFGH*.

1. Citer toutes les arêtes

   a. qui sont parallèles à (*AB*),

   b. qui coupent (*AB*),

   c. ne sont pas coplanaires avec (*AB*).

2. Citer toutes les faces du cube qui

   a. sont parallèles à (*AB*),

   b. coupent (*AB*).

3. Citer toutes les faces du cube qui

   a. sont parallèles à (*ABCD*)

   b. coupent (*ABCD*).

4. Soit *I* le milieu de [*EF*] et *J* celui de [*FG*]. Les droites (*DF*) et (*IJ*) sont-elles coplanaires ?

5. Représenter la droite d'intersection des plans (*ACH*) et (*BDF*).

6. Soient *P* et *Q* les centres des carrés *EFGH* et *ABFE*.

   a. Montrer que la droite (*PQ*) est parallèle au plan (*ADHE*).

   b. Montrer que les plans (*PQE*) et (*ADHE*) sont sécants suivant une droite $\Delta$ parallèle à (*IJ*).

   c. Représenter $\Delta$ dans le plan (*ADHE*) en précisant son intersection *M* avec (*AD*) puis représenter cette droite dans l'espace.

7. Le côté du cube mesure 4 cm. On considère les points *U* tel que $\overrightarrow{BU}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ et *V* tel que $\overrightarrow{BV}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ ainsi que les points *W* tel que $\overrightarrow{EW}=\frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$ et *Z* tel que $\overrightarrow{GZ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GF}$ .

   a. Montrer que les droites (*UV*) et (*AC*) sont parallèles.

   b. Montrer que les droites (*WZ*) et (*EG*) sont parallèles.

   c. Déduire des questions précédentes que les droites (*UV*) et (*WZ*) sont parallèles.

8. Soit *K* le milieu de [*BF*], montrer que le plan (*IJK*) est parallèle au plan (*BEG*).

## 4. ***Cube 3***

Soit *ABCDEFGH* un cube d´arêtes de longueur $a$ et $O$ le centre du carré *ABCD*. Soit $I$ le milieu du segment [*AB*].

1. a. Démontrer que la droite (*EH*) est orthogonale au plan (*ABF*).

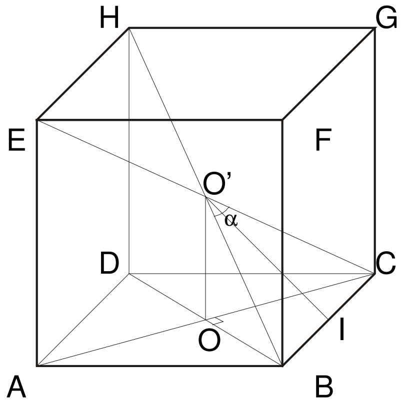
b. Montrer que *EBCH* est un rectangle. Ses diagonales se coupent en *O'*.

2. On appelle $\alpha$ la mesure de l´angle $\widehat{BO'C}$ .

a. Démontrer que les droites (*O'I*) et (*EB*) sont parallèles.

b. En déduire que $\widehat{CEB} = \frac{\alpha}{2}$.

c. Déterminer une valeur approchée de $\alpha$ à $10^{-1}$ près.




**Correction**

1. a. Comme *ABCDEFGH* est un cube, la droite (*EH*) est perpendiculaire aux droites (*EF*) et (*EA*), sécantes dans le plan (*ABF*). Donc (*EH*) est orthogonale au plan (*ABF*).

b. *BCGF* et *FGEH* étant des carrés, on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}$ . On obtient donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EH}$ , ce qui prouve que *EBCH* est un parallélogramme.

De plus, comme (*EH*) est orthogonale au plan (*ABF*), alors (*EH*) est en particulier perpendiculaire à (*EB*).

Le parallélogramme *EFGH* a donc un angle droit, ce qui prouve que c'est un rectangle.

2. On appelle $\alpha$ la mesure de l´angle $\widehat{BO'C}$ .

a. *O'* est le milieu de [*CE*] (car centre du rectangle *EBCH*) et $I$ est le milieu de [*BC*]. En appliquant le théorème des milieux au triangle *BCE*, on obtient bien que les droites (*IO'*) et (*BE*) sont parallèles.

b. Les droites (*O'I*) et (*BE*) sont parallèles.

Les angles correspondants $\widehat{CEB}$ et $\widehat{CO'I}$ sont donc égaux.

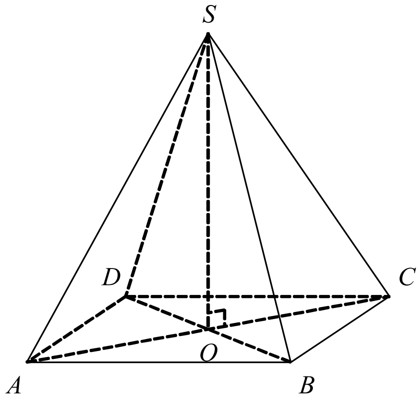
De plus, *BH* = *CE* (diagonales du rectangle *EBCH*), donc *BO'* = *O'C* et *BO'C* est isocèle en *O'*. $I$ étant le milieu de [*BC*], (*O'I*) est la bissectrice de l´angle $\widehat{BO'C}$ , et $\widehat{CO'I} = \frac{\alpha}{2}$, et $\widehat{CEB} = \frac{\alpha}{2}$ $(= \widehat{CO'I})$.

c. Dans le triangle *EBC* rectangle en $B$, $\tan\frac{\alpha}{2} = \tan\widehat{CEB} = \frac{BC}{BE} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}7071$. On obtient donc $\frac{\alpha}{2} \approx 35{,}26^o$ et $\alpha \approx 70{,}5°$ .

*SABCD* est une pyramide régulière à base carrée dont toutes les arêtes mesurent $a$.
$O$ est le centre de *ABCD* et [*SO*] est la hauteur de la pyramide.

### *5. Pyramide (c)*

*SABCD* est une pyramide régulière à base carrée dont toutes les arêtes mesurent $a$. $O$ est le centre de *ABCD* et [*SO*] est la hauteur de la pyramide




1. Exprimer $AC$ et $AO$ en fonction de $a$.

2. Montrer que $SO = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Déterminer, en fonction de $a$, le volume de *SABCD*.

4. Calculer ce volume lorsque $a = \sqrt{2}$ cm .

*NB : on conservera les valeurs exactes.*

**Correction**

1. $AC = a\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté $a$) et $AO = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ (car $O$ est le centre du carré *ABCD*).

2. Dans le triangle *SAO*, d'après le théorème de Pythagore : $SO^2 + OA^2 = SA^2$, $SO^2 + (a\frac{\sqrt{2}}{2})^2 = a^2$,

$SO^2 + \frac{2a^2}{4} = a^2$, $SO^2 = a^2 - \frac{2a^2}{4} = \frac{4a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = \frac{2a^2}{4}$, $SO = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Volume(*SABCD*) $= \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABCD) \times SO = \frac{1}{3} \times a^2 \times a\frac{\sqrt{2}}{2} = a^3\frac{\sqrt{2}}{6}$.

4. Lorsque $a = \sqrt{2}$ cm , Volume(*SABCD*) $= \frac{\sqrt{2}^3 \times \sqrt{2}}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ cm$^3$.

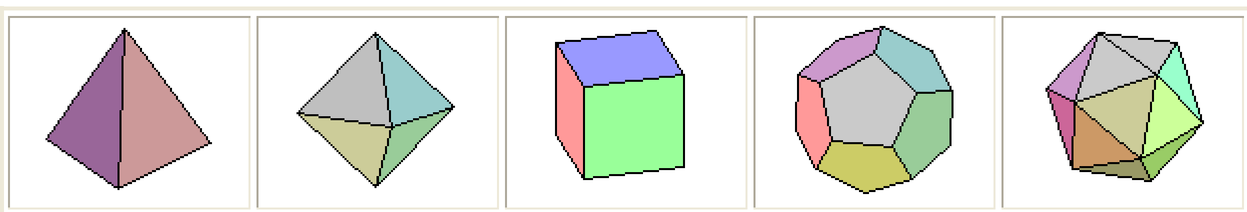
### *6. Les Solides de Platon*

Un polyèdre P est dit *convexe* si ses faces sont elles mêmes des polygones réguliers *convexes*, si ses faces sont égales et si de tout sommet sont issus le même nombre de côtés.

Pour la suite, nous désignerons par $F$ le nombre de faces, $S$ le nombre de sommets et $A$ le nombre d'arêtes.

Un résultat étonnant est qu'il n'existe que 5 polyèdres convexes réguliers. Ce sont les cinq polyèdres (ou solides) de Platon :

le **Tétraèdre**, l'**Octaèdre**, le **Cube**, le **Dodécaèdre** et l'**Icosaèdre**.



| Tétraèdre | Octaèdre | Cube | Dodécaèdre | Icosaèdre |
|---|---|---|---|---|

Le tableau suivant résume les différentes caractéristiques de chacun des polyèdres de Platon:

| POLYEDRE | Type des Faces | Nombre de faces $F$ | Nombre de sommets $S$ | Nombre d'arêtes $A$ | Nombre d'arêtes par sommet $m$ | Nombre de côtés d'une face $n$ | Symbole de Schläfli $(m\ ;\ n)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tétraèdre | Triangles équilatéraux | | | | | | |
| Octaèdre | Triangles équilatéraux | | | | | | |
| Cube | Carrés | | | | | | |
| Dodécaèdre | Pentagones | | | | | | |
| Icosaèdre | Triangles équilatéraux | | | | | | |

1. Conjecturer une relation entre $F$, $S$ et $A$ (on admettra ce résultat appelé *Formule d'Euler*)
2. On admettra également que dans un polynôme convexe et régulier :
   - à chaque sommet aboutit le même nombre d'arête ;
   - chaque arête est terminée par deux sommets ;
   - chaque arête est commune à deux faces ;
   - chaque face est « bordée » par le même nombre d'arêtes.

En utilisant ces assertions, exprimer $A$ en fonction de $m$ et $S$, puis en fonction de $n$ et $F$.

**Il n'existe que cinq polyèdres réguliers convexes :**
**ce sont les cinq solides de Platon.**

(i) $S + F - A = 2$ (Formule d'Euler)
(ii) $2A = mS = nF$

1. Démontrer que quels que soient les nombres $a$, $b$, $c$ et $d$ (non nuls) tels que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ on a :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d} \text{ puis } \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}.$$

2. Démontrer que $2a+2b-ab>0$ est équivalent à $(a-2)(b-2)<4$.
3. Compléter : $nF = mS = 2A$ équivaut à :

$$\frac{F}{\boxed{\phantom{xx}}}=\frac{S}{\boxed{\phantom{xx}}}=\frac{A}{\boxed{\phantom{xx}}}$$

donc

$$\frac{F}{\square}=\frac{S}{\square}=\frac{A}{\square}=\frac{F+S-A}{\square}=\frac{\square}{\square}$$

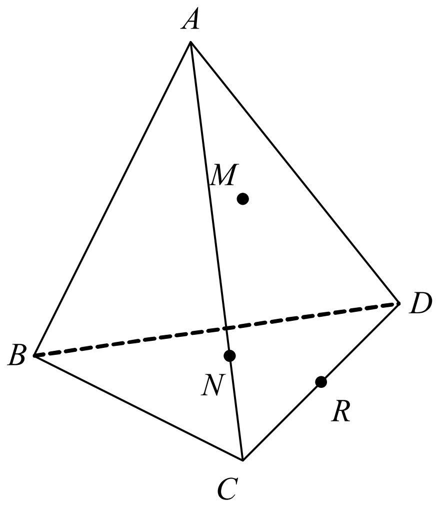
4. Démontrer que : $A=\dfrac{2mn}{2m+2n-mn}$ ; $S=\dfrac{4n}{2m+2n-mn}$ et $F=\dfrac{4m}{2m+2n-mn}$.

- Quel est le signe du dénominateur ?
- Quelles sont les valeurs possibles de $m$ et $n$ ?
- A chaque valeur de $m$, associer une valeur de $n$.
- Conclure.

### *7. Tétraèdre 1 (c)*

*ABCD* est un tétraèdre. *M* est un point de la face *ABD*, *N* un point de [*AC*] et *R* un point de [*CD*].

Construire la section du tétraèdre *ABCD* par le plan (*MNR*).



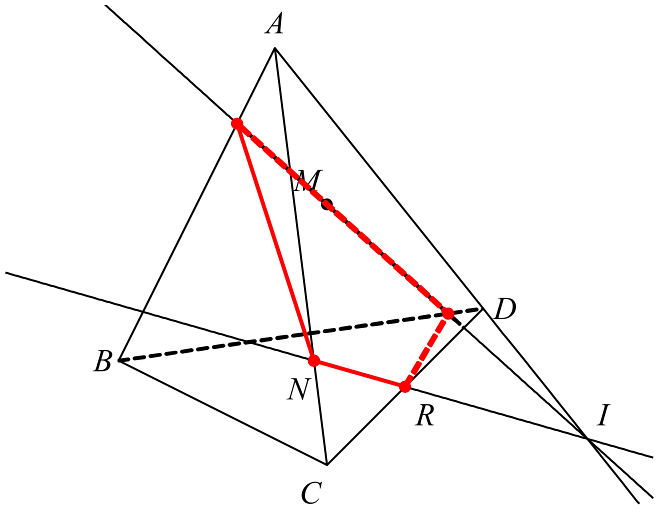

**<u>Correction</u>**

Il est évident que la droite (*NR*) est l'intersection des plans (*MNR*) et (*ACD*).

*M* est un point de la face *ABD*, et les droites (*NR*) (de (*ACD*)) et (*AD*) (de (*ABD*)) se coupent en *I* (car sécantes dans le plan (*ACD*)).

La droite (*MI*) est donc l'intersection des plans (*MNR*) et (*ABD*).

(*MI*) coupe les arêtes [*BD*] et [*AB*], ce qui permet d'obtenir la section du tétraèdre *ABCD* par le plan (*MNR*).




## *8. Tétraèdre 2*

*SABCD* est une pyramide de sommet *S* et dont la base *ABCD* est un parallélogramme.

*M* est un point de l'arête [*SC*], *N* est un point de l'arête [*SB*], et (*MN*) est parallèle à (*BC*).

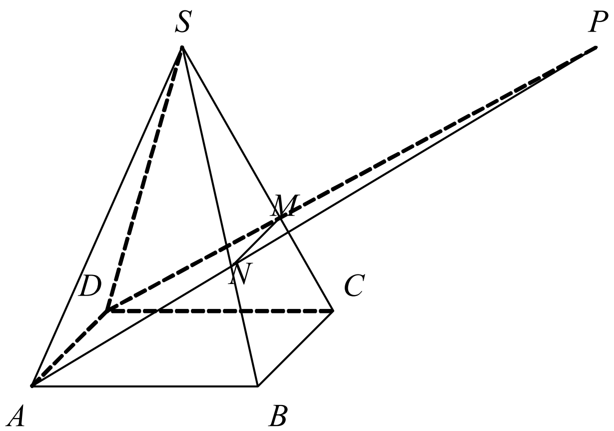
1. Montrer que (*AD*) et (*MN*) sont parallèles.

2. Dans le plan (*ADM*), les droites (*AN*) et (*DM*) se coupent en *P*.

a. Démontrer que *P* appartient à chacun des plans (*SAB*) et (*SDC*).

b. Pourquoi la droite d'intersection des plans (*SAB*) et (*SDC*) est-elle la droite (*SP*) ?

3. En déduire que (*SP*) est parallèle à (*AB*) et à (*CD*).




**Correction**

1. (*AD*) et (*MN*) sont parallèles à la droite (*BC*), donc elles sont parallèles.

2. Dans le plan (*ADM*), les droites (*AN*) et (*DM*) se coupent en *P*.

a. La droite (*AN*) appartient au plan (*SAB*), donc *P* aussi (car $P \in (AN)$).

La droite (*DM*) appartient au plan (*SDC*), donc *P* aussi (car $P \in (DM)$).

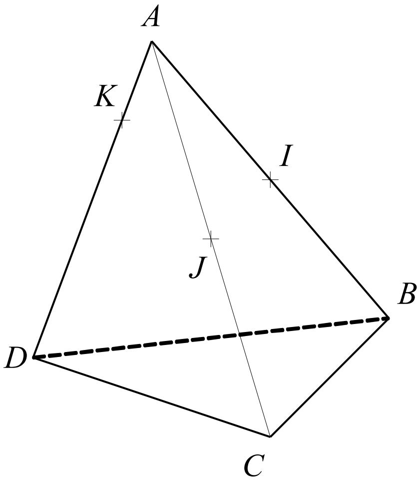
b. *S* et *P* appartiennent aux plans (*SAB*) et (*SDC*), donc la droite d'intersection des plans (*SAB*) et (*SDC*) est la droite (*SP*)

c. (*AB*) (du plan (*SAB*)) et (*CD*) (du plan (*SDC*)) sont parallèles donc, d'après le théorème du toit, elles sont parallèles également à l'intersection de ces deux plans, c'est-à-dire la droite (*SP*).

### ***9. Tétraèdre 3 (c)***

*ABCD* est un tétraèdre. *I* est le milieu de [*AB*], *J* est le milieu de [*AC*] et *K* est le point de [*AD*] tel que $AK=\frac{1}{4}AD$ .

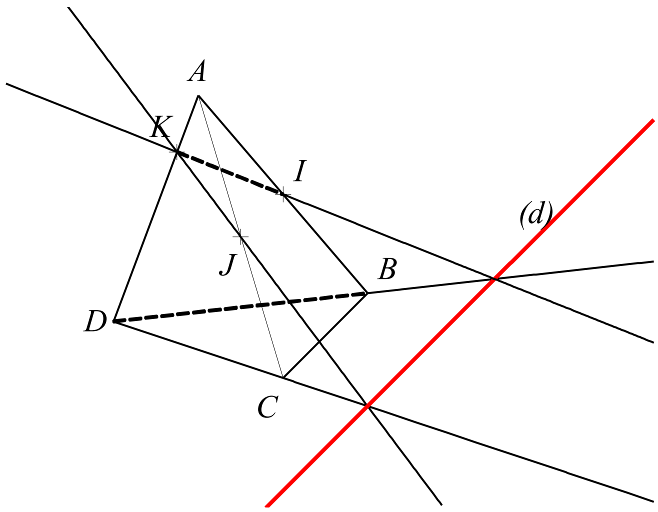
1. Démontrer que (*IJ*) est parallèle (*BC*).
2. Tracer l'intersection (*d*) des plans (*IJK*) et (*BDC*).
3. Démontrer que (*d*) est parallèle aux droites (*IJ*) et (*BC*).




**Correction**

1. Dans le triangle *ABC*, *I* est le milieu de [*AB*] et *J* est le milieu de [*AC*] donc, d'après le théorème des milieux, (*IJ*) est parallèle (*BC*).

2. Voir figure ci-contre.

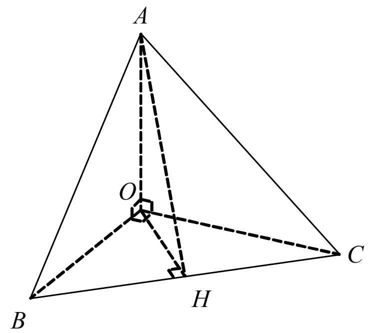



3. Les plans (*DCB*) et (*IJK*) sont sécants suivant (*d*). De plus, les droites (*IJ*) (de (*IJK*)) et (*BC*) (de (*DBC*)) sont parallèles.

Donc, d'après le théorème du toit, (*d*) est parallèle aux droites (*IJ*) et (*BC*).

### ***10. Tétraèdre 4 (c)***

*OABC* est un tétraèdre dont les faces *OAB*, *OAC* et *OBC* sont des triangles rectangles isocèles en *O*, et *ABC* est un triangle équilatéral. On pose $OA = OB = OC = a$ (on a donc $AB=AC=BC=a\sqrt{2}$ ).




1. Démontrer que la droite (*OA*) est orthogonale au plan (*OBC*).

2. Calculer en fonction de *a* le volume du tétraèdre *OABC*.

3. *H* est le pied de la hauteur issue de *O* dans *OBC* (*H* est donc le milieu de [*BC*]).

Exprimer *OH* en fonction de *a*, puis montrer que $AH = a\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

4. Calculer l'aire du triangle *ABC*.

5. Déduire des questions 2. et 4. la longueur de la hauteur issue de *O* du tétraèdre *OABC*.

**Correction**

1. (*OA*) est perpendiculaires aux droites (*OB*) et (*OC*) (sécantes dans le plan (*OBC*)), donc (*OA*) est orthogonale au plan (*OBC*).

2. Volume(*OABC*) $= \dfrac{1}{3}\times \text{Aire}(OBC)\times AO = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{a\times a}{2}\times a = \dfrac{a^3}{6}$.

3. *H* étant le milieu de [*BC*], [*OH*] est la médiane relative à l'hypoténuse du triangle *OBC* rectangle en *O*, donc $OH = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

(*OA*) est orthogonale au plan (*OBC*) donc *AOH* est rectangle en *O*.

D'après le théorème de Pythagore : $AH^2 = AO^2 + OH^2$, $AH^2 = a^2 + \dfrac{2a^2}{4} = \dfrac{6}{4}a^2$, $AH = \sqrt{\dfrac{6a^2}{4}} = a\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

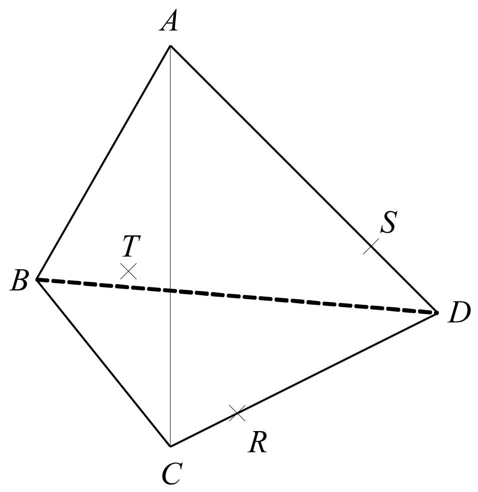
4. Aire(*ABC*) $= \dfrac{BC\times AH}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}\times a\dfrac{\sqrt{6}}{2}}{2} = a^2\dfrac{\sqrt{12}}{4} = a^2\dfrac{\sqrt{4\times 3}}{4} = a^2\dfrac{2\sqrt{3}}{4} = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Soit *h* la longueur de la hauteur issue de *O* du tétraèdre *OABC*.

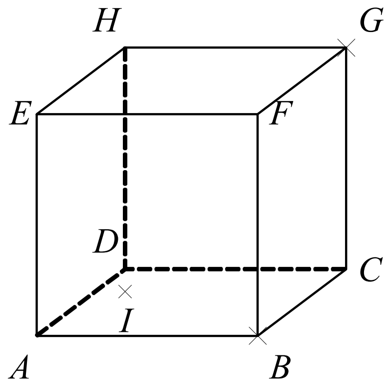
Volume(*OABC*) $= \dfrac{1}{3}\times\text{Aire}(ABC)\times h$, soit $\dfrac{a^3}{6} = \dfrac{1}{3}a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times h = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{6}\times h$ donc $h = \dfrac{a^{\cancel{3}}}{\cancel{a^2}\sqrt{3}} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

### *11. Constructions*

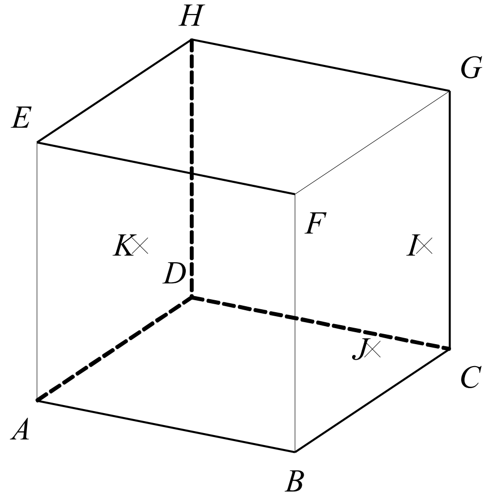
1. *ABCD* est un tétraèdre, $T \in (ABC)$, $S \in [AD]$ et $R \in [CD]$. Construire la section du tétraèdre *ABCD* par le plan (*RST*).




2. *ABCDEFGH* est un cube, et *I* est dans la face *ABFE*. Construire la section du cube par le plan (*IBG*).

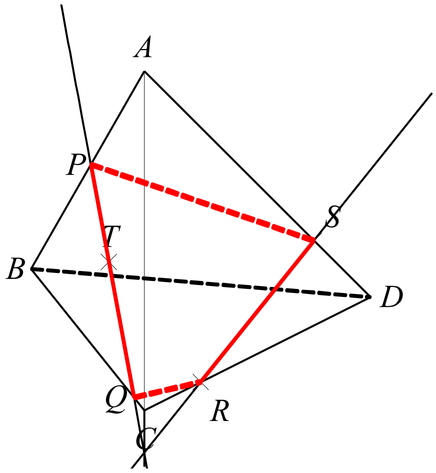



3. *ABCDEFGH* est un cube, *I* et *J* sont dans la face *BCGF*, et *K* est dans la face *ABFE*. Construire la section du cube par le plan (*IJK*).

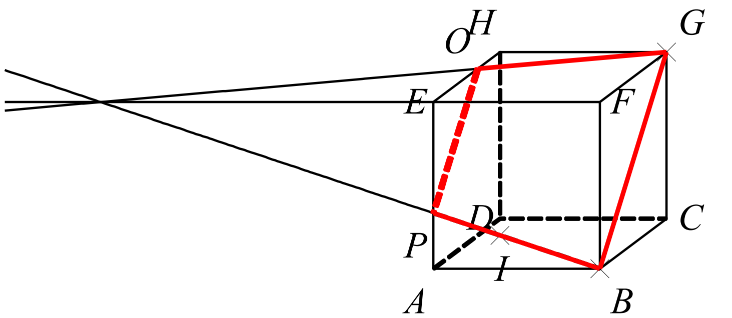



**<u>Correction</u>**

1. *ABCD* est un tétraèdre, $T \in (ABC)$, $S \in [AD]$ et $R \in [CD]$. Construire la section du tétraèdre *ABCD* par le plan (*RST*). *PQRS* est la section cherchée.




2. *ABCDEFGH* est un cube, et *I* est dans la face *ABFE*. Construire la section du cube par le plan (*IBG*). *BGOP* est la section cherchée.




3. *ABCDEFGH* est un cube, *I* et *J* sont dans la face *BCGF*, et *K* est dans la face *ABFE*. Construire la section du cube par le plan (*IJK*). *MNOPQ* est la section cherchée.