

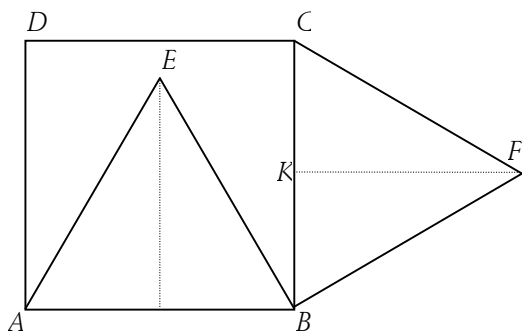
## Géométrie classique

---

- |   |   |
|---|---|
| 1. Figures de base 1                    | 19. Rectangle et triangle semblable (c) |
| 2. Radians et degrés                    | 20. Triangles semblables (c)            |
| 3. La Rosace du Temple de Diane (Nîmes) | 21. Triangles semblables                |
| 4. Triangles aires et longueurs         | 22. Triangles semblables                |
| 5. Problème de construction             | 23. Sinus de $75^\circ$                 |
| 6. Triangle rectangle (c)               | 24. Configurations dans un cercle 1     |
| 7. Rectangle (c)                        | 25. Configurations dans un cercle 2     |
| 8. Trapèze                              | 26. Configurations dans un cercle 3     |
| 9. Puissance d'un point (1)             | 27. Aires dans un carré (1)             |
| 10. Puissance d'un point (2)            | 28. Aires dans un carré (2)             |
| 11. Triangle équilatéral (c)            | 29. Triangle rectangle (1)              |
| 12. Carrés 1                            | 30. Triangle rectangle (2)              |
| 13. Carrés 2 (c)                        | 31. Pentagone et nombre d'or            |
| 14. Carrés 3 (c)                        | 31-a : Angles et côtés                  |
| 15. Parallélogramme                     | 31-b : Construction dite de Ptolémée    |
| 16. Trapèze                             | 31-c : Méthode des cercles tangents     |
| 17. Théorème de Menelaüs                | 31-d : Construction de Dürer            |
| 18. Similitude (c)                      | 31-e : Les étoiles de Compostelle       |

### 1. Figures de base 1

---



$ABCD$  est un carré de côté 1, les triangles  $ABE$  et  $BCF$  sont équilatéraux.

$H$  et  $K$  sont les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[BC]$ .

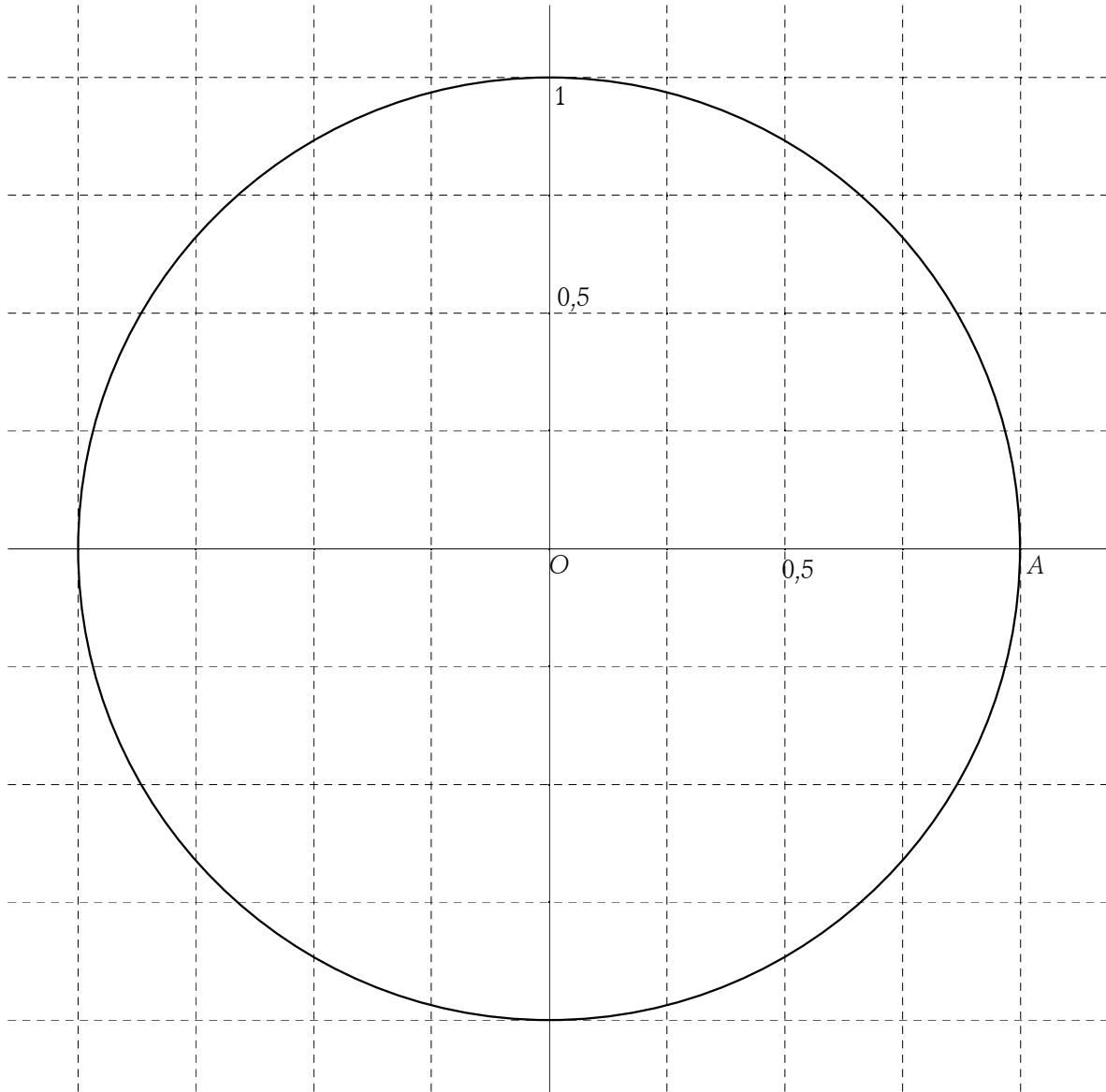
On rappelle que la somme des angles d'un triangle est de  $180^\circ$ .

Evaluer l'angle  $\widehat{DEA}$  puis  $\widehat{AEB}$ , puis  $\widehat{BEF}$ .

Que vaut  $\widehat{DEF}$  ? Que dire des points  $D, E$  et  $F$  ?

## 2. Radians et degrés

---



1. Placer sur le cercle trigonométrique ci-dessus les points suivants :

$$M_1 \text{ tel que } \widehat{AOM_1} = \frac{\pi}{6}, M_2 \text{ tel que } \widehat{AOM_2} = \frac{3\pi}{4}, M_3 \text{ tel que } \widehat{AOM_3} = -\frac{2\pi}{3}, M_4 \text{ tel que } \widehat{AOM_4} = -\frac{5\pi}{2},$$

$$M_5 \text{ tel que } \widehat{AOM_5} = \frac{5\pi}{6}, M_6 \text{ tel que } \widehat{AOM_6} = -3\pi, M_7 \text{ tel que } \widehat{AOM_7} = -\frac{\pi}{3}, M_8 \text{ tel que } \widehat{AOM_8} = -\frac{11\pi}{4}.$$

2. Je dis que les points  $N_1$  tel que  $\widehat{AON_1} = -\frac{17\pi}{6}$  et  $N_2$  tel que  $\widehat{AON_2} = 570^\circ$  sont diamétralement opposés sur le cercle. Ai-je raison ?

### 3. La Rosace du Temple de Diane (Nîmes)

---

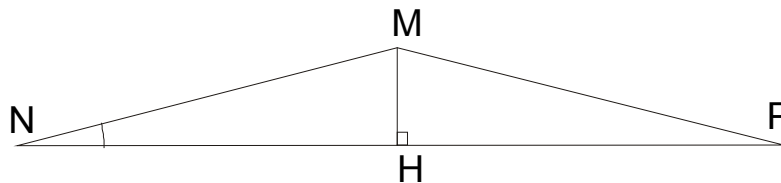
La rosace du temple de Diane est composée de polygones réguliers dont les côtés ont même longueur, et de douze triangles isocèles.

Les sommets extérieurs de cette figure étant quasiment situés sur un cercle, on peut prendre comme valeur approchée par défaut du rayon de ce cercle la distance  $OA$ .

Pour les calculs, on supposera que la valeur commune des côtés des polygones réguliers est 1.

		Aire du carré =
		Aire du triangle équilatéral =
		Aire de l'hexagone =
		Aire du losange =
		Aire du triangle isocèle = $\zeta$

Pour calculer l'aire d'un triangle isocèle, on cherchera son angle au sommet, puis la mesure de sa base et de sa hauteur :



$\widehat{NMP} =$	
$\widehat{NMH} =$	
$\widehat{MNH} =$	
$MH =$	$NH =$
$NP =$	
Aire de $MNP =$	

- Calculer l'aire de la Rosace. En prenant cette aire comme aire du disque de rayon  $OA$ , déterminer une valeur approchée  $p$  de  $\pi$ .
- Calculer le périmètre de la Rosace. En utilisant ce périmètre comme valeur de la circonférence de rayon  $OA$ , déterminer une valeur approchée  $p'$  de  $\pi$ .

#### 4. Triangles aires et longueurs

Une unité de longueur étant choisie, on considère un triangle  $ABC$  tel que :  $AB = 5$ ,  $AC = 4$  et  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . On se propose de calculer la longueur  $BC$  et les deux angles  $\widehat{ABC}$  et  $\widehat{ACB}$ .

- Soit  $H$  le pied de la hauteur issue de  $C$ . Calculer les valeurs exactes des longueurs  $CH$  et  $AH$ . En déduire la longueur  $BH$ .
- Calculer la valeur exacte de la longueur  $BC$ , puis une valeur approchée à  $0,01$  près.
- Calculer la valeur exacte de  $\cos \widehat{ABC}$ , puis donner une valeur approchée de l'angle  $\widehat{ABC}$  en degrés à  $0,1^\circ$  près par défaut. En déduire une valeur approchée de l'angle  $\widehat{ACB}$ .

#### 5. Problème de construction

Sur une droite  $\Delta$ , on considère 3 points  $B$ ,  $H$  et  $C$  dans cet ordre (ne pas placer  $H$  au milieu de  $[BC]$ ).

On veut construire un point  $A$  tel que  $ABC$  soit rectangle en  $A$  et  $[AH]$  soit hauteur de  $ABC$ .

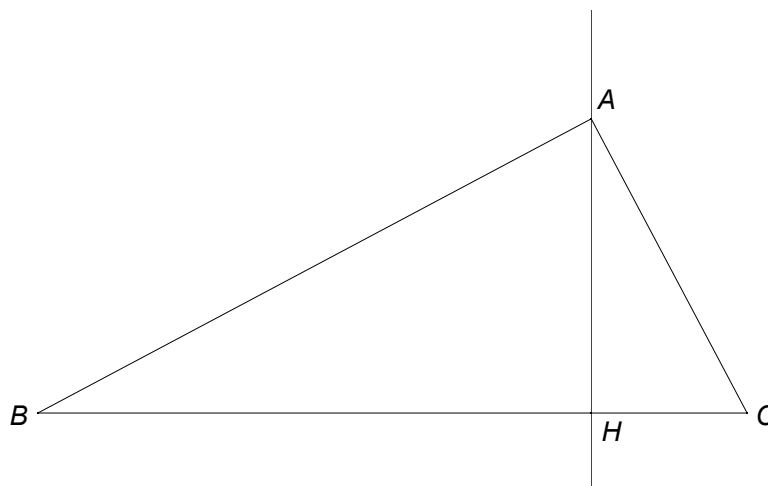
- Indiquer en justifiant sur quelles lignes doit se trouver  $A$ . Réaliser la construction.

2. Combien y a-t-il de solutions ?
3. Peut-on construire A si H n'appartient pas à [BC] ? Pourquoi ?

### 6. Triangle rectangle (c)

$ABC$  est un triangle rectangle en  $A$ ,  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$ .

1. En écrivant de deux façons le cosinus de l'angle  $\widehat{ABC}$ , montrer que  $BA^2 = BH \times BC$ . De même montrer que  $CA^2 = CH \times BC$
2. En écrivant  $BC = BH + CH$  et en utilisant Pythagore dans  $ABC$  ainsi que les relations précédentes montrer que  $AH^2 = BH \times CH$ .
3. Montrer que  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$ .
4. On applique les relations précédentes au triangle  $ABC$  où  $AB = 6$  et  $AC = 8$ . Calculer  $BC$ ,  $HB$ ,  $HC$  et  $HA$  on pourra utiliser la relation du 3. même si elle n'est pas démontrée...).



### Correction

1.  $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC}$  ; on a  $\widehat{ABC} = \widehat{ABH}$  donc  $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{BH}{AB}$  d'où  $\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BH \times BC$ .

En refaisant la même chose avec l'angle  $\widehat{ACB}$  on obtient la deuxième relation ;

2. Avec Pythagore :  $AB^2 + AC^2 = BC^2 = (BH + HC)^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH \times CH$  et en développant  $AB^2$  et  $AC^2$  dans les triangles  $AHB$  et  $AHC$  :  $AB^2 + AC^2 = AH^2 + HB^2 + AH^2 + HC^2$  ; on a donc après égalité et simplification :  $AH^2 = BH \times CH$ .

3. Essayons de travailler la relation proposée pour voir ce que l'on en tire :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{AB^2 AC^2} = \frac{BC^2}{AB^2 AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH} = \frac{BC}{AB \times AC} \Leftrightarrow AB \times AC = AH \times BC$$

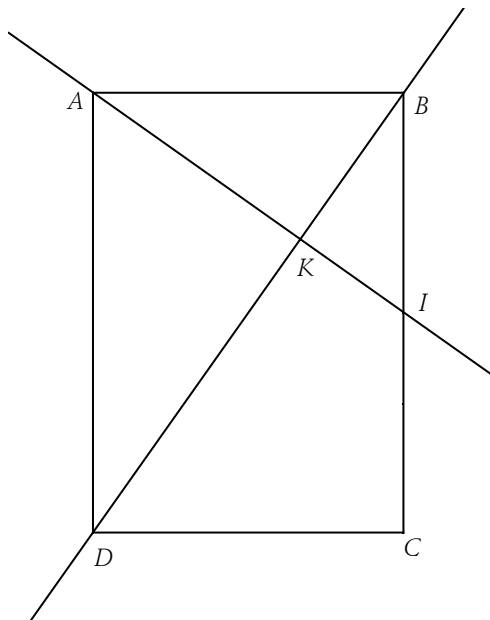
Un produit représente souvent une aire... mais oui, ça y est, c'est l'aire du triangle  $ABC$  ! (enfin le double de l'aire plutôt.) Et l'autre produit ? C'est pareil puisque  $AH$  est la hauteur et  $BC$  la base. Nous avons simplement deux expressions de l'aire de  $ABC$ , cette égalité est donc vraie et la relation de départ également.

4. Pour  $BC$  on fait Pythagore, ce qui donne  $BC = 10$  ; avec  $BA^2 = BH \times BC$  on a  $BH = \frac{BA^2}{BC} = \frac{36}{10} = 3,6$  et avec  $CA^2 = CH \times BC$  on a  $CH = 6,4$  ; on termine avec  $AH^2 = BH \times CH = \frac{36}{10} \cdot \frac{64}{10}$  d'où  $AH = 4,8$ . On pouvait aussi utiliser la relation du 3. (à vous de jouer...).

### 7. Rectangle (c)

Soit un rectangle  $ABCD$  tel que  $AB = 1$  et  $BC = \sqrt{2}$ . Soit  $I$  le milieu du côté  $BC$ . Démontrer que les droites  $(AI)$  et  $(BD)$  sont perpendiculaires.

#### Correction



Les triangles  $AKB$  et  $KBI$  sont semblables car ils ont les mêmes angles ; le rapport de similitude est  $\frac{BI}{AD} = \frac{1}{2}$

donc  $KI = \frac{1}{2}AK \Rightarrow 3KI = AI \Rightarrow KI = \frac{1}{3}AI = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$  car  $AI^2 = AB^2 + BI^2 = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow AI = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Même chose pour  $BK$  :  $BK = \frac{1}{3}BD = \frac{1}{3}\sqrt{3}$  car  $DB^2 = AD^2 + AB^2 = 3 \Rightarrow DB = \sqrt{3}$ .

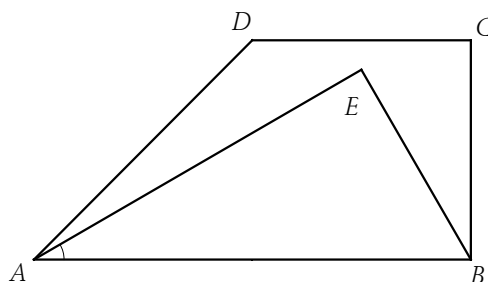
Il reste à vérifier Pythagore :  $IK^2 + BK^2 = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2} + \frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ , or  $BI = \frac{1}{2}\sqrt{2} \Rightarrow BI^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ .

### 8. Trapèze

$ABCD$  est un trapèze rectangle tel que  $AB = 2$ ,  $BC = 1$  et  $\widehat{BAD} = 45^\circ$ .  $AEB$  est un triangle rectangle en  $E$  tel que  $\widehat{BAE} = 30^\circ$  (inutile de refaire la figure).

a. Calculer les longueurs  $AD$ ,  $DC$ ,  $AE$  et  $EB$ .

b. Calculer l'aire du trapèze  $ABCD$ , du triangle  $AEB$ , du triangle  $BEC$ , et en déduire celle du quadrilatère  $ADCE$ .



### 9. Puissance d'un point (1)

---

1. Soit un point  $A$  extérieur à un cercle  $(C)$  de centre  $O$ , de rayon  $R$ . Deux droites issues de  $A$  coupent  $(C)$  respectivement en  $M$  et  $N$  ainsi que  $M'$  et  $N'$ .

Montrer que les triangles  $AMN'$  et  $AM'N$  sont semblables.

Déduisez-en que  $AM \cdot AN = AM' \cdot AN' = AO^2 - R^2 = AT^2$  où  $T$  est le point de contact d'une des tangentes à  $(C)$  issues de  $A$ .

2. On construit deux cercles  $(C)$  et  $(C')$  de centres respectifs  $O$  et  $O'$  et de rayons  $R$  et  $R'$ . Ces cercles sont sécants en  $A$  et  $B$ . Soit  $P$  un point de  $(AB)$ ,  $T$  et  $T'$  les points de contact des tangentes à  $(C)$  et  $(C')$  issus de  $P$ .

a. Montrez que  $PA \cdot PB = PT^2 = PT'^2$ .

b. Déduisez-en que si on considère tous les cercles passant par  $A$  et  $B$  alors les centres de ces cercles sont sur une droite (que l'on précisera) et les points  $T$  sont sur un cercle (que l'on précisera également).

### 10. Puissance d'un point (2)

---

Deux cercles  $(\mathcal{C})$  et  $(\mathcal{C}')$  de centres  $O$  et  $O'$  se coupent en  $A$  et  $B$ ; une droite  $(d)$  passant par  $B$  coupe  $(\mathcal{C})$  en  $M$  et  $(\mathcal{C}')$  en  $M'$ .

1. Montrer que  $(OO')$  est la médiatrice de  $[AB]$ . En déduire que  $\widehat{AMB} = \widehat{AOO'}$ .

2. Montrer que les triangles  $OAO'$  et  $MAM'$  sont semblables. En déduire que le rapport  $\frac{AM}{AM'}$  est indépendant du choix de la droite  $(d)$ .

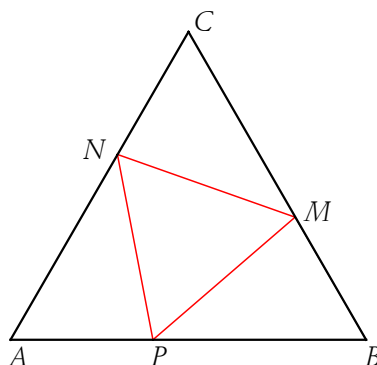
### 11. Triangle équilatéral (c)

---

$ABC$  est un triangle équilatéral,  $M, N, P$  sont des points de  $[BC], [CA], [AB]$  tels que  $BM = CN = AP$ .

1. Démontrer que les triangles  $BMP, CNM$  et  $NAP$  sont tous isométriques.

2. En déduire que  $MNP$  est équilatéral.



### Correction

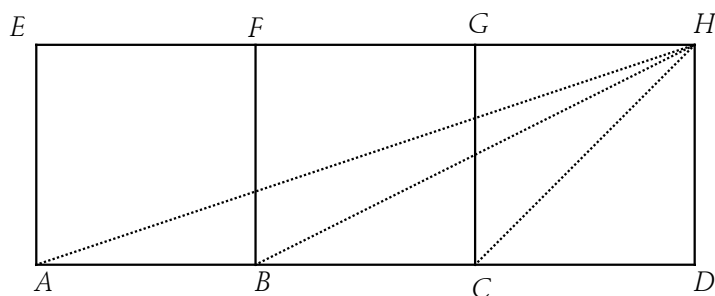
1. Les angles en  $A, B$  et  $C$  sont égaux à  $60^\circ$ , par ailleurs  $BM = CN = AP = x$  donc

$$CM = AN = BP = \text{côté du triangle} - x.$$

Les triangles ayant deux côtés égaux et un angle égal sont isométriques.

2. Puisqu'ils sont isométriques leurs troisièmes côtés sont tous égaux :  $PM = MN = NP$  donc  $MNP$  est équilatéral.

## 12. Carrés 1



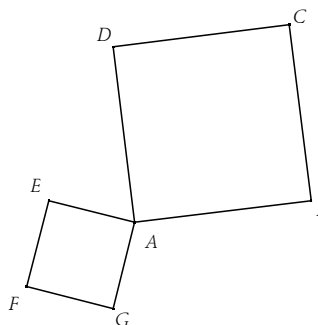
On se donne trois carrés accolés de côté 1 comme sur la figure.

1. Calculer une valeur approchée à  $10^{-2}$  près des angles  $\widehat{DCH}$ ,  $\widehat{DBH}$  et  $\widehat{DAH}$ .
2. Montrez que les triangles  $AFH$  et  $HCB$  sont semblables en utilisant les longueurs des côtés.
3. Déduisez-en que  $\widehat{CBH} = \widehat{AHF}$  puis que  $\widehat{HAD} + \widehat{HBC} = 45^\circ$ .

## 13. Carrés 2 (c)

$ABCD$  et  $AEFG$  sont deux carrés (voir figure ci-contre).

Montrer que  $DG = EB$  et que les droites  $(DG)$  et  $(EB)$  sont perpendiculaires.



### Correction

Si on considère la rotation de centre  $A$  et d'angle  $90^\circ$  (ou  $\frac{\pi}{2}$ ), on envoie  $B$  sur  $D$  et  $E$  sur  $G$ . La rotation est une isométrie, elle conserve les distances, par conséquent la distance de départ  $BE$  devient la distance d'arrivée  $DG$  et  $BE = DG$ ; de même l'angle entre les segments de départ  $[BE]$  et d'arrivée  $[DG]$  est l'angle de rotation, soit  $90^\circ$  (ou  $\frac{\pi}{2}$ ).

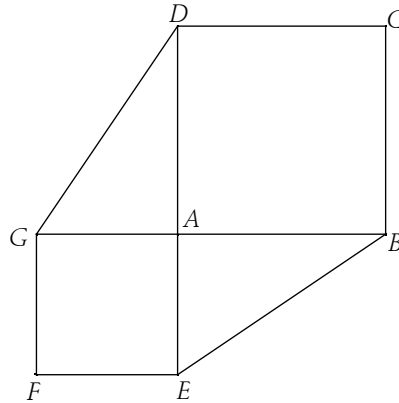
## 14. Carrés 3 (c)

Deux carrés  $ABCD$  et  $AEFG$  ont en commun le point  $A$ ,  $(AD)$  est perpendiculaire à  $(AG)$ . Soit  $I$  le milieu de  $[GD]$  et  $H$  le point d'intersection de  $(AI)$  et  $(BE)$ . On pose  $\widehat{GDA} = \alpha$  et  $\widehat{DGA} = \beta$ .

On souhaite montrer que  $(IH)$  et  $(BE)$  sont perpendiculaires.

Vous complèterez la figure ci-dessous.

1. a. Montrez que les triangles  $ADG$  et  $ABE$  sont isométriques.  
b. Quelles sont alors les mesures des angles  $\widehat{ABE}$  et  $\widehat{AEB}$  ?
2. a. Expliquez pourquoi  $A$  est sur le cercle de diamètre  $[GD]$ .  
b. En déduire que le triangle  $ADI$  est isocèle puis que l'angle  $\widehat{EAH} = \alpha$ .
3. Quelle est la mesure de l'angle  $\widehat{AHE}$  ? Expliquer (on pourra utiliser la valeur de  $\alpha + \beta$ ).
4. Conclure.



### Correction

1. a.  $ADG$  et  $ABE$  sont isométriques :  $AG = AE$ ,  $AD = AB$  puisqu'on a des carrés ; l'angle en  $A$  est droit dans les deux cas.

b. Les correspondances d'angles sont alors  $\widehat{ABE} = \widehat{GDA} = \alpha$  et  $\widehat{AEB} = \widehat{DGA} = \beta$ .

2. a. Le triangle  $AGD$  est rectangle en  $A$  donc  $GD$  est l'hypoténuse et  $AGD$  est dans un cercle de diamètre  $[GD]$ .

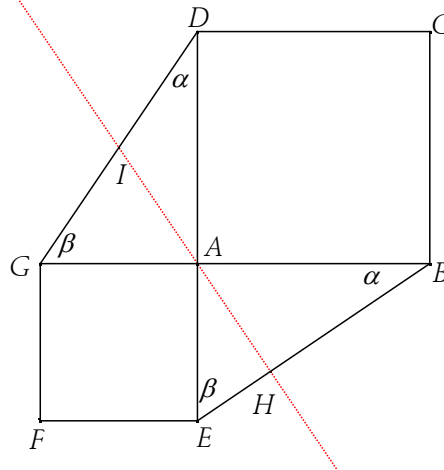
b. On a donc  $ID = IG = IA$  donc le triangle  $ADI$  est isocèle de sommet  $I$  et  $\widehat{EAH} = \widehat{DAI} = \widehat{ADI} = \alpha$ .

3. Puisqu'on a  $\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$  dans  $ADG$ , on a

$$\widehat{AHE} = 180^\circ - \widehat{ABH} - \widehat{AEH} = 180^\circ - \alpha - \beta = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

dans  $ABE$ .

4. Conclusion :  $AH$  est orthogonale à  $(BE)$ .



### **15. Parallélogramme**

Soit  $ABCD$  un parallélogramme,  $I$  est un point donné de  $(BD)$ ,  $(AI)$  coupe  $(BC)$  en  $J$  et  $(DC)$  en  $K$ .

1. Montrez que les triangles  $AID$  et  $BIJ$  sont semblables de même que  $AIB$  et  $DIK$ .

2. Montrer que  $IA^2 = IJ \times IK$ .



## 16. Trapèze

---

$ABCD$  est un trapèze de bases  $[AB]$  et  $[CD]$  ; les droites  $(AD)$  et  $(BC)$  se coupent en  $S$  ; les droites  $(AC)$  et  $(BD)$  se coupent en  $K$  ;  $I$  est le milieu de  $[AB]$ ,  $J$  celui de  $[CD]$ .

1. Montrer que les points  $S, I, J$  et  $K$  sont alignés.
2. Application :  $ABC$  est un triangle,  $I, J$  et  $K$  les milieux respectifs des côtés  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[CA]$ . Montrer que les triangles  $ABC$  et  $IJK$  ont le même centre de gravité ; comparer les aires de ces deux triangles.

## 17. Théorème de Menelaüs

---

$ABC$  est un triangle, une droite  $(d)$  coupe les côtés  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$  (éventuellement prolongés) en  $P, Q$  et  $R$ . Le théorème de Menelaüs dit alors que  $\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = 1$ .

1. On peut faire la démonstration comme suit : on appelle  $A', B'$  et  $C'$  les projetés orthogonaux de  $A, B$  et  $C$  sur  $(d)$  et on pose  $AA' = a, BB' = b$  et  $CC' = c$ .

a. Montrer que les triangles  $RBB'$  et  $RAA'$  sont semblables ; montrer de même que les triangles  $QAA'$  et  $QCC'$  sont semblables ainsi que  $PCC'$  et  $PBB'$ .

b. Exprimer les rapports des côtés des triangles semblables en fonction de  $a, b$  et  $c$  et retrouver la relation  $\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = 1$ .

2. La réciproque du théorème est vraie et nous l'admettrons.

a. Construire un triangle  $ABC$  de côtés  $AB = 6, AC = 10$  et  $BC = 14$  (on prendra un centimètre comme unité).

b. Placer les points suivants :  $R$  sur  $(AB)$  tel que  $\overline{AR} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ ,  $Q$  sur  $(AC)$  tel que  $\overline{AQ} = \frac{1}{5}\overline{AC}$  et  $P$  sur  $(BC)$  tel que  $\overline{CP} = \frac{8}{7}\overline{CB}$ .

c. Calculer les longueurs  $AR, BR, BP, CP, CQ$  et  $AQ$  ; en utilisant la réciproque du th. de Menelaüs (si  $\frac{BP}{CP} \cdot \frac{CQ}{AQ} \cdot \frac{AR}{BR} = 1$  alors  $P, Q$  et  $R$  sont alignés) montrer que  $P, Q$  et  $R$  sont alignés.

## 18. Similitude (c)

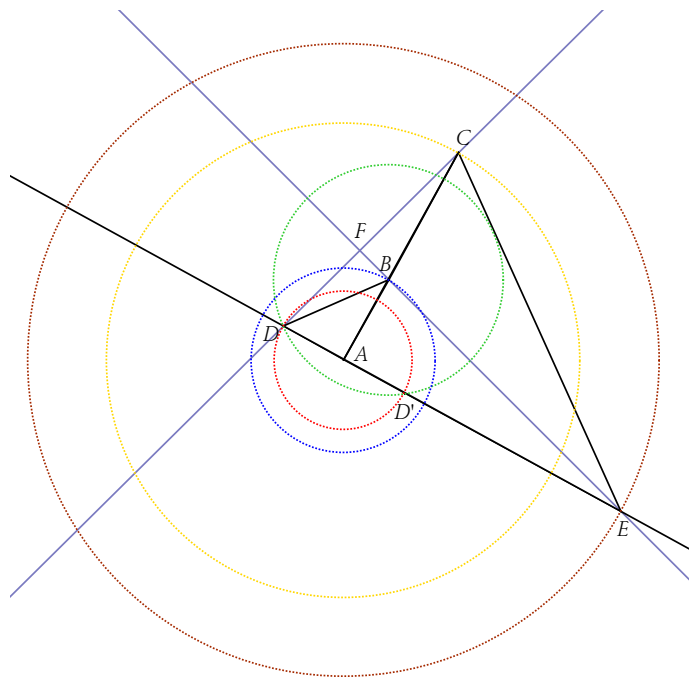
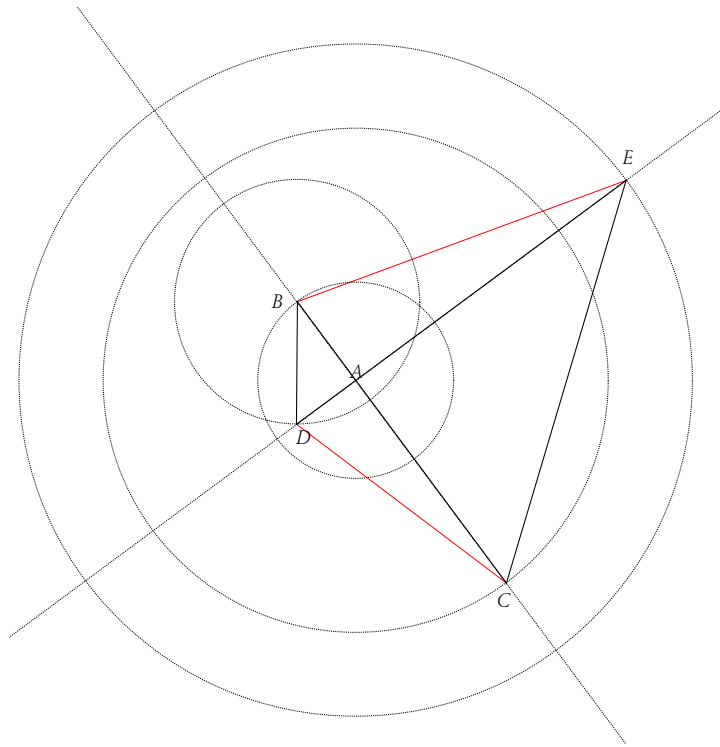
---

$[BC]$  et  $[DE]$  sont deux segments perpendiculaires d'intersection  $A$ .

On donne :  $AB = 28, AD = 21, AC = 72, AE = 96$  et  $BD = 35$ .

1. Les triangles  $ABD$  et  $ACE$  sont semblables. Le prouver et calculer  $CE$ .
2. Trouver tous les angles de même mesure sur la figure.
3.  $(CD)$  et  $(EB)$  se coupent en  $F$ . Montrer que  $ADC$  et  $ABE$  sont semblables.
4. Prouver que les triangles  $DFE$  et  $BFC$  sont semblables. Quel est le coefficient de réduction ou d'agrandissement entre ces deux triangles.

### Correction



1. On a un angle droit en  $A$  pour les deux triangles et deux côtés proportionnels :  $\frac{AD}{AC} = \frac{21}{72} = \frac{7}{24}$ ,  
 $\frac{AB}{AE} = \frac{28}{96} = \frac{7}{24}$ . Les deux triangles sont bien semblables et on a  $\frac{BD}{CE} = \frac{7}{24} \Rightarrow CE = \frac{24}{7} BD = \frac{24}{7} 35 = 120$ .

2. On a évidemment  $\widehat{ADB} = \widehat{ACE}$  et  $\widehat{ABD} = \widehat{AEC}$ .

3. Comme on a déjà l'angle  $\widehat{A}$  égal dans les deux triangles, il suffit de recommencer comme au 1.

$$\begin{cases} A \rightarrow A \\ D \rightarrow B : \frac{AB}{AD} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3}, \frac{AE}{AC} = \frac{96}{72} = \frac{4}{3}, \text{ c'est bon.} \\ C \rightarrow E \end{cases}$$

4. Comme les triangles  $ADC$  et  $ABE$  sont semblables, on a  $\widehat{ADC} = \widehat{ABE}$  et  $\widehat{ACD} = \widehat{AEB}$ , ce qui donne deux angles égaux dans les triangles  $DFE$  et  $BFC$  qui sont donc semblables :  $\begin{cases} F \rightarrow F \\ D \rightarrow B \\ C \rightarrow E \end{cases}$

On calcule alors  $\frac{BE}{DC} = \frac{\sqrt{AB^2 + AE^2}}{\sqrt{AD^2 + AC^2}} = \frac{\sqrt{28^2 + 96^2}}{\sqrt{21^2 + 72^2}} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3}$  (on pouvait s'y attendre).

### 19. Rectangle et triangle semblable (c)

$ABCD$  est un rectangle tel que  $AB = 15$  cm et  $BC = 9$  cm.  $M$  est le point de  $[AD]$  tel que  $AM = 4$  cm.

La droite  $(DE)$  est perpendiculaire à  $(MC)$  et la coupe en  $H$ .

1. a. Montrer que  $ADE = DCH$ .
- b. En déduire que les triangles  $DMC$  et  $AED$  sont semblables.
- c. Montrer alors que  $AE = 3$  cm.
2. a. Calculer  $ME$ .
- b. Démontrer que la droite  $(MC)$  est la médiatrice du segment  $[DE]$ .

#### Correction

1. a. On remarque d'abord que  $\widehat{ADE} = \widehat{MDH}$  et que  $\widehat{MDC} = 90^\circ$  car  $ABCD$  est un rectangle.

Comme  $\widehat{MDC} = \widehat{MDH} + \widehat{HDC}$ , on obtient que  $\widehat{MDH} = 90^\circ - \widehat{HDC}$ .

Dans le triangle  $HDC$  :  $\widehat{DCH} + \widehat{CHD} + \widehat{HDC} = 180^\circ$  soit  $\widehat{DCH} = 90^\circ - \widehat{HDC}$  puisque  $\widehat{DHC}$  est un angle droit.

Donc comme  $\widehat{MDH} = 90^\circ - \widehat{HDC}$  et que  $\widehat{DCH} = 90^\circ - \widehat{HDC}$ , on trouve que  $\widehat{MDH} = \widehat{DCH}$ .

Puis comme  $\widehat{ADE} = \widehat{MDH}$  et que  $\widehat{MDH} = \widehat{DCH}$  alors on obtient bien que  $\widehat{ADE} = \widehat{DCH}$ .

On en déduit aussi que  $\widehat{ADE} = \widehat{DCM}$ .

b. Les triangles  $DMC$  et  $ADE$  ont deux angles égaux deux à deux :  $\widehat{DAE} = \widehat{MDC} = 90^\circ$  et  $\widehat{ADE} = \widehat{DCM}$  comme démontré précédemment. Donc les triangles  $DMC$  et  $ADE$  sont semblables.

c. On en déduit que les côtés de ces triangles sont proportionnels et on a la relation suivante :

$$\frac{DM}{AE} = \frac{DC}{DA} = \frac{MC}{DE}.$$

Ainsi,  $\frac{5}{AE} = \frac{15}{9}$  (puisque  $AD = BC$  et que  $DM = AD - AM = BC - AM = 9 - 4 = 5$ ) ; en utilisant le produit en croix on obtient bien :  $AE = 3$  cm.

2. a. Dans le triangle  $ADE$  rectangle en  $A$  (puisque  $ABCD$  rectangle), on a, avec le théorème de Pythagore :

$$ME^2 = AM^2 + AE^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25.$$

Dont on déduit que  $ME = 5$  cm.

b.  $(MC)$  est la hauteur du triangle  $MDE$  puisque « la droite  $(DE)$  est perpendiculaire à  $(MC)$  et la coupe en  $H$  ».

Or, le triangle  $MDE$  est un triangle isocèle ( $ME = MD$ ) puisque :

$$ME = EM = 5 \text{ cm et } MD = DM = AD - AM = BC - AM = 9 - 4 = 5 \text{ cm.}$$

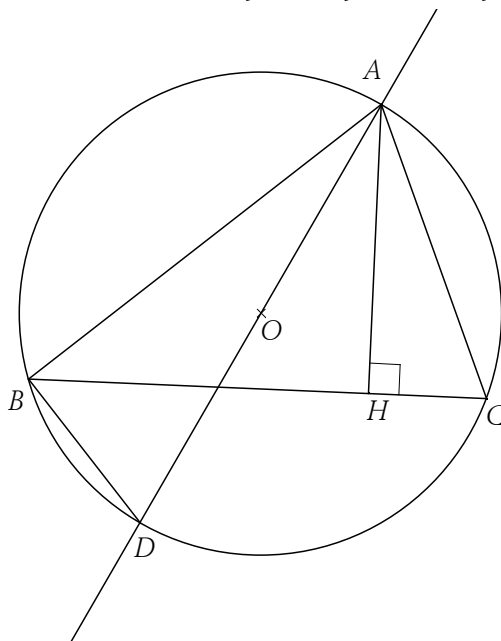
Comme la hauteur issue du sommet principal d'un triangle isocèle est confondue avec la bissectrice, la médiane et la médiatrice du côté opposé, on en déduit que la droite  $(MC)$  est la médiatrice du segment  $[DE]$ .

### 20. Triangles semblables (c)

$(\Gamma)$  est un cercle de centre  $O$  de rayon  $r$ ,  $ABC$  est un triangle inscrit dans  $(\Gamma)$  tel que l'angle  $\widehat{BAC}$  est aigu.  $H$  est le projeté orthogonal de  $A$  sur  $[BC]$ . La droite  $(AO)$  recoupe  $C$  en  $D$  (inutile de refaire la figure).

1. Démontrer que les triangles  $ABD$  et  $AHC$  sont semblables.

2. On pose  $AB = c$ ,  $AC = b$  et  $AH = h$ . Déduire de la question précédente que  $bc = 2rh$ .



### Correction

1. Comme  $[AD]$  est un diamètre du cercle,  $\widehat{ABD} = 90^\circ = \widehat{AHC}$  ; par ailleurs les angles  $\widehat{ACB}$  et  $\widehat{ADB}$  interceptent le même arc de cercle, ils sont égaux.

Les triangles sont donc bien semblables par  $s$  :  $\begin{cases} A \rightarrow A \\ B \rightarrow H \\ D \rightarrow C \end{cases}$ .

2. On pose  $AB = c$ ,  $AC = b$  et  $AH = h$ . Ecrivons les rapports :  $\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AD} = \frac{HC}{BD} \Leftrightarrow \frac{h}{c} = \frac{b}{2r} = \frac{HC}{BD}$ .

Le premier rapport donne  $bc = 2rh$ .

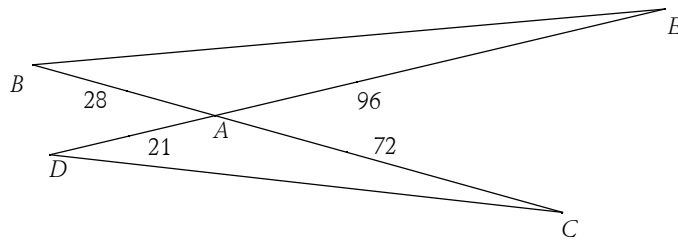
### 21. Triangles semblables

1. Montrer que les triangles  $DAC$  et  $BAE$  ci-dessous sont semblables (les mesures sont en mm :  $AD = 21$ ,  $AC = 72$ ,  $AB = 28$  et  $AE = 96$ ).

Quel est le rapport de similitude ?

2. Quel est le rapport des aires de ces deux triangles ?

3. On admet que  $BE = 110$ . Que vaut la longueur  $DC$  ?



## 22. Triangles semblables

$ABC$  est un triangle tel que  $BC = 27$  mm,  $CA = 48$  mm et  $AB = 36$  mm.

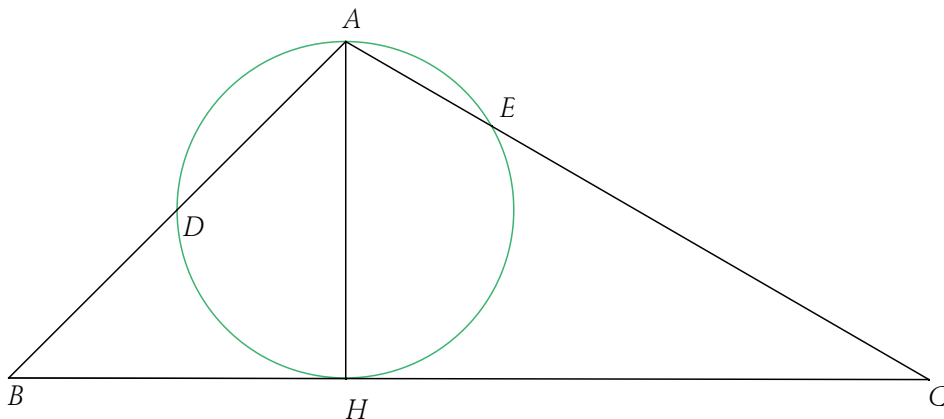
On place le point  $D$  sur le côté  $[AB]$  tel que  $AD = 16$  mm et  $E$  sur le côté  $[AC]$  tel que  $AE = 12$  mm.

1. Démontrer que les triangles  $ABC$  et  $AED$  sont semblables. En déduire deux égalités d'angles.
2. Quel est le rapport d'agrandissement pour transformer le triangle  $AED$  en  $ABC$  ?
3. Calculer la longueur  $DE$ .
4. Les droites  $(BC)$  et  $(DE)$  se coupent en  $F$ .
  - a. Démontrer que les triangles  $FBD$  et  $FEC$  sont semblables (on pourra utiliser une égalité d'angles obtenue au 1.).
  - b. Quel est le rapport de réduction pour transformer le triangle  $FEC$  en  $FBD$  ?

## 23. Sinus de $75^\circ$

Sur la figure ci-dessous,  $ABC$  est un triangle,  $H$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $(BC)$ ,  $\widehat{BAH} = 45^\circ$ ,  $\widehat{HAC} = 30^\circ$  et  $AH = 6$  cm.

Le cercle  $(C)$  de diamètre  $[AH]$  et de centre  $O$  coupe  $(AB)$  en  $D$  et  $(AC)$  en  $E$ .



1. a. Calculer  $AB$  et  $AC$ .
- b. Montrer que  $AHE$  est un triangle rectangle.
- c. Montrer que  $AE = 3\sqrt{3}$  cm.
2. a. Démontrer que  $\widehat{AHE} = \widehat{ADE} = 60^\circ$  et  $\widehat{ACB} = 60^\circ$ .
- b. En déduire que les triangles  $BAC$  et  $EAD$  sont semblables.
- c. Après avoir rempli le tableau de proportionnalité des longueurs, déduisez-en que le rapport de similitude qui fait passer du triangle  $BAC$  au triangle  $EAD$  est  $\frac{\sqrt{6}}{4}$ . S'agit-il d'une réduction ou d'un agrandissement ? Expliquer.

3. a. Calculer  $BC$  (on pourra couper par  $H$ ).
- b. Déduez-en que  $DE = \frac{3}{2} \times (\sqrt{6} + \sqrt{2})$  cm.
4. On note  $F$  le point diamétralement opposé à  $D$  sur  $C$ .
- a. Démontrer que  $\widehat{DFE} = 75^\circ$ .
- b. Déduez-en que  $\sin 75^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} + 1)$ .

#### 24. Configurations dans un cercle 1

Soit un triangle  $ABC$  inscrit dans un cercle  $\mathcal{C}$ .

$H$  est le point de concours des hauteurs du triangle  $ABC$ .

$D$  est le point diamétralement opposé à  $B$  dans le cercle  $\mathcal{C}$ .

1. Montrer que les droites  $(AD)$  et  $(CD)$  sont respectivement perpendiculaires aux droites  $(AB)$  et  $(BC)$ .
2. Démontrer que le quadrilatère  $AHCD$  est un parallélogramme.

#### 25. Configurations dans un cercle 2

Soit un cercle  $\mathcal{C}$  et trois points  $I, J$  et  $K$  de ce cercle. Tracer la médiatrice  $D_1$  du segment  $[IJ]$  et la médiatrice  $D_2$  du segment  $[JK]$ ,  $O$  est le point d'intersection des médiatrices, montrer que  $O$  est le centre du cercle  $\mathcal{C}$ .

#### 26. Configurations dans un cercle 3

Soit un triangle  $ABC$  rectangle en  $A$ , et  $I$  le milieu de  $[BC]$ .

Le cercle de diamètre  $[AI]$  coupe  $[AB]$  en  $E$  et  $[AC]$  en  $F$ .

1. Démontrer que  $AFIE$  est un rectangle.
2. En déduire la position exacte de  $E$  sur  $[AB]$  et de  $F$  sur  $[AC]$ .
3. Montrer que  $(EF)$  est parallèle à  $(BC)$ .

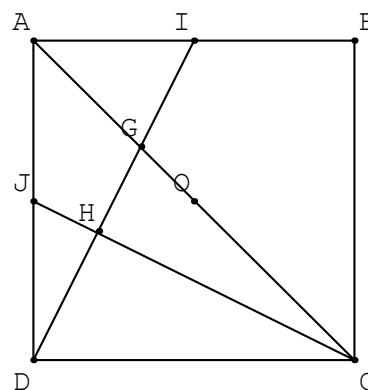
#### 27. Aires dans un carré (1)

$ABCD$  est un carré de centre  $O$  et de côté  $a$ .

$I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $J$  est le milieu de  $[AD]$ .

$(DI)$  coupe  $(CJ)$  en  $H$  et  $(AC)$  en  $G$ .

1. a. Montrer que les triangles  $ADI$  et  $DCJ$  sont isométriques.
- b. Que peut-on dire des angles  $\widehat{ADI}$  et  $\widehat{DCJ}$ ? Justifier.
- c. En déduire que  $\widehat{HDC} + \widehat{DCH} = 90^\circ$  et que les droites  $(DI)$  et  $(CJ)$  sont perpendiculaires.
2. a. Calculer  $ID$  en fonction de  $a$ .
- b. Démontrer que les triangles  $DHJ$  et  $DAI$  sont des triangles semblables.



c. En déduire que  $\frac{JD}{ID} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

d. Soit  $\mathcal{A}_1$  l'aire du triangle  $DHJ$  et  $\mathcal{A}_2$  l'aire du triangle  $DAI$ .

En utilisant les questions b. et c. déterminer  $\mathcal{A}_1$  en fonction de  $\mathcal{A}_2$ . En déduire  $\mathcal{A}_1$  en fonction de  $a$ .

3. a. Démontrer que  $G$  est le centre de gravité du triangle  $ADB$  et calculer  $AG$  en fonction de  $a$ .

b. Soit  $\mathcal{A}_3$  l'aire du triangle  $DAG$ . Justifier que  $\mathcal{A}_3 = \frac{1}{2} AG \times DO$  puis calculer  $\mathcal{A}_3$  en fonction de  $a$ .

4. Soit  $\mathcal{A}_4$  l'aire de JHGA. Dédurre des questions précédentes que  $\mathcal{A}_4 = \frac{7}{60} a^2$ .

### 28. Aires dans un carré (2)

ABCD est un carré de centre  $O$  et de côté  $a$  ;  $I$  est le milieu de  $[AB]$  et  $J$  celui de  $[AD]$  ; la droite  $(DI)$  coupe  $(CJ)$  en  $H$  et  $(AC)$  en  $G$ .

1. Démontrer que  $\widehat{ADI} = \widehat{DCJ}$  ; en déduire que  $(DI)$  est orthogonale à  $(CJ)$ .

2. Montrer que les triangles  $DHJ$  et  $DAI$  sont semblables ; en déduire que l'aire de  $DHJ$  est  $\frac{1}{20} a^2$ .

3. Que représente  $G$  pour le triangle  $ADB$  ? Montrer que  $AG = \frac{a\sqrt{2}}{3}$  et que l'aire de  $DAG$  est  $\frac{a^2}{6}$ . Dédurre des questions précédentes l'aire de  $JHGA$ .

### 29. Triangle rectangle (1)

Dans un triangle  $ABC$  la bissectrice de l'angle  $\hat{A}$  coupe  $[BC]$  en  $I$ , la perpendiculaire à  $(AI)$  issue de  $B$  coupe  $(AI)$  en  $H$ , la perpendiculaire à  $(AI)$  issue de  $C$  coupe  $(AI)$  en  $K$ .

1. Montrer que les triangles  $ACK$  et  $ABH$  sont semblables puis que les triangles  $IKC$  et  $IHB$  sont semblables.

2. En déduire que  $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$ . On suppose que  $AB = 7, BC = 8, AC = 9$  ; calculer  $IB$ .

### 30. Triangle rectangle (2)

$ABC$  est un triangle dont le pied de la hauteur issue de  $A$  est  $H$  et tel que  $\widehat{BAH} = 45^\circ, \widehat{HAC} = 30^\circ, AH = a$ . Le cercle  $(\mathcal{C})$  de diamètre  $[AH]$  coupe  $(AB)$  en  $D$  et  $(AC)$  en  $E$ . Toutes les mesures seront exprimées en fonction de  $a$ .

1. Calculer  $AB, AC$  et  $AE$ .

2. Montrer que  $BAC$  et  $EAD$  sont semblables ; trouver le rapport de similitude entre ces deux triangles.

3. Calculer  $BC$ , en déduire  $DE$ .

4. Soit  $F$  le point de  $(\mathcal{C})$  diamétralement opposé à  $D$ . Déterminer une mesure de l'angle  $\widehat{DFE}$  et donner la valeur exacte du sinus de cet angle.

### 31. Pentagone et nombre d'or

Construction du pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle de centre  $O$  et rayon  $r$ , ayant un sommet  $A$  donné.

#### 31-a : Angles et côtés

1. L'angle au centre du Pentagone régulier est de  $72^\circ$  ou  $\frac{2\pi}{5}$  rad et l'angle intérieur de  $108^\circ$  ou  $\frac{3\pi}{5}$  rad.

2. Si  $a$  est la longueur du côté,  $d$  la longueur d'une diagonale et  $r$  le rayon du cercle circonscrit, on a :

$$a = 2r \sin \frac{\pi}{5} = \frac{r}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = r\sqrt{3 - \Phi} \approx 1,176r ;$$

$$d = \frac{r}{2} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} = r\sqrt{2 + \Phi} \approx 1,902r .$$

Consignes et questions

Faire la construction dans un cercle trigonométrique.

Mesurer  $a$  et  $d$  sur la figure et effectuer les vérifications numériques des affirmations.

Le rapport diagonale/côté est égal au nombre d'or  $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

### 31-b : Construction dite de Ptolémée

1. Pour construire un pentagone à la « règle et au compas » il suffit de savoir construire un angle au centre dont le cosinus est égal à  $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ .

2. Pour un pentagone inscrit dans un cercle de centre  $O$ , ayant un sommet  $A$  donné on peut effectuer la construction suivante :

Tracer un cercle  $C_1$  de centre  $O$ , passant par  $A$ . Placer  $[AA']$  un diamètre et  $[OB']$  un rayon perpendiculaire à  $[AA']$ .

$K$  est le milieu du rayon  $[OA']$ , le cercle  $C_2$  de centre  $K$  et de rayon  $KB'$  coupe le segment  $[OA]$  en  $U$ .

La médiatrice de  $[OU]$  passe par le milieu  $I$  de  $[OU]$  et coupe le premier cercle  $C_1$  aux points  $B$  et  $E$  qui sont deux sommets du pentagone. Le cercle de centre  $B$  passant par  $A$  recoupe  $C_1$  en  $C$ . La symétrique  $D$  de  $C$  par rapport à  $(AA')$  termine la construction du pentagone.

3. On trace les diagonales du pentagone :  $(AC)$ ,  $(BD)$ ,  $(CE)$ ,  $(DA)$ ,  $(EB)$ . La figure obtenue s'appelle un pentagramme. Les points d'intersection de ces droites dessinent un nouveau polygone.

$A, C, E, B, D$  dans cet ordre sont les sommets d'un polygone régulier étoilé appelé pentagramme. Ce pentagramme de Pythagore était le sceau secret de reconnaissance de la secte des Pythagoriciens dont les francs-maçons ont repris certains thèmes.

### 31-c : Méthode des cercles tangents

Placer deux points  $O, A$  et le cercle  $C_1$  de centre  $O$ , de rayon  $r$ , passant par  $A$ .  $A'$  est le symétrique de  $A$  par rapport à  $O$ .  $I$  est le milieu d'un rayon perpendiculaire au diamètre  $[AA']$ .

$C_2$  est le cercle de centre  $I$  et de rayon  $\frac{r}{2}$ . La droite  $(A'I)$  coupe le cercle  $C_2$

en  $P$  et  $Q$ .  $C_3$  et  $C_4$  sont les cercles de centre  $A'$  tangents à  $C_2$ . Le cercle  $C_3$  est tangent intérieurement au cercle  $C_2$  en  $P$  et le cercle  $C_4$  est tangent extérieurement au cercle  $C_2$  en  $Q$ . Le cercle  $C_3$  coupe  $C_1$  en  $B$  et  $E$  et le cercle  $C_4$  coupe  $C_1$  en  $C$  et  $D$ . Les points  $ABCDE$  sont les sommets du pentagone cherché.

Alexandrie 85-165 après J.-C.

Vérifier numériquement que

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Faire la figure. On prendra  $O$  à l'origine et  $A$  au point  $(1, 0)$ .

Montrer que

$$OI = \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

On note  $J$  le point d'intersection de  $(CD)$  et  $(AA')$ .

Que vaut  $OJ$  ?

De quels angles l'abscisse de  $J$  est-elle le cosinus ?

Faire une nouvelle figure.

Est-ce encore un vrai pentagone régulier ?

On rappelle que deux cercles sont tangents en un point  $M$  si les tangentes aux cercles en  $M$  sont identiques.

Faire la figure. Et effectuer les mesures nécessaires permettant de vérifier que l'on a bien un pentagone régulier.



### 31-d : Construction de Dürer

« Albert Dürer (né à Nuremberg en 1471, mort en 1528) appartient, comme Léonard de Vinci, à cette génération de grands artistes, peintres, sculpteurs et architectes, pour lesquels la géométrie est non seulement un instrument d'analyse, mais un puissant moyen de perfectionnement. L'étude de la perspective le conduisit à la transformation des figures en d'autres figures du même genre. Et de là naquirent plusieurs méthodes géométriques, comme celle qui consiste à faire croître proportionnellement les ordonnées des points d'une figure, dans le dessin d'un profil dont on veut rendre les dimensions en hauteur plus facilement appréciables. Dürer maniait très habilement le compas pour tracer des ellipses et d'autres figures géométriques. Le pentagone de Dürer est un pentagone, construit avec une seule ouverture de compas ; mais d'autres géomètres ont démontré depuis que ce pentagone n'a pas tous les angles égaux et que sa figure n'est qu'approximative.»

Source : Ferdinand Hoefler, Histoire des mathématiques, Paris, Hachette, 1874, p. 337

Placer deux points  $A$  et  $B$ .

A partir de ce segment  $[AB]$  qui sera un côté du pentagone on trace cinq cercles de même rayon : le cercle de centre  $A$  passant par  $B$ , celui de centre  $B$  passant par  $A$ . Ces deux cercles se coupent en  $P$  et  $Q$ . Le cercle de centre  $P$  passant par  $A$  (et par  $B$ ) coupe les deux premiers cercles en  $R$  et  $S$ , et le segment  $[PQ]$  en  $G$ .

La droite  $(SG)$  coupe le premier cercle en  $E$  et  $(RG)$  coupe le deuxième cercle en  $C$ . Le dernier point  $D$  se trouve à l'intersection des cercles de centre  $E$  passant par  $A$  et de centre  $C$  passant par  $B$ .

### 31-e : Les étoiles de Compostelle

Placer deux points libres  $M$  et  $N$ , puis le carré  $MNPQ$ . Le cercle de centre  $M$  passant par  $P$  coupe la demi-droite  $[MN)$  en  $O$ . La droite  $(OQ)$  coupe la diagonale  $[MP]$  du carré en  $C$ . Le cercle de centre  $O$  passant par  $C$  coupe  $[MN)$  en  $B$ .  $[BC]$  est un premier côté du pentagone.

Le cercle de centre  $B$  passant par  $C$  coupe  $[NM)$  en  $A$ , point du pentagone. Le cercle de centre  $C$  passant par  $B$  coupe  $[CQ)$  en  $D$ , quatrième point du pentagone. On termine le pentagone en trouvant l'intersection  $E$  des cercles de même rayon de centres  $A$  et  $D$ . Le pentagone  $ABCDE$  a ses cinq côtés égaux. L'erreur sur les angles est de un à deux degrés.

Faire la construction.

Le pentagone  $ABCDE$  est-il régulier ? A-t-il ses angles égaux ?

Construire un vrai pentagone régulier  $ABC'D'E'$  de côté  $[AB]$ . Que peut-on dire de  $D$  et  $D'$  ?

Faire la construction.

Quelle est l'erreur sur les angles ?