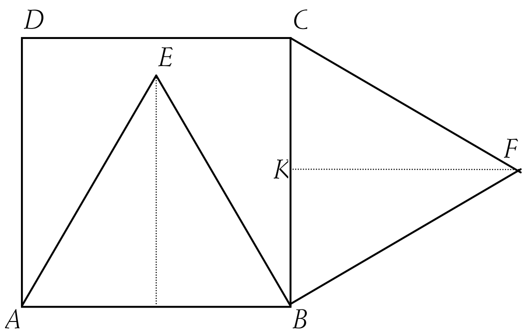
Classe de Seconde

Géométrie classique

1. Figures de base 1



$ABCD$ est un carré de côté 1, les triangles ABE et BCF sont équilatéraux.

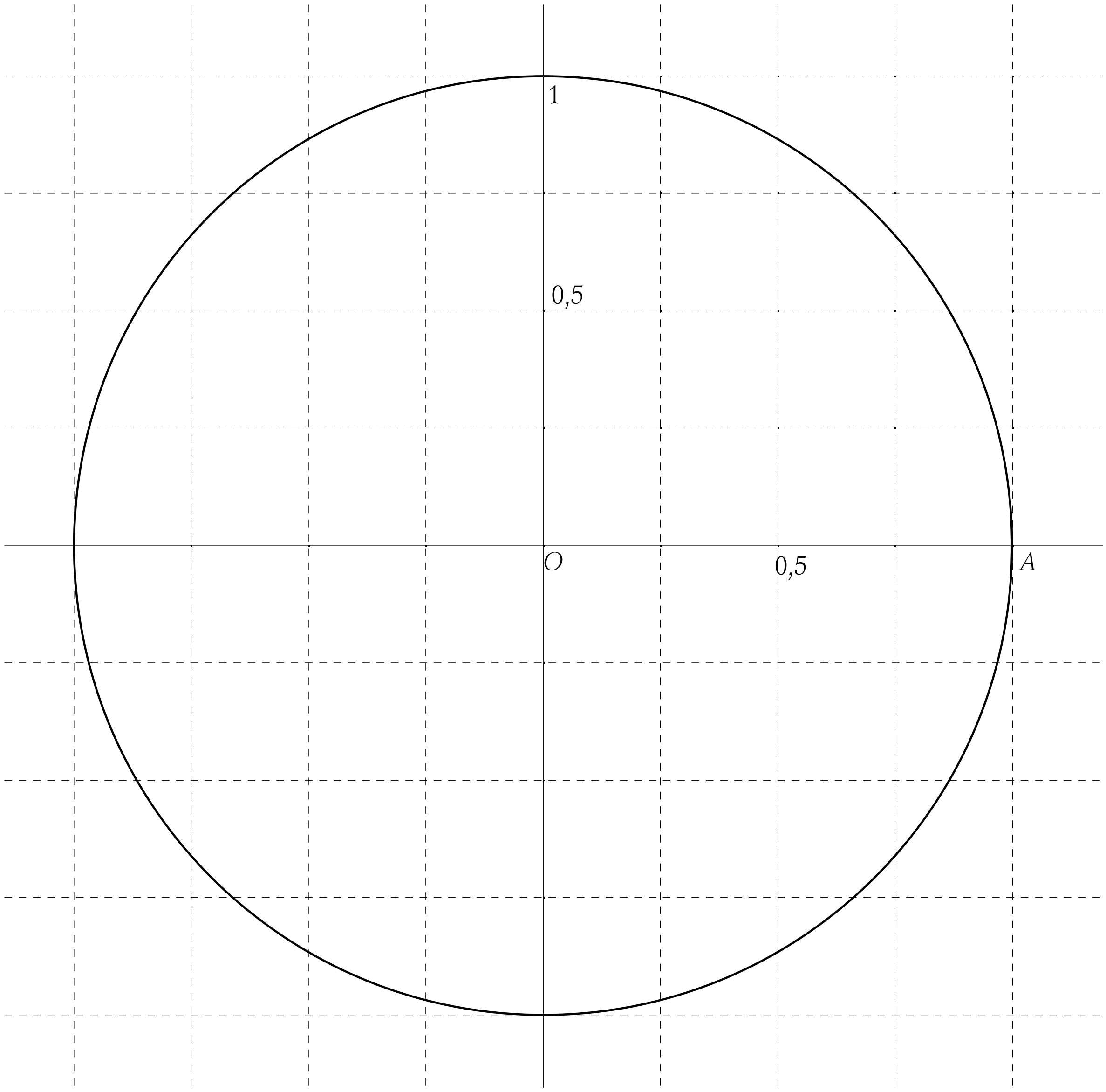
H et K sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BC]$.

On rappelle que la somme des angles d'un triangle est de 180°.

Evaluer l'angle $\widehat{DEA}$ puis $\widehat{AEB}$, puis $\widehat{BEF}$.

Que vaut $\widehat{DEF}$? Que dire des points D, E et F ?

2. Radians et degrés



1. Placer sur le cercle trigonométrique ci-dessus les points suivants :

M_1 tel que $\widehat{AOM_1}=\dfrac{\pi}{6}$, M_2 tel que $\widehat{AOM_2}=\dfrac{3\pi}{4}$, M_3 tel que $\widehat{AOM_3}=-\dfrac{2\pi}{3}$, M_4 tel que $\widehat{AOM_4}=-\dfrac{5\pi}{2}$,

M_5 tel que $\widehat{AOM_5}=\dfrac{5\pi}{6}$, M_6 tel que $\widehat{AOM_6}=-3\pi$, M_7 tel que $\widehat{AOM_7}=-\dfrac{\pi}{3}$, M_8 tel que $\widehat{AOM_8}=-\dfrac{11\pi}{4}$.

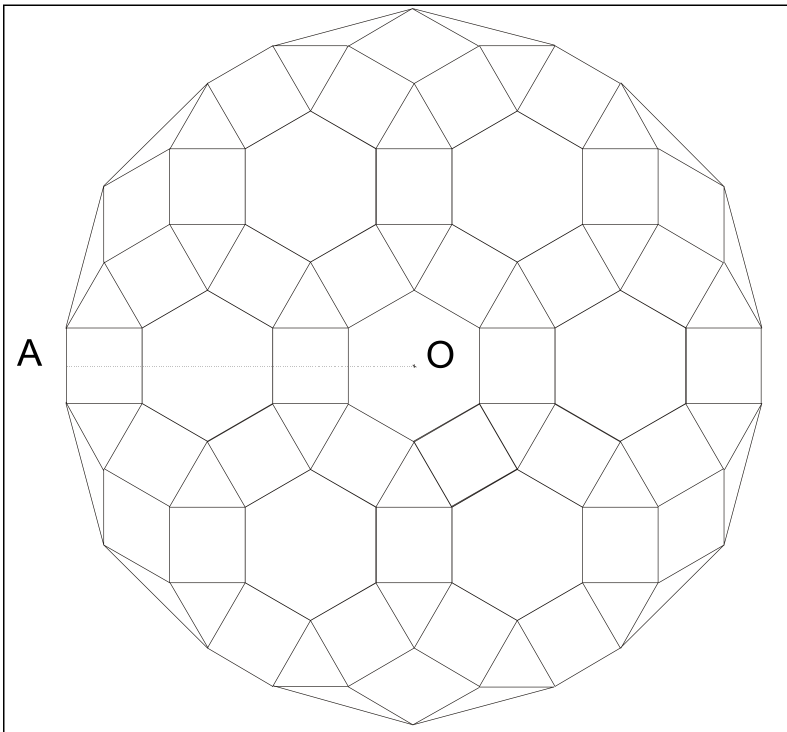
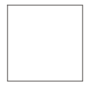
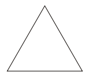
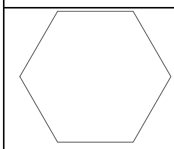
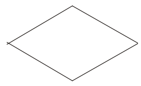
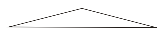
2. Je dis que les points N_1 tel que $\widehat{AON_1}=-\dfrac{17\pi}{6}$ et N_2 tel que $\widehat{AON_2}=570°$ sont diamétralement opposés sur le cercle. Ai-je raison ?

3. La Rosace du Temple de Diane (Nîmes)

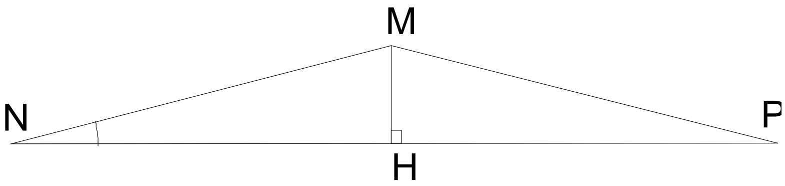
La rosace du temple de Diane est composée de polygones réguliers dont les côtés ont même longueur, et de douze triangles isocèles.

Les sommets extérieurs de cette figure étant quasiment situés sur un cercle, on peut prendre comme valeur approchée par défaut du rayon de ce cercle la distance OA.

Pour les calculs, on supposera que la valeur commune des côtés des polygones réguliers est 1.

<table>
<tr><td rowspan="5">
</td><td></td><td>Aire du carré =</td></tr>
<tr><td></td><td>Aire du triangle équilatéral =</td></tr>
<tr><td></td><td>Aire de l'hexagone =</td></tr>
<tr><td></td><td>Aire du losange =</td></tr>
<tr><td></td><td>Aire du triangle isocèle = ¿</td></tr>
</table>

Pour calculer l'aire d'un triangle isocèle, on cherchera son angle au sommet, puis la mesure de sa base et de sa hauteur :



$\widehat{NMP} =$
$\widehat{NMH} =$
$\widehat{MNH} =$
$MH =$ $\qquad\qquad$ $NH=$
$NP =$
Aire de MNP =

1. Calculer l'aire de la Rosace. En prenant cette aire comme aire du disque de rayon OA, déterminer une valeur approchée p de π .

2. Calculer le périmètre de la Rosace. En utilisant ce périmètre comme valeur de la circonférence de rayon OA, déterminer une valeur approchée p' de π .

4. Triangles aires et longueurs

Une unité de longueur étant choisie, on considère un triangle ABC tel que : AB = 5, AC = 4 et BAC = 60°.

On se propose de calculer la longueur BC et les deux angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$.

1. Soit H le pied de la hauteur issue de C. Calculer les valeurs exactes des longueurs CH et AH. En déduire la longueur BH.

2. Calculer la valeur exacte de la longueur BC, puis une valeur approchée à 0,01 prés .

3. Calculer la valeur exacte de $\cos\widehat{ABC}$, puis donner une valeur approchée de l'angle $\widehat{ABC}$ en degrés à 0,1° prés par défaut. En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{ACB}$.

5. Problème de construction

Sur une droite Δ , on considère 3 points B, H et C dans cet ordre (ne pas placer H au milieu de [BC]).

On veut construire un point A tel que ABC soit rectangle en A et [AH] soit hauteur de ABC.

1. Indiquer en justifiant sur quelles lignes doit se trouver A. Réaliser la construction.

2. Combien y a-t-il de solutions ?

3. Peut-on construire A si H n'appartient pas à [BC] ? Pourquoi ?

6. Triangle rectangle (c)

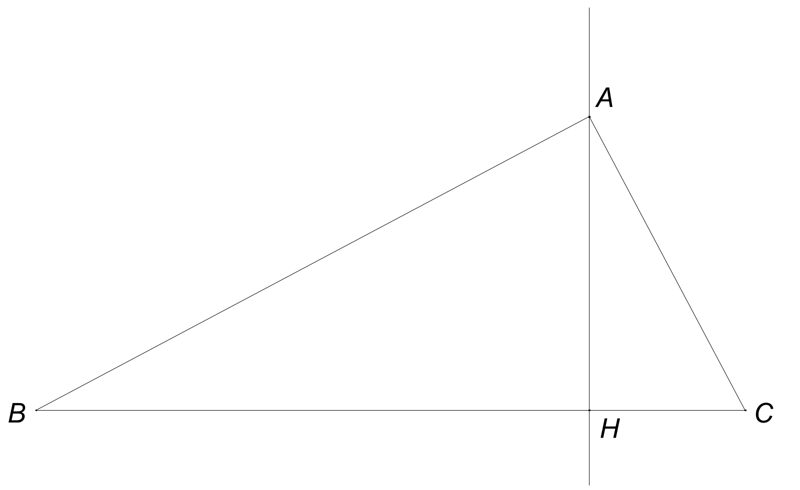
ABC est un triangle rectangle en A, H le pied de la hauteur issue de A.

1. En écrivant de deux façons le cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$, montrer que $BA^2 = BH \times BC$. De même montrer que $CA^2 = CH \times BC$

2. En écrivant $BC = BH + CH$ et en utilisant Pythagore dans ABC ainsi que les relations précédentes montrer que $AH^2 = BH \times CH$.

3. Montrer que $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$.

4. On applique les relations précédentes au triangle ABC où $AB = 6$ et $AC = 8$. Calculer BC, HB, HC et HA on pourra utiliser la relation du 3. même si elle n'est pas démontrée…).



Correction

1. $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{AB}{BC}$; on a $\widehat{ABC} = \widehat{ABH}$ donc $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{BH}{AB}$ d'où $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{BH}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BH \times BC$.

En refaisant la même chose avec l'angle $\widehat{ACB}$ on obtient la deuxième relation ;

2. Avec Pythagore : $AB^2 + AC^2 = BC^2 = (BH + HC)^2 = BH^2 + CH^2 + 2BH \times CH$ et en développant AB^2 et AC^2 dans les triangles AHB et AHC : $AB^2 + AC^2 = AH^2 + HB^2 + AH^2 + HC^2$; on a donc après égalité et simplification : $AH^2 = BH \times CH$.

3. Essayons de travailler la relation proposée pour voir ce que l'on en tire :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{AC^2 + AB^2}{AB^2 AC^2} = \frac{BC^2}{AB^2 AC^2} \Leftrightarrow \frac{1}{AH} = \frac{BC}{AB \times AC} \Leftrightarrow AB \times AC = AH \times BC$$

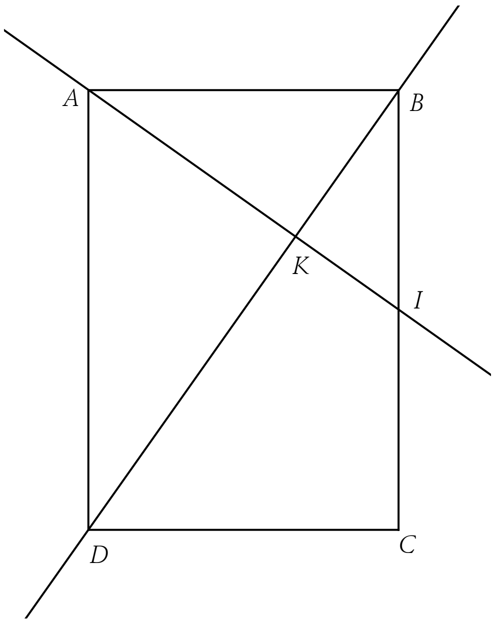
Un produit représente souvent une aire… mais oui, ça y est, c'est l'aire du triangle ABC ! (enfin le double de l'aire plutôt.) Et l'autre produit ? C'est pareil puisque AH est la hauteur et BC la base. Nous avons simplement deux expressions de l'aire de ABC, cette égalité est donc vraie et la relation de départ également.

4. Pour BC on fait Pythagore, ce qui donne $BC = 10$; avec $BA^2 = BH \times BC$ on a $BH = \dfrac{BA^2}{BC} = \dfrac{36}{10} = 3{,}6$ et avec $CA^2 = CH \times BC$ on a $CH = 6{,}4$; on termine avec $AH^2 = BH \times CH = \dfrac{36}{10}.\dfrac{64}{10}$ d'où $AH = 4{,}8$. On pouvait aussi utiliser la relation du 3. (à vous de jouer…).

7. Rectangle (c)

Soit un rectangle *ABCD* tel que *AB* = 1 et $BC=\sqrt{2}$. Soit *I* le milieu du côté *BC*. Démontrer que les droites (*AI*) et (*BD*) sont perpendiculaires.

Correction



Les triangles *AKB* et *KBI* sont semblables car ils ont les mêmes angles ; le rapport de similitude est $\frac{BI}{AD}=\frac{1}{2}$

donc $KI=\frac{1}{2}AK\Rightarrow 3KI=AI\Rightarrow KI=\frac{1}{3}AI=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$ car $AI^2=AB^2+BI^2=1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{3}{2}\Rightarrow AI=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Même chose pour *BK* : $BK=\frac{1}{3}BD=\frac{1}{3}\sqrt{3}$ car $DB^2=AD^2+AB^2=3\Rightarrow DB=\sqrt{3}$.

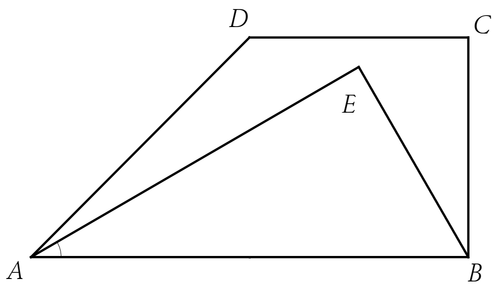
Il reste à vérifier Pythagore : $IK^2+BK^2=\frac{1}{9}\times\frac{3}{2}+\frac{1}{9}\times 3=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$, or $BI=\frac{1}{2}\sqrt{2}\Rightarrow BI^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

8. Trapèze

ABCD est un trapèze rectangle tel que *AB* = 2, *BC* = 1 et $\widehat{BAD}=45°$. *AEB* est un triangle rectangle en *E* tel que $\widehat{BAE}=30°$ (inutile de refaire la figure).

a. Calculer les longueurs *AD*, *DC*, *AE* et *EB*.

b. Calculer l'aire du trapèze *ABCD*, du triangle *AEB*, du triangle *BEC*, et en déduire celle du quadrilatère *ADCE*.



9. Puissance d'un point (1)

1. Soit un point A extérieur à un cercle (C) de centre O, de rayon R. Deux doites issues de A coupent (C) repectivement en M et N ainsi que M' et N'.

Montrer que les triangles AMN' et $AM'N$ sont semblables.

Déduisez-en que $AM.AN = AM'.AN' = AO^2 - R^2 = AT^2$ où T est le point de contact d'une des tangentes à (C) issues de A.

2. On construit deux cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O' et de rayons R et R'. Ces cercles sont sécants en A et B. Soit P un point de (AB), T et T' les points de contact des tangentes à (C) et (C') issus de P.

a. Montrez que $PA.PB = PT^2 = PT'^2$.

b. Déduisez-en que si on considère tous les cercles passant par A et B alors les centres de ces cercles sont sur une droite (que l'on précisera) et les points T sont sur un cercle (que l'on précisera également).

10. Puissance d'un point (2)

Deux cercles ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}'$) de centres O et O' se coupent en A et B ; une droite (d) passant par B coupe ($\mathcal{C}$) en M et ($\mathcal{C}'$) en M'.

1. Montrer que (OO') est la médiatrice de $[AB]$. En déduire que $\widehat{AMB} = \widehat{AOO'}$.

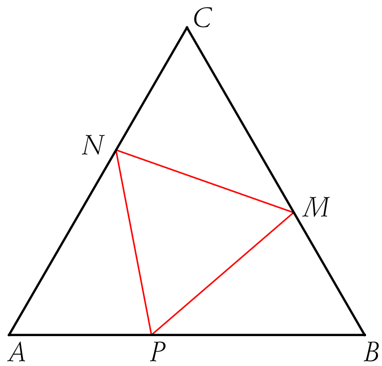
2. Montrer que les triangles OAO' et MAM' sont semblables. En déduire que le rapport $\dfrac{AM}{AM'}$ est indépendant du choix de la droite (d).

11. Triangle équilatéral (c)

ABC est un triangle équilatéral, M, N, P sont des points de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ tels que $BM = CN = AP$.

1. Démontrer que les triangles BMP, CNM et NAP sont tous isométriques.

2. En déduire que MNP est équilatéral.



Correction

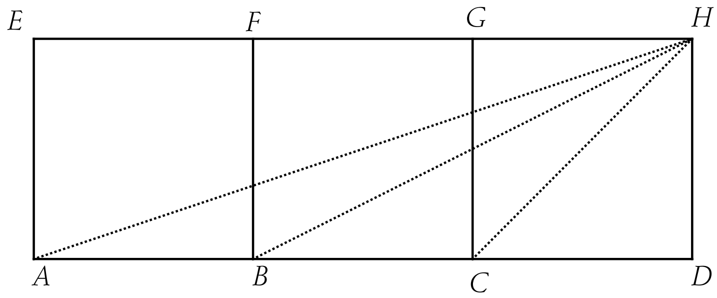
1. Les angles en A, B et C sont égaux à 60°, par ailleurs $BM = CN = AP = x$ donc

$$CM = AN = BP = \text{côté du triangle} - x.$$

Les triangles ayant deux côtés égaux et un angle égal sont isométriques.

2. Puisqu'ils sont isométriques leurs troisièmes côtés sont tous égaux : $PM = MN = NP$ donc MNP est équilatéral.

12. Carrés 1



On se donne trois carrés accolés de côté 1 comme sur la figure.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-2} près des angles $\widehat{DCH}$, $\widehat{DBH}$ et $\widehat{DAH}$.

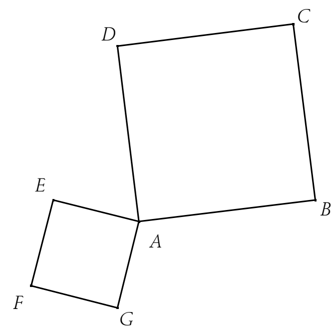
2. Montrez que les triangles AFH et HCB sont semblables en utilisant les longueurs des côtés.

3. Déduisez-en que $\widehat{CBH}=\widehat{AHF}$ puis que $\widehat{HAD}+\widehat{HBC}=45°$.

13. Carrés 2 (c)

$ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés (voir figure ci-contre).

Montrer que DG = EB et que les droites (DG) et (EB) sont perpendiculaires.



Correction

Si on considère la rotation de centre A et d'angle 90° (ou $\frac{\pi}{2}$), on envoie B sur D et E sur G. La rotation est une isométrie, elle conserve les distances, par conséquent la distance de départ BE devient la distance d'arrivée DG et $BE=DG$; de même l'angle entre les segments de départ [BE] et d'arrivée [DG] est l'angle de rotation, soit 90° (ou $\frac{\pi}{2}$).

14. Carrés 3 (c)

Deux carrés $ABCD$ et $AEFG$ ont en commun le point A, (AD) est perpendiculaire à (AG). Soit I le milieu de [GD] et H le point d'intersection de (AI) et (BE). On pose $\widehat{GDA}=\alpha$ et $\widehat{DGA}=\beta$.

On souhaite montrer que (IH) et (BE) sont perpendiculaires.

Vous complèterez la figure ci-dessous.

1. a. Montrez que les triangles ADG et ABE sont isométriques.

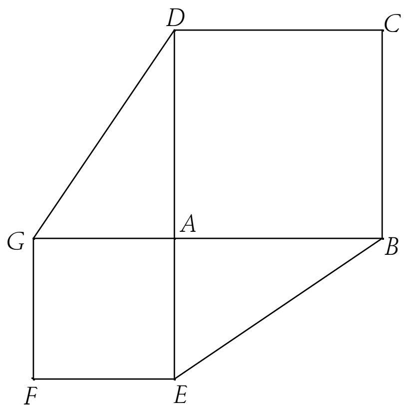
   b. Quelles sont alors les mesures des angles $\widehat{ABE}$ et $\widehat{AEB}$?

2. a. Expliquez pourquoi A est sur le cercle de diamètre [GD].

   b. En déduire que le triangle ADI est isocèle puis que l'angle $\widehat{EAH}=\alpha$.

3. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{AHE}$? Expliquer (on pourra utiliser la valeur de $\alpha+\beta$).

4. Conclure.



Correction

1. a. ADG et ABE sont isométriques : $AG = AE$, $AD = AB$ puisqu'on a des carrés ; l'angle en A est droit dans les deux cas.

b. Les correspondances d'angles sont alors $\widehat{ABE} = \widehat{GDA} = \alpha$ et $\widehat{AEB} = \widehat{DGA} = \beta$.

2. a. Le triangle AGD est rectangle en A donc GD est l'hypothénuse et AGD est dans un cercle de diamètre $[GD]$.

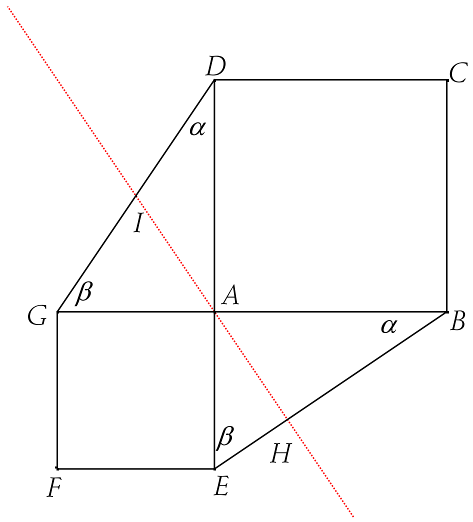
b. On a donc $ID = IG = IA$ donc le triangle ADI est isocèle de sommet I et $\widehat{EAH} = \widehat{DAI} = \widehat{ADI} = \alpha$.

3. Puisqu'on a $\alpha + \beta + 90° = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$ dans ADG, on a

$$\widehat{AHE} = 180° - \widehat{ABH} - \widehat{AEH} = 180° - \alpha - \beta = 180° - 90° = 90°$$

dans ABE.

4. Conclusion : AH est orthogonale à (BE).



15. Parallélogramme

Soit $ABCD$ un parall élogramme, I est un point donné de (BD), (AI) coupe (BC) en J et (DC) en K.

1. Montrez que les triangles AID et BIJ sont semblables de même que AIB et DIK.

2. Montrer que $IA^2 = IJ \times IK$.

16. Trapèze

ABCD est un trapèze de bases [*AB*] et [*CD*] ; les droites (*AD*) et (*BC*) se coupent en *S* ; les droites (*AC*) et (*BD*) se coupent en *K* ; *I* est le milieu de [*AB*], *J* celui de [*CD*].

1. Montrer que les points *S*, *I*, *J* et *K* sont alignés.

2. Application : *ABC* est un triangle, *I*, *J* et *K* les milieux respectifs des côtés [*AB*], [*BC*] et [*CA*]. Montrer que les triangles *ABC* et *IJK* ont le même centre de gravité ; comparer les aires de ces deux triangles.

17. Théorème de Menelaüs

ABC est un triangle, une droite (d) coupe les côtés (*BC*), (*AC*) et (*AB*) (éventuellement prolongés) en *P*, *Q* et *R*. Le théorème de Menelaüs dit alors que $\frac{BP}{CP}.\frac{CQ}{AQ}.\frac{AR}{BR}=1$.

1. On peut faire la démonstration comme suit : on appelle *A'*, *B'* et *C'* les projetés orthogonaux de *A*, *B* et *C* sur (d) et on pose *AA'* = *a*, *BB'* = *b* et *CC'* = *c*.

a. Montrer que les triangles *RBB'* et *RAA'* sont semblables ; montrer de même que les triangles *QAA'* et *QCC'* sont semblables ainsi que *PCC'* et *PBB'*.

b. Exprimer les rapports des côtés des triangles semblables en fonction de *a*, *b* et *c* et retrouver la relation $\frac{BP}{CP}.\frac{CQ}{AQ}.\frac{AR}{BR}=1$.

2. La réciproque du théorème est vraie et nous l'admettrons.

a. Construire un triangle *ABC* de côtés *AB* = 6, *AC* = 10 et *BC* = 14 (on prendra un centimètre comme unité).

b. Placer les points suivants : *R* sur (*AB*) tel que $\overrightarrow{AR}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, *Q* sur (*AC*) tel que $\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ et *P* sur (*BC*) tel que $\overrightarrow{CP}=\frac{8}{7}\overrightarrow{CB}$.

c. Calculer les longueurs *AR*, *BR*, *BP*, *CP*, *CQ* et *AQ* ; en utilisant la réciproque du th. de Menelaüs (si $\frac{BP}{CP}.\frac{CQ}{AQ}.\frac{AR}{BR}=1$ alors *P*, *Q* et *R* sont alignés) montrer que *P*, *Q* et *R* sont alignés.

18. Similitude (c)

[*BC*] et [*DE*] sont deux segments perpendiculaires d'intersection *A*.

On donne : *AB* = 28, *AD* = 21, *AC* = 72, *AE* = 96 et *BD* = 35.

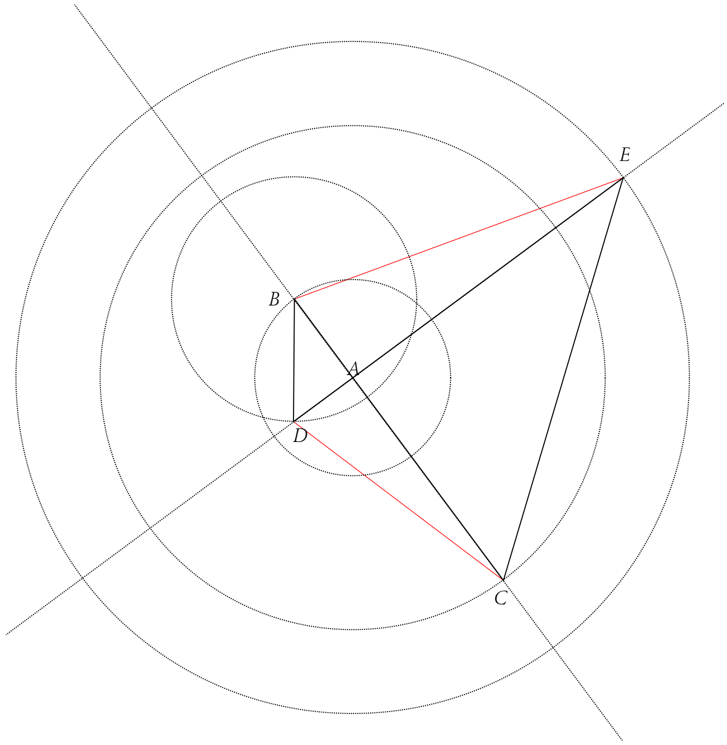
1. Les triangles *ABD* et *ACE* sont semblables. Le prouver et calculer *CE*.

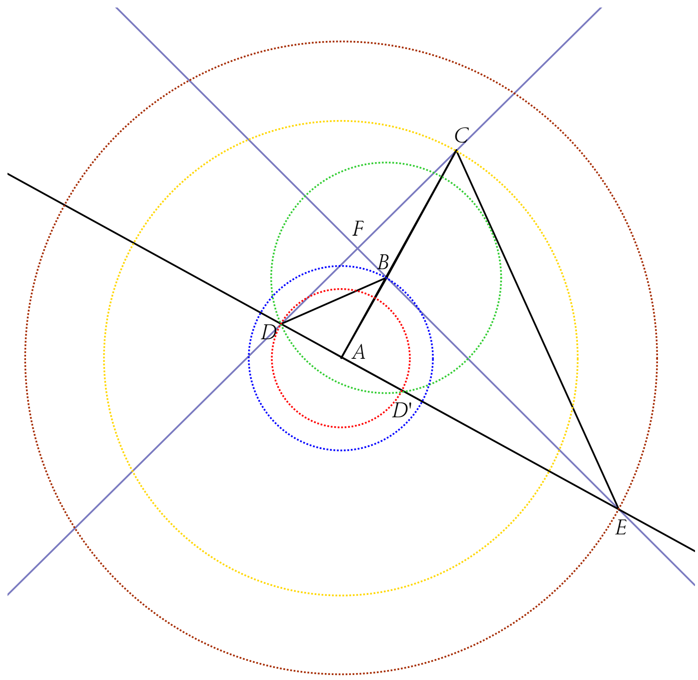
2. Trouver tous les angles de même mesure sur la figure.

3. (*CD*) et (*EB*) se coupent en *F*. Montrer que *ADC* et *ABE* sont semblables.

4. Prouver que les triangles *DFE* et *BFC* sont semblables. Quel est le coefficient de réduction ou d'agrandissement entre ces deux triangles.

Correction





1. On a un angle droit en A pour les deux triangles et deux côtés proportionnels : $\frac{AD}{AC}=\frac{21}{72}=\frac{7}{24}$, $\frac{AB}{AE}=\frac{28}{96}=\frac{7}{24}$. Les deux triangles sont bien semblables et on a $\frac{BD}{CE}=\frac{7}{24}\Rightarrow CE=\frac{24}{7}BD=\frac{24}{7}35=120$.

2. On a évidemment $\widehat{ADB}=\widehat{ACE}$ et $\widehat{ABD}=\widehat{AEC}$.

3. Comme on a déjà l'angle $\widehat{A}$ égal dans les deux triangles, il suffit de recommencer comme au 1.

$\begin{cases} A \to A \\ D \to B \\ C \to E \end{cases}$: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{28}{21} = \dfrac{4}{3}$, $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{96}{72} = \dfrac{4}{3}$, c'est bon.

4. Comme les triangles ADC et ABE sont semblables, on a $\widehat{ADC} = \widehat{ABE}$ et $\widehat{ACD} = \widehat{AEB}$, ce qui donne deux angles égaux dans les triangles DFE et BFC qui sont donc semblables : $\begin{cases} F \to F \\ D \to B \\ C \to E \end{cases}$.

On calcule alors $\dfrac{BE}{DC} = \dfrac{\sqrt{AB^2 + AE^2}}{\sqrt{AD^2 + AC^2}} = \dfrac{\sqrt{28^2 + 96^2}}{\sqrt{21^2 + 72^2}} = \dfrac{100}{75} = \dfrac{4}{3}$ (on pouvait s'y attendre).

19. Rectangle et triangle semblable (c)

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 15$ cm et $BC = 9$ cm. M est le point de $[AD]$ tel que $AM = 4$ cm.

La droite (DE) est perpendiculaire à (MC) et la coupe en H.

1. a. Montrer que $ADE = DCH$.

b. En déduire que les triangles DMC et AED sont semblables.

c. Montrer alors que $AE = 3$ cm.

2. a. Calculer ME.

b. Démontrer que la droite (MC) est la médiatrice du segment $[DE]$.

Correction

1. a. On remarque d'abord que $\widehat{ADE} = \widehat{MDH}$ et que $\widehat{MDC} = 90°$ car $ABCD$ est un rectangle.

Comme $\widehat{MDC} = \widehat{MDH} + \widehat{HDC}$, on obtient que $\widehat{MDH} = 90° - \widehat{HDC}$.

Dans le triangle HDC : $\widehat{DCH} + \widehat{CHD} + \widehat{HDC} = 180°$ soit $\widehat{DCH} = 90° - \widehat{HDC}$ puisque $\widehat{DHC}$ est un angle droit.

Donc comme $\widehat{MDH} = 90° - \widehat{HDC}$ et que $\widehat{DCH} = 90° - \widehat{HDC}$, on trouve que $\widehat{MDH} = \widehat{DCH}$.

Puis comme $\widehat{ADE} = \widehat{MDH}$ et que $\widehat{MDH} = \widehat{DCH}$ alors on obtient bien que $\widehat{ADE} = \widehat{DCH}$.

On en déduit aussi que $\widehat{ADE} = \widehat{DCM}$.

b. Les triangles DMC et ADE ont deux angles égaux deux à deux : $\widehat{DAE} = \widehat{MDC} = 90°$ et $\widehat{ADE} = \widehat{DCM}$ comme démontré précédemment. Donc les triangles DMC et ADE sont semblables.

c. On en déduit que les côtés de ces triangles sont proportionnels et on a la relation suivante :

$$\frac{DM}{AE} = \frac{DC}{DA} = \frac{MC}{DE}.$$

Ainsi, $\dfrac{5}{AE} = \dfrac{15}{9}$ (puisque $AD = BC$ et que $DM = AD - AM = BC - AM = 9 - 4 = 5$) ; en utilisant le produit en croix on obtient bien : $AE = 3$ cm.

2. a. Dans le triangle ADE rectangle en A (puisque $ABCD$ rectangle), on a, avec le théorème de Pythagore :

$$ME^2 = AM^2 + AE^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25.$$

Dont on déduit que $ME = 5$ cm.

b. (MC) est la hauteur du triangle MDE puisque « la droite (DE) est perpendiculaire à (MC) et la coupe en H ».

Or, le triangle MDE est un triangle isocèle ($ME = MD$) puisque :

$$ME = EM = 5 \text{ cm et } MD = DM = AD - AM = BC - AM = 9 - 4 = 5 \text{ cm}.$$

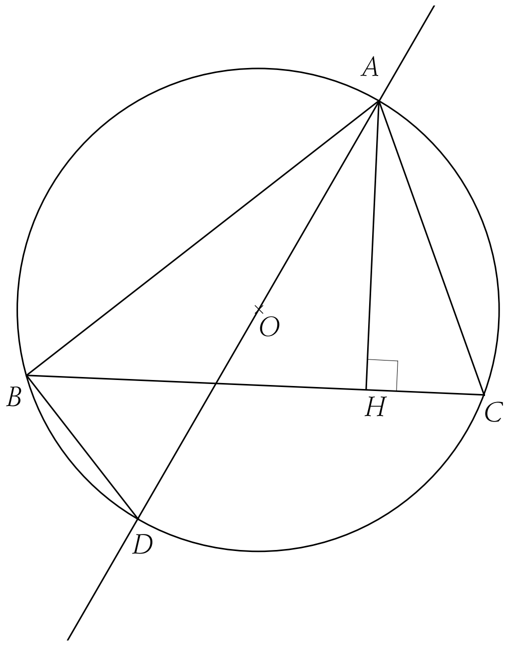
Comme la hauteur issue du sommet principal d'un triangle isocèle est confondue avec la bissectrice, la médiane et la médiatrice du côté opposé, on en déduit que la droite (*MC*) est la médiatrice du segment [*DE*].

20. Triangles semblables (c)

(Γ) est un cercle de centre *O* de rayon *r*, *ABC* est un triangle inscrit dans (Γ) tel que l'angle $\widehat{BAC}$ est aigu. *H* est le projeté orthogonal de *A* sur [*BC*]. La droite (*AO*) recoupe *C* en *D* (inutile de refaire la figure).

1. Démontrer que les triangles *ABD* et *AHC* sont semblables.

2. On pose $AB = c$, $AC = b$ et $AH = h$. Déduire de la question précédente que $bc = 2rh$.



Correction

1. Comme [*AD*] est un diamètre du cercle, $\widehat{ABD} = 90° = \widehat{AHC}$; par ailleurs les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ interceptent le même arc de cercle, ils sont égaux.

Les triangles sont donc bien semblables par $s : \begin{cases} A \to A \\ B \to H \\ D \to C \end{cases}$.

2. On pose AB = c, AC = b et AH = h. Ecrivons les rapports : $\dfrac{AH}{AB} = \dfrac{AC}{AD} = \dfrac{HC}{BD} \Leftrightarrow \dfrac{h}{c} = \dfrac{b}{2r} = \dfrac{HC}{BD}$.

Le premier rapport donne $bc = 2rh$.

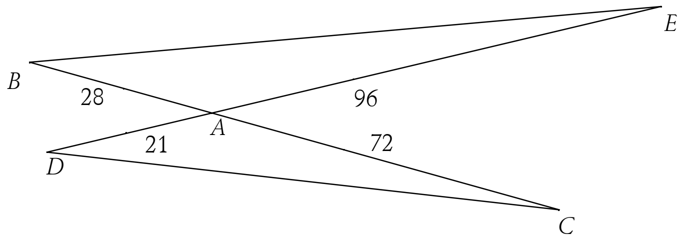
21. Triangles semblables

1. Montrer que les triangles *DA*C et *BAE* ci-dessous sont semblables (les mesures sont en mm : $AD = 21$, $AC = 72$, $AB = 28$ et $AE = 96$).

Quel est le rapport de similitude ?

2. Quel est le rapport des aires de ces deux triangles ?

3. On admet que $BE = 110$. Que vaut la longueur *DC* ?



22. Triangles semblables

ABC est un triangle tel que $BC = 27$ mm, $CA = 48$ mm et $AB = 36$ mm.

On place le point D sur le côté $[AB]$ tel que $AD = 16$ mm et E sur le côté $[AC]$ tel que $AE = 12$ mm.

1. Démontrer que les triangles ABC et AED sont semblables. En déduire deux égalités d'angles.

2. Quel est le rapport d'agrandissement pour transformer le triangle AED en ABC ?

3. Calculer la longueur DE.

4. Les droites (BC) et (DE) se coupent en F.

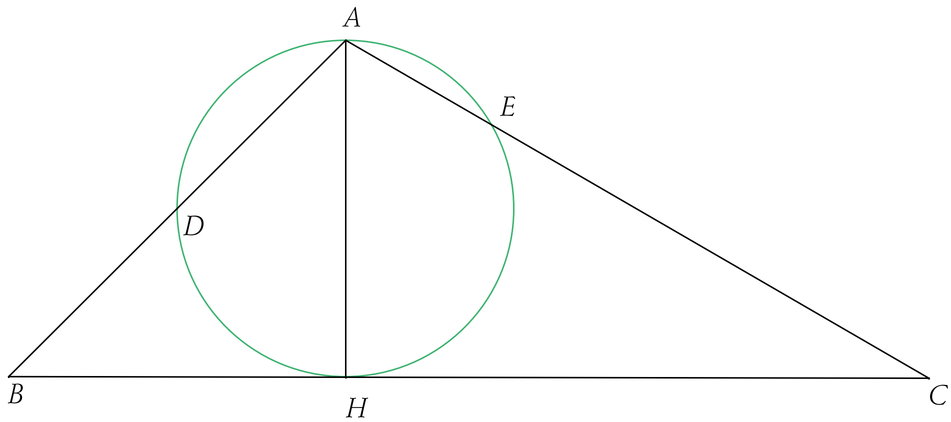
a. Démontrer que les triangles FBD et FEC sont semblables (on pourra utiliser une égalité d'angles obtenue au 1.).

b. Quel est le rapport de réduction pour transformer le triangle FEC en FBD ?

23. Sinus de 75°

Sur la figure ci-dessous, ABC est un triangle, H le projeté orthogonal de A sur (BC), $\widehat{BAH} = 45°$, $\widehat{HAC} = 30°$ et $AH = 6$ cm.

Le cercle (C) de diamètre $[AH]$ et de centre O coupe (AB) en D et (AC) en E.



1. a. Calculer AB et AC.

b. Montrer que AHE est un triangle rectangle.

c. Montrer que $AE = 3\sqrt{3}$ cm.

2. a. Démontrer que $\widehat{AHE} = \widehat{ADE} = 60°$ et $\widehat{ACB} = 60°$.

b. En déduire que les triangles BAC et EAD sont semblables.

c. Après avoir rempli le tableau de proportionnalité des longueurs, déduisez-en que le rapport de similitude qui fait passer du triangle BAC au triangle EAD est $\frac{\sqrt{6}}{4}$. S'agit-il d'une réduction ou d'un agrandissement ? Expliquer.

3. a. Calculer BC (on pourra couper par H).

b. Déduisez-en que $DE = \frac{3}{2}\times\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$ cm.

4. On note F le point diamétralement opposé à D sur C.

a. Démontrer que $\widehat{DFE} = 75°$.

b. Déduisez-en que $\sin 75° = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1)\right)$.

24. *Configurations dans un cercle 1*

Soit un triangle ABC inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$.

H est le point de concours des hauteurs du triangle ABC.

D est le point diamétralement opposé à B dans le cercle $\mathcal{C}$.

1. Montrer que les droites (AD) et (CD) sont respectivement perpendiculaires aux droites (AB) et (CD).

2. Démontrer que le quadrilatère AHCD est un parallélogramme.

25. *Configurations dans un cercle 2*

Soit un cercle C et trois points I, J et K de ce cercle .Tracer la médiatrice D_1 du segment [IJ] et la médiatrice D_2 du segment [JK] , O est le point d'intersection des médiatrices , montrer que O est le centre du cercle C.

26. *Configurations dans un cercle 3*

Soit un triangle ABC rectangle en A, et I le milieu de [BC].

Le cercle de diamètre [AI] coupe [AB] en E et [AC] en F.

1. Démontrer que AFIE est un rectangle.

2. En déduire la position exacte de E sur [AB] et de F sur [AC].

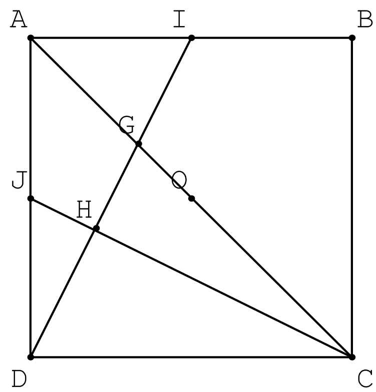
3. Montrer que (EF) est parallèle à (BC).

27. *Aires dans un carré (1)*

ABCD est un carré de centre O et de côté a.

I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AD].

(DI) coupe (CJ) en H et (AC) en G.



1. a. Montrer que les triangles ADI et DCJ sont isométriques.

b. Que peut-on dire des angles $\widehat{ADI}$ et $\widehat{DCJ}$ ¿ Justifier.

c. En déduire que $\widehat{HDC}+\widehat{DCH}=90°$ et que les droites (DI) et (CJ) sont perpendiculaires.

2. a. Calculer ID en fonction de a.

b. Démontrer que les triangles DHJ et DAI sont des triangles semblables.

c. En déduire que $\frac{\text{JD}}{\text{ID}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

d. Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle DHJ et $\mathcal{A}_2$ l'aire du triangle DAI.

En utilisant les questions b. et c. déterminer $\mathcal{A}_1$ en fonction de $\mathcal{A}_2$. En déduire $\mathcal{A}_1$ en fonction de a.

3. a. Démonter que G est le centre de gravité du triangle ADB et calculer AG en fonction de a.

b. Soit $\mathcal{A}_3$ l'aire du triangle DAG. Justifier que $\mathcal{A}_3 = \frac{1}{2}AG\times DO$ puis calculer $\mathcal{A}_3$ en fonction de a.

4. Soit $\mathcal{A}_4$ l'aire de JHGA. Déduire des questions précédentes que $\mathcal{A}_4 = \dfrac{7}{60}a^2$.

28. Aires dans un carré (2)

ABCD est un carré de centre *O* et de côté *a* ; *I* est le milieu de [*AB*] et *J* celui de [*AD*] ; la droite (*DI*) coupe (*CJ*) en *H* et (*AC*) en *G*.

1. Démontrer que $\widehat{ADI} = \widehat{DCJ}$; en déduire que (*DI*) est orthogonale à (*CJ*).

2. Montrer que les triangles *DHJ* et *DAI* sont semblables ; en déduire que l'aire de *DHJ* est $\dfrac{1}{20}a^2$.

3. Que représente *G* pour le triangle *ADB* ? Montrer que $AG = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$ et que l'aire de *DAG* est $\dfrac{a^2}{6}$. Déduire des questions précédentes l'aire de *JHGA*.

29. Triangle rectangle (1)

Dans un triangle *ABC* la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ coupe [*BC*] en *I*, la perpendiculaire à (*AI*) issue de *B* coupe (*AI*) en *H*, la perpendiculaire à (*AI*) issue de *C* coupe (*AI*) en *K*.

1. Montrer que les triangles *ACK* et *ABH* sont semblables puis que les triangles *IKC* et *IHB* sont semblables.

2. En déduire que $\dfrac{IB}{IC} = \dfrac{AB}{AC}$. On suppose que $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$; calculer *IB*.

30. Triangle rectangle (2)

ABC est un triangle dont le pied de la hauteur issue de *A* est *H* et tel que $\widehat{BAH} = 45°$, $\widehat{HAC} = 30°$, $AH = a$. Le cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre [*AH*] coupe (*AB*) en *D* et (*AC*) en *E*. Toutes les mesures seront exprimées en fonction de *a*.

1. Calculer *AB*, *AC* et *AE*.

2. Montrer que *BAC* et *EAD* sont semblables ; trouver le rapport de similitude entre ces deux triangles.

3. Calculer *BC*, en déduire *DE*.

4. Soit *F* le point de ($\mathcal{C}$) diamétralement opposé à *D*. Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{DFE}$ et donner la valeur exacte du sinus de cet angle.

31. Pentagone et nombre d'or

Construction du pentagone régulier convexe inscrit dans un cercle de centre *O* et rayon *r*, ayant un sommet *A* donné.	Consignes et questions
31-a : Angles et côtés 1. L'angle au centre du Pentagone régulier est de 72° ou $\dfrac{2\pi}{5}$ rad et l'angle intérieur de 108° ou $\dfrac{3\pi}{5}$ rad.	Faire la construction dans un cercle trigonométrique.
2. Si *a* est la longueur du côté, *d* la longueur d'une diagonale et *r* le rayon du cercle circonscrit, on a : $a = 2r\sin\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{r}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} = r\sqrt{3-\Phi} \approx 1{,}176r$; $d = \dfrac{r}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}} = r\sqrt{2+\Phi} \approx 1{,}902r$.	Mesurer *a* et *d* sur la figure et effectuer les vérifications numériques des affirmations.

Le rapport diagonale/côté est égal au nombre d'or $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

31-b : Construction dite de Ptolémée

Alexandrie 85-165 après J.-C.

1. Pour construire un pentagone à la « règle et au compas » il suffit de savoir construire un angle au centre dont le cosinus est égal à $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Vérifier numériquement que $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

2. Pour un pentagone inscrit dans un cercle de centre *O*, ayant un sommet *A* donné on peut effectuer la construction suivante :

Tracer un cercle C_1 de centre *O*, passant par *A*. Placer $[AA']$ un diamètre et $[OB']$ un rayon perpendiculaire à $[AA']$.

K est le milieu du rayon $[OA']$, le cercle C_2 de centre *K* et de rayon KB' coupe le segment $[OA]$ en *U*.

La médiatrice de $[OU]$ passe par le milieu *I* de $[OU]$ et coupe le premier cercle C_1 aux points *B* et *E* qui sont deux sommets du pentagone. Le cercle de centre *B* passant par *A* recoupe C_1 en *C*. Le symétrique *D* de *C* par rapport à (AA') termine la construction du pentagone.

Faire la figure. On prendra *O* à l'origine et *A* au point (1, 0).

Montrer que

$$OI = \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

On note *J* le point d'intersection de (CD) et (AA').

Que vaut OJ ?

De quels angles l'abscisse de *J* est-elle le cosinus ?

3. On trace les diagonales du pentagone : (AC), (BD), (CE), (DA), (EB). La figure obtenue s'appelle un pentagramme. Les points d'intersection de ces droites dessinent un nouveau polygone.

Faire une nouvelle figure.

A, *C*, *E*, *B*, *D* dans cet ordre sont les sommets d'un polygone régulier étoilé appelé pentagramme. Ce pentagramme de Pythagore était le sceau secret de reconnaissance de la secte des Pythagoriciens dont les francs-maçons ont repris certains thèmes.

Est-ce encore un vrai pentagone régulier ?

31-c : Méthode des cercles tangents

Placer deux points *O*, *A* et le cercle C_1 de centre *O*, de rayon *r*, passant par *A*. A' est le symétrique de *A* par rapport à *O*. *I* est le milieu d'un rayon perpendiculaire au diamètre $[AA']$.

C_2 est le cercle de centre *I* et de rayon $\dfrac{r}{2}$. La droite $(A'I)$ coupe le cercle C_2 en *P* et *Q*. C_3 et C_4 sont les cercles de centre A' tangents à C_2. Le cercle C_3 est tangent intérieurement au cercle C_2 en *P* et le cercle C_4 est tangent extérieurement au cercle C_2 en *Q*. Le cercle C_3 coupe C_1 en *B* et *E* et le cercle C_4 coupe C_1 en *C* et *D*. Les points *ABCDE* sont les sommets du pentagone cherché.

On rappelle que deux cercles sont tangents en un point *M* si les tangentes aux cercles en *M* sont identiques.

Faire la figure. Et effctuer les mesures nécessaires permettant de vérifier que l'on a bien un pentagone régulier.

31-d : Construction de Dürer

« Albert Dürer (né à Nuremberg en 1471, mort en 1528) appartient, comme Léonard de Vinci, à cette génération de grands artistes, peintres, sculpteurs et architectes, pour lesquels la géométrie est non seulement un instrument d'analyse, mais un puissant moyen de perfectionnement. L'étude de la perspective le conduisit à la transformation des figures en d'autres figures du même genre. Et de là naquirent plusieurs méthodes géométriques, comme celle qui consiste à faire croître proportionnellement les ordonnées des points d'une figure, dans le dessin d'un profil dont on veut rendre les dimensions en hauteur plus facilement appréciables. Dürer maniait très habilement le compas pour tracer des ellipses et d'autres figures géométriques. Le pentagone de Dürer est un pentagone, construit avec une seule ouverture de compas ; mais d'autres géomètres ont démontré depuis que ce pentagone n'a pas tous les angles égaux et que sa figure n'est qu'approximative.»

Source : Ferdinand Hoefer, Histoire des mathématiques, Paris, Hachette, 1874, p. 337

Placer deux points A et B.

A partir de ce segment $[AB]$ qui sera un côté du pentagone on trace cinq cercles de même rayon : le cercle de centre A passant par B, celui de centre B passant par A. Ces deux cercles se coupent en P et Q. Le cercle de centre P passant par A (et par B) coupe les deux premiers cercles en R et S, et le segment $[PQ]$ en G.

La droite (SG) coupe le premier cercle en E et (RG) coupe le deuxième cercle en C. Le dernier point D se trouve à l'intersection des cercles de centre E passant par A et de centre C passant par B.

Faire la construction.

Le pentagone $ABCDE$ est-il régulier ?. A-t-il ses angles égaux ?

Construire un vrai pentagone régulier $ABC'D'E'$ de côté $[AB]$. Que peut-on dire de D et D' ?

31-e : Les étoiles de Compostelle

Placer deux points libres M et N, puis le carré $MNPQ$. Le cercle de centre M passant par P coupe la demi-droite $[MN)$ en O. La droite (OQ) coupe la diagonale $[MP]$ du carré en C. Le cercle de centre O passant par C coupe $[MN]$ en B. $[BC]$ est un premier côté du pentagone.

Le cercle de centre B passant par C coupe $[NM)$ en A, point du pentagone. Le cercle de centre C passant par B coupe $[CQ)$ en D, quatrième point du pentagone. On termine le pentagone en trouvant l'intersection E des cercles de même rayon de centres A et D. Le pentagone $ABCDE$ a ses cinq côtés égaux. L'erreur sur les angles est de un à deux degrés.

Faire la construction.

Quelle est l'erreur sur les angles ?