Classe de Seconde

Fonctions

1. Ensemble de définition 1
2. Fonction : antécédents 1
3. Fonction : coefficients 2
4. Fonctions : parité (c) 2
5. Fonctions : parité 2
6. Questions (c) 3
7. Fonctions affines et linéaires 3
8. Lecture graphique 5
9. Lecture graphique 6
10. Lecture graphique : paraboles 6
11. Tableau de variation 7
12. Fonction : symétrie centrale 7
13. Fonction : quotient 1 7
14. Fonction : quotient 2 8
15. Fonction : quotient 3 8
16. Fonction : quotient 4 8
17. Fonction : quotient 5 8
18. Fonction : quotient 5 9
19. Fonction : quotient 6 9
20. Fonction : quotient 7 9
21. Fonction : quotient 8 9
22. Fonction : quotient 9 10
23. Fonction : quotient 10 10
24. Fonction : quotient 11 10
25. Fonction : quotient 12 11
26. Fonction : Mise en équation 11
27. Fonction : 2nd degré 11
28. Fonction : 2nd degré 12
29. Fonction : 2nd degré (c) 12
30. Fonction : 2nd degré et valeur absolue 14
31. Fonction : 2nd degré 14
32. Fonction : 2nd degré et droite (c) 14
33. Fonction : valeur absolue 16
34. Fonction : 2nd degré (c) 16
35. Fonction : 3ème degré 19
36. Fonction : fraction continue 19
37. Fonction : optimisation 19
38. Fonction : résolution d'équation 20
39. Distance d'un point à une droite (c) 20
40. Courbe, équation, inéquation 21
41. Tableau de variation,inéquation 21
42. Courbe, équation, inéquation 21
43. Fonction affine par morceaux 22
44. Fonction : inéquations (voir également équations-inéquations) 23
45. Fonction : inéquations et degré 3 (c) 23
46. Similitude (c) 26
47. Fonction : inéquations 27
48. Tangente à la parabole et à l'hyperbole (c) 28
49. Fonctions et inéquations 1 (c) 29
50. Fonctions et inéquations 2 (c) 31
51. Triangle et 2nd degré (c) 35
52. Aire d'un triangle rectangle (1) 36
53. Aire d'un triangle rectangle (2) 37
54. Yin et Yang 37
55. Trapèze (1) 38
56. Trapèze (2) 38
57. Triangle et rectangle 39
58. Distance d'arrêt d'une automobile (c) 39
59. Poitiers – Paris - Strasbourg 40
60. Etude de fonction et application à la physique. 41
61. Arc et flèche (Bac pro Aménagement finition, France 06/07) (c) 42

1. Ensemble de définition

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f(x)=2x^3-4x^2+2$ $\qquad g(x)=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{2}{x^2+1}$

$h(x)=\dfrac{1}{x}\sqrt{3-2x}$ $\qquad k(x)=\sqrt{4x^4+3x^2+1}$

Trouver l'ensemble de définition de la fonction $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$

Déterminez l'ensemble de définition de $f(x)=\sqrt{9-x^2}+\dfrac{4}{x\sqrt{1-x}}$. *f* est elle paire, impaire, rien ?

2. Fonction : antécédents

Soit la fonction $f(x)=-2x^2+1$.

Déterminer les images par *f* des nombres -1, 10, -101, $\sqrt{2}$ et -$\sqrt{2}$.

Déterminer si ces nombres ont des antécédents ?

A quelle condition un nombre y a-t-il des antécédents ?

3. Fonction : coefficients

1. Soit la fonction $f(x)=\dfrac{x+a}{x+b}$ où a et b sont deux réels inconnus (pour l'instant...). Peut on trouver a et b pour que $f(-2)=0$ et que -1 soit valeur interdite de f ?
2. On prend $a=2$, $b=1$; tracez la fonction obtenue sur l'intervalle $[-5, +5]$.
3. Dressez le tableau de variations de f.
4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\leq 1$.
5. On veut résoudre l'inéquation $f(x)\geq x$. Proposez une méthode et appliquez la.

4. Fonctions : parité (c)

On définit la fonction suivante : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

Quel est son ensemble de définition ?

Cette fonction est-elle paire ? impaire ? rien de particulier ?

Correction

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$. x^2-1 doit être positif ou nul et x doit être non nul. On résout donc $x^2-1\geq 0$ avec $x\neq 0$.

Ceci donne $(x-1)(x+1)\geq 0$ et le tableau ci-après.

x	$-\infty$ $\quad$ -1	1	$+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
P	$+$	$-$	$+$

On en déduitla solution $\left]-\infty\,;-1\right]\cup\left[1\,;+\infty\right[$ et comme 0 (la valeur interdite du dénominateur) n'appartient pas à cet intervalle, $\text{Def}=\left]-\infty\,;-1\right]\cup\left[1\,;+\infty\right[$.

On constate que <u>cet ensemble est symétrique par rapport à zéro</u>. f peut éventuellement être paire ou impaire.

On a $f(-x)=\dfrac{\sqrt{(-x)^2-1}}{(-x)}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{-x}=-\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}=-f(x)$: f est donc une fonction impaire.

5. Fonctions : parité

1. Remplir ce tableau :

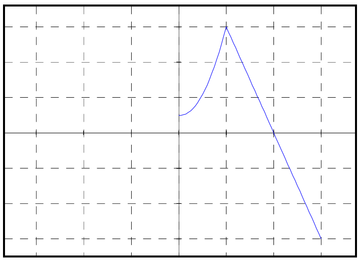
	Propriété algébrique	Propriété graphique
f est une fonction paire		
f est une fonction impaire		
f est ni paire, ni impaire		

2. Dire pour chacune de ces fonctions si elle est paire, impaire ou non. En déduire des propriétés pour leur représentation graphique.

$$f:x\mapsto x^2 \qquad h:x\mapsto (x+2)^2$$
$$g:x\mapsto 3-x \qquad i:x\mapsto 3x-x^3$$

3. a. Compléter la courbe ci-contre en rouge pour que la courbe alors obtenue soit représentative d'une fonction paire, que l'on notera f.

b. Etablir le tableau de variations de f.



6. Questions (c)

Traduire à l'aide d'écritures simples les phrases suivantes :

a. La courbe de la fonction f passe par le point A(3 ; −1).

b. L'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe C de g vaut 1.

c. La représentation graphique de la fonction h coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3.

d. La courbe représentant la fonction k passe par l'origine.

e. La courbe C' représentant la fonction m est au-dessus de l'axe des abscisses entre les points d'abscisse −5 et 4.

Correction

a. La courbe de la fonction f passe par le point A(3 ; −1) : $f(3)=-1$.

b. L'ordonnée du point d'abscisse 2 de la courbe C de g vaut 1 : $g(2)=1$.

c. La représentation graphique de la fonction h coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 3 : $h(0)=3$.

d. La courbe représentant la fonction k passe par l'origine : $k(0)=0$.

e. La courbe C' représentant la fonction m est au-dessus de l'axe des abscisses entre les points d'abscisse −5 et 4 : $m(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in[-5\,;4]$.

7. Fonctions affines et linéaires

1. Remplir le tableau suivant :

	Vrai	Faux	Sûr	Pas sûr
$f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ est une fonction affine.				
Dans l'équation de droite $y=cx+d$, d est le coefficient directeur et c l'ordonnée à l'origine.				
La représentation graphique d'une fonction constante est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.				
$g(x)=ax$ où $a\in\mathbb{R}$, est l'expression d'une fonction linéaire.				
La représentation graphique d'une fonction linéaire est une droite parallèle à l'axe des abscisses.				

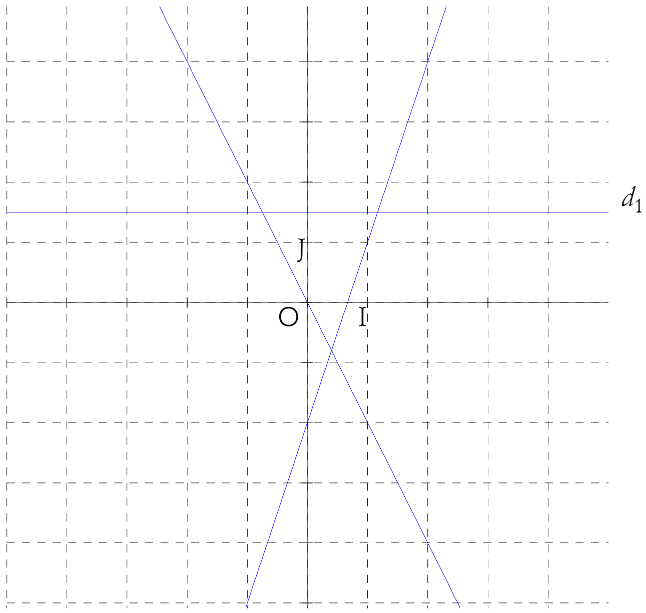
2. Fonctions affines

a. Donner les expressions des fonctions affines f_1, f_2, f_3 dont les représentations graphiques sont respectivement les droites d_1, d_2, d_3 tracées dans le repère (O, I, J) ci-dessous

b. Tracer la droite d_4 représentative de la fonction f_4 définie par $f_4(x) = \frac{1}{2}x - 1$ dans le même repère.

c. Donner le sens de variation de chacune des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 .

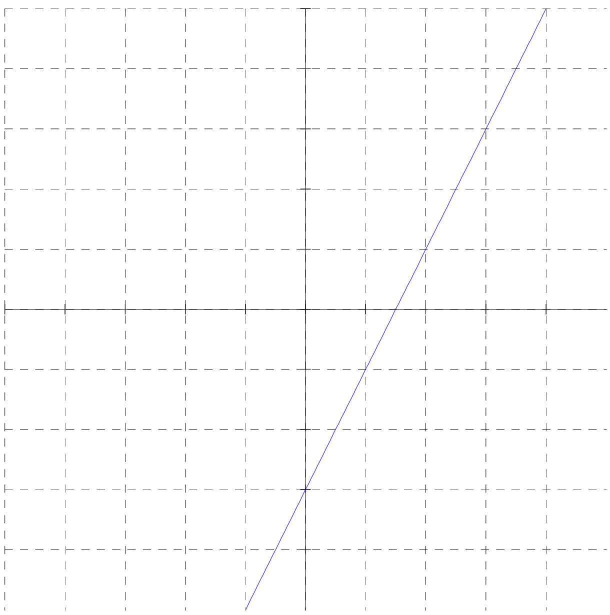
d. Calculer l'expression de la fonction affine k sachant que $k(3) = 1$ et $k(2) = 5$.



3. a. Donner l'expression de la fonction affine f dont la représentation graphique est la droite ci-dessous.

b. Tracer sur le même repère les représentations graphiques des fonctions g et h définies par $g(x) = \frac{3}{2}$ et $h(x) = -\frac{1}{2}x + 2$.

c. Calculer l'expression de la fonction affine k sachant que $k(-1) = 4$ et $k(1) = 2$. Déterminer le sens de variation des fonctions f, g, h, k.



4. Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(2 - \sqrt{3}\right)x + 1$ pour tout réel x.

a. Quelle est le nom d'une telle fonction ?

b. Quel est le sens de variation de f (justifier) ?

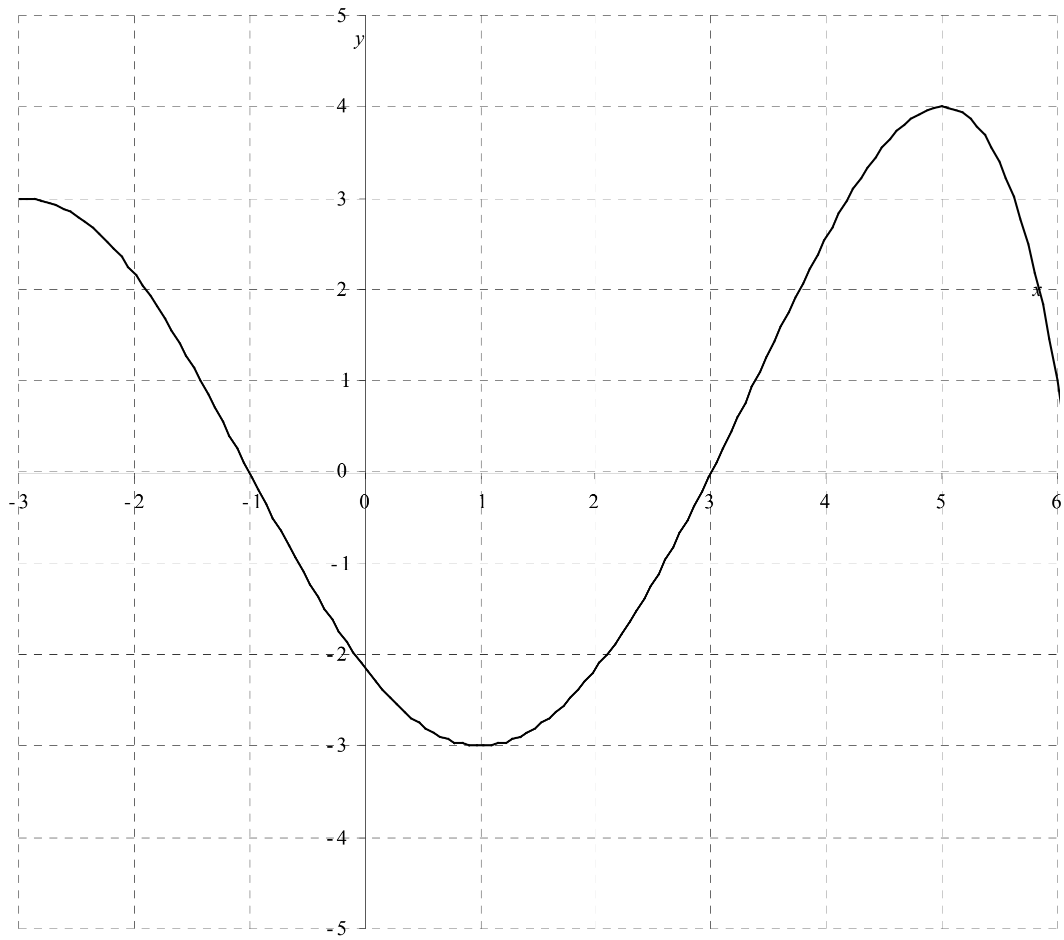
c. Déterminer l'image de $\sqrt{2}$ par f.

d. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de $\sqrt{3}-1$ par f.

e. Tracer sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ orthonormé.

f. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 4$.

8. Lecture graphique



Le graphique ci-dessus représente une fonction f sur l'intervalle $[-3\,;6]$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $[-3\,;6]$.

2. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant votre réponse :

a. f est négative sur $]-2\,;1[$.

b. Si on a pour deux nombres a et b tels que $-2 \leq a \leq b \leq 0$ alors $-3 \leq f(b) \leq f(a) \leq 3$.

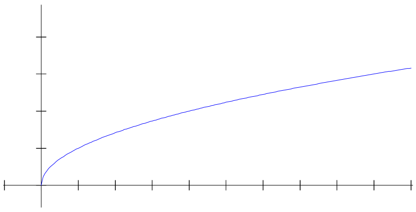
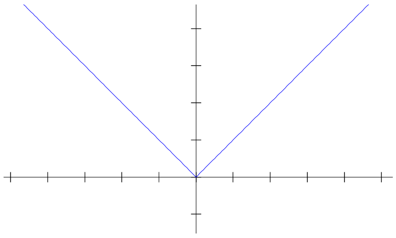
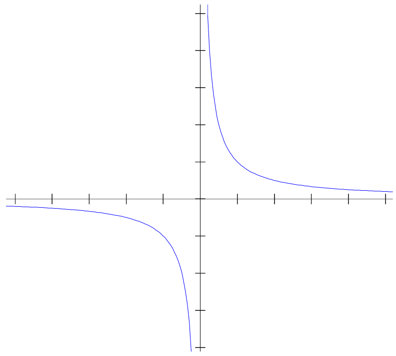
c. L'équation $f(x) = 2$ a 4 solutions sur $[-3\,;6]$.

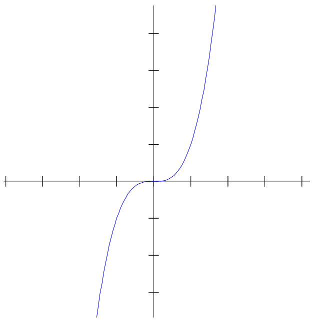
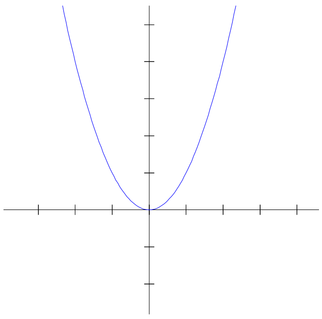
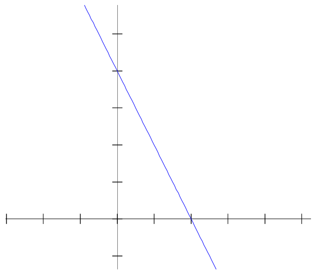
d. On a $f(-3) < f(5)$ car f est croissante sur l'intervalle $[-3\,;5]$.

9. Lecture graphique

Les courbes représentées ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions de références suivantes : la fonction carrée, cube, valeur absolue, inverse, racine et une fonction affine.

Attribuer à chaque courbe la fonction de référence correspondante et préciser le nom de cette courbe lorsqu'il existe.

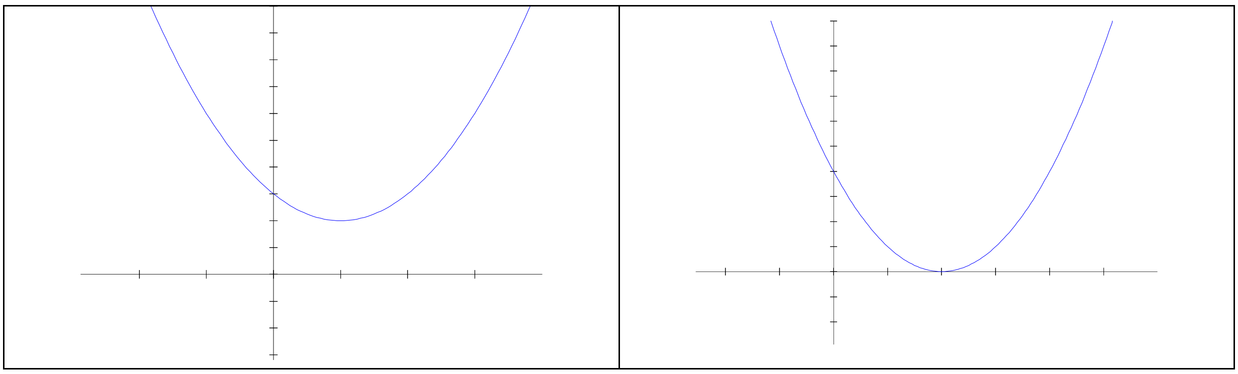
10. Lecture graphique : paraboles

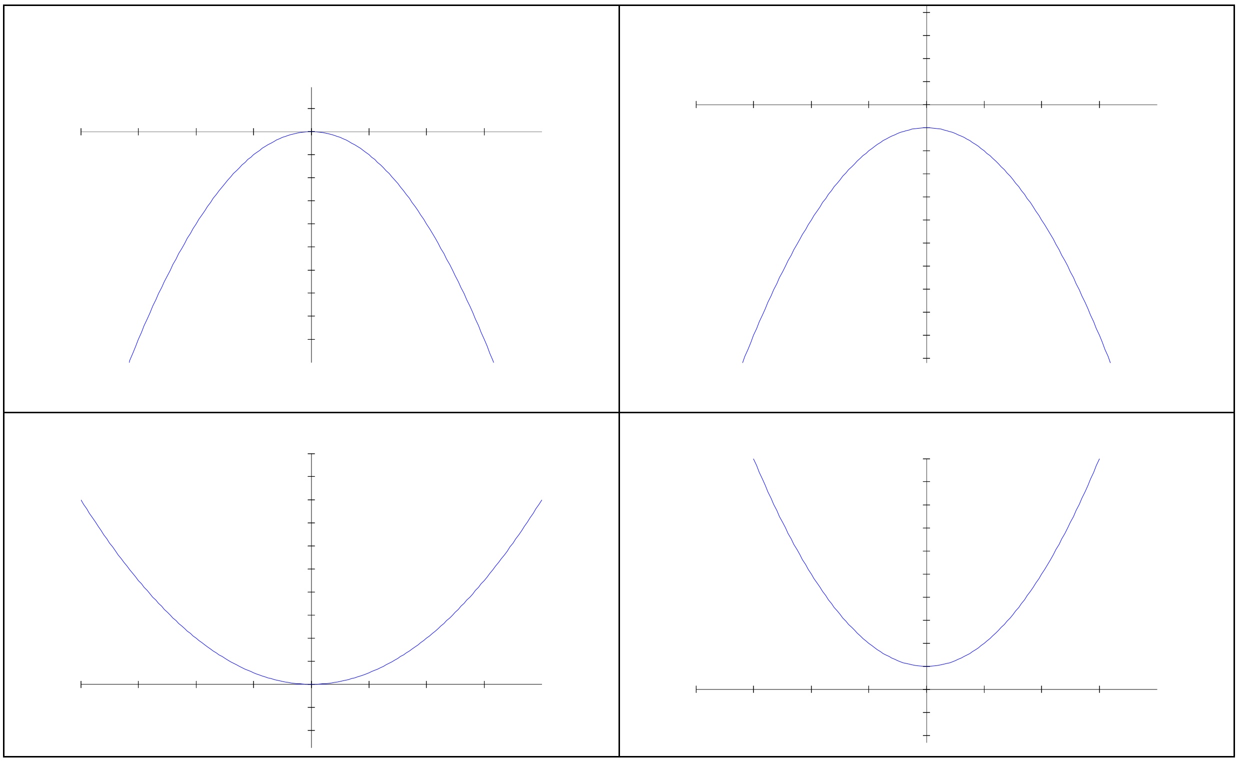
On donne ci-dessous les représentations graphiques de six fonctions que l'on peut considérer comme déduites de la fonction carré :

$f_1 : x \mapsto -x^2$; $f_2 : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$; $f_3 : x \mapsto x^2+1$; $f_4 : x \mapsto (x-2)^2$; $f_5 : x \mapsto -x^2-1$; $f_6 : x \mapsto x^2-2x+3$.

1. Associer à chaque fonction la courbe qui lui correspond. On notera P_1 la parabole représentant f_1, P_2 celle représentant f_2, ...

2. Quelle transformation géométrique permet de passer de la parabole représentant la fonction carré à la parabole représentant chacune des fonctions f_1, f_3, f_4, f_5, f_6 ?





11. Tableau de variation

f est une fonction paire définie sur $[-6\ ;6]$ dont on connaît une partie du tableau de variations :

x	-6	0	2	5	6
$f(x)$		5	0	2	3

1. Compléter ce tableau de variations.
2. Tracer une représentation graphique de f en utilisant que des segments de droite.
3. Existe-t-il d'autres fonctions paires ayant le même tableau de variations que f ?

12. Fonction : symétrie centrale

Montrer que le point A de coordonnées (2, 1) est le centre de symétrie de la courbe représentative de la fonction $f(x)=2x-3+\dfrac{3}{2-x}$.

13. Fonction : quotient 1

Soit g la fonction définie sur $]-\infty\ ;-3[\cup]3\ ;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{(x+3)(x+1)^2-2x(x+3)}{4x(x+3)}$.

1. Montrer que $g(x)=\dfrac{x^2+1}{4x}$ pour tout $x\in]-\infty\ ;-3[\cup]3\ ;+\infty[$.

2. Quel est le plus grand ensemble sur lequel la fonction g pourrait être définie ? (c'est à dire quels sont les x pour lesquels $g(x)$ peut être calculé).

3. Etudier la parité de la fonction g.

4. Quelle propriété la courbe représentative de g possède-t-elle ?

5. Existe-t-il un ou des antécédent(s) de 0 par g ?

14. Fonction : quotient 2

Soit f la fonction définie sur $E =]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x(x+1) - x^2 - 2x - 1}{2x(x+1)}$.

1. Montrer que $f(x) = \frac{-1}{2x}$ pour tout $x \in E$.

2. Pouvez-vous trouver les images de -1 ?, 0 ?, 2 ?

3. Quel est le plus grand ensemble sur lequel la fonction f peut être définie ? (c'est à dire quels sont les x pour lesquels le nombre $f(x)$ peut être calculé).

4. Montrer que la fonction f est impaire.

5. Quelle propriété la courbe représentative de f possède-t-elle ?

15. Fonction : quotient 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Déterminer les images de $-\frac{3}{7}$ et $\sqrt{5}$ par f (rendre rationnel le dénominateur).

3. Résoudre par le calcul : $f(x) = 2$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq x + 3$.

4. Recopier sur la copie et compléter le tableau de valeurs suivant :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	0,5	0,75	1	1,25	1,5	2	3	4	5	6	7
$f(x)$																	

5. Dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, unité = 1 cm, *sur une feuille à part*, tracer

D_1 représentation graphique de $x = 1$,

D_2 représentation graphique de $y = 2$,

D_3 représentation graphique de $y = x + 3$,

C_f représentation graphique de la fonction f pour $x \in [-5 ; 7]$.

6. Retrouver graphiquement les solutions de $f(x) = 2$, $f(x) \geq 0$, $f(x) \leq x + 3$.

16. Fonction : quotient 4

Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{5x+13}{x+3}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_g de g.

2. Trouver deux réels a et b tels que pour tout x élément de D_g, $g(x) = a + \frac{b}{x+3}$.

3. En déduire les variations de g.

17. Fonction : quotient 5

Soit f la fonction donnée sur $[-10 ; 10]$ par $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$.

1. Pour quelle valeur de x ne peut-on pas calculer $f(x)$?

2. En déduire son ensemble de définition.

3. Quelle est l'image par f de : -5 ? 3 ? $\frac{3}{4}$?

4. Déterminer le (ou les) antécédent(s) de 3 par f.

18. Fonction : quotient 5

Soit la fonction $f(x)=\frac{2-x}{x+3}$, C sa courbe représentative dans un repère orthonormé,

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles les images par f sont positives ou nulles
2. Montrer que –1 n'a pas d'antécédent par f.
3. Trouver deux nombres a et b tels que $f(x)=a+\frac{b}{x+3}$.
4. Tracer la courbe C de f, ainsi que les droites ($x = -3$) et ($y = -1$).
5. Déterminer graphiquement la position de C par rapport à la droite $y = x - 2$, puis algébriquement.

19. Fonction : quotient 6

Soit la fonction $f(x)=\frac{2x+1}{1-3x}$. On veut écrire f de manière différente. Pour cela on suppose que f peut s'écrire $f(x)=a+\frac{b}{1-3x}$.

1. En choisissant deux valeurs de x et en remplaçant dans les deux formes de f, trouver un système satisfait par a et b.
2. Résoudre le système.
3. Vérifiez que votre résultat est correct….
4. Etudiez les variations de f et dressez son tableau de variations.

20. Fonction : quotient 7

Soit la fonction $f(x)=1+\frac{5}{3-x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition. Etudier les variations et dresser le tableau de variations de f.
2. Tracer les droites ($x = 3$), ($y = 1$) et la courbe (C) dans un même repère.
3. Déterminer l'intersection si elle existe entre (C) et ($y = 1$).
4. Résoudre graphiquement puis algébriquement l'inéquation $f(x) > -1$.

21. Fonction : quotient 8

Soit la fonction $f(x)=\frac{8-2x}{3-x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition. Trouver les valeurs de a et b tels que $f(x)=a+\frac{b}{3-x}$. Cette fonction est-elle paire ? impaire ?
2. Déterminer le sens de variation de f. Dresser le tableau de variations de f.
3. Tracer les droites ($x = 3$), ($y = 2$) et la courbe (C) dans un même repère. Déterminer l'intersection si elle existe entre (C) et ($y = 2$) .
4. Pour quelles valeurs de x la courbe (C) est -elle au dessus de l'axe $x'Ox$? La courbe (C) coupe-t-elle la droite ($y = 2$) ?
5. Résoudre graphiquement puis algébriquement l'inéquation $f(x) > 4 - x$.
6. Même question avec $f(x) < x + 2$.

22. Fonction : quotient 9

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x-4}{x-3}$. (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal (unité 1 cm).

1. Déterminer son ensemble de définition E et montrer que pour tout x de E $f(x)=2+\dfrac{2}{x-3}$. Montrer que le point $A(3\,;\,2)$ est centre de symétrie de (C). Déterminer le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2. Tracer (C) soigneusement en précisant quelques valeurs de f.

3. Résoudre algébriquement les inéquations

   * $f(x)\geq 0$ * $f(x)\leq 4$ * $f(x) = x + 5$

Donner une interprétation graphique de ces équations.

4. On considère les points B et C de la courbe (C) d'abcisses respectives −1 et 4 . Déterminer une équation de la droite (BC) et en déduire la résolution de l'inéquation $f(x)\leq\dfrac{1}{2}x+2$

5. Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} x-2y+4\geq 0 \\ y\geq f(x) \\ x<3 \end{cases}$

6. La courbe (C) coupe l'axe des abcisses en D . Déterminer l'aire du triangle BCD.

23. Fonction : quotient 10

Soit la fonction $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unités : 3 cm par axe).

1. Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est croissante avant 0 et décroissante après, dresser son tableau de variations.

2. Soit la droite D d'équation $y=-\dfrac{1}{2}x+1$. Vérifier que D passe par le point A d'abscisse 1 de la courbe C. Déterminer l'équation de la droite D' symétrique de la droite D par rapport à l'axe (y'Oy) . Tracer D, D' puis C.

3. Déterminer l'ordonnée du point de D d'abscisse 1,02 puis du point de D d'abcisse 0,96. Calculer $f(1,02)$ et $f(0,96)$. Que constate-t-on ?

4. Résoudre graphiquement puis par le calcul les (in)équations suivantes :

$$* f(x) = 1 \;;\; * f(x) = 2 \;;\; * f(x) < \frac{1}{2}.$$

24. Fonction : quotient 11

Soit la fonction $f(x)=2-\dfrac{1}{x^2+4}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.

2. Déterminer à l'aide de la calculatrice le sens de variation de f. Justifiez ce que vous avez trouvé.

3. Tracer la courbe représentative C de f dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$.

5. Déterminer graphiquement puis par le calcul l'intersection entre C et la droite D($y = 2$).

6. Déterminer graphiquement puis par le calcul la position de C par rapport à la droite D'($y = 1$).

25. Fonction : quotient 12

Partie A : On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+3$.

1. Calculer $f(-1)$.

2. Déterminer par le calcul les antécédents de 3.

3. a. Montrer que $f(x)=\left(x-3\right)\left(x-1\right)$.

b. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f(x)=0$.

4. On cherche à démontrer que f admet un minimum en 2.

a. Calculer $f(2)$.

b. Etudier le signe de $f(x)-f(2)$.

c. Conclure.

Partie B : On appelle g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{x-2}{x-3}$.

1. Donner D_g l'ensemble de définition de g.

2. Rechercher le (ou les) antécédents de 0 par g.

3. En utilisant la calculatrice, calculer les valeurs de $g(x)$ à 0,1 près pour x compris entre −2 et 6 par pas de 0,5.

4. Résoudre l'inéquation $g(x)\leq 2$.

5. a. Montrer que $g(x)=1+\dfrac{1}{x-3}$.

b. Etudier les variations de la fonction g sur $\left]-\infty\,;3\right[$.

c. On admettra que les variations de la fonction g sont les mêmes sur $\left]3\,;+\infty\right[$ que sur $\left]-\infty\,;3\right[$. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

6. Représenter graphiquement dans un repère orthonormé la fonction g sur l'intervalle [−2 ; 6].

7. Résoudre graphiquement $g(x)\geq f(x)$. Les valeurs lues sur le graphique seront données à 0,1 près.

26. Fonction : Mise en équation

Construire un triangle ABC tel que AB = 12, BC = 16 et CA = 8 (unité : 1 cm) . Soit E un point de [AB] , on pose AE = x .

La parallèle à (BC) menée par E coupe [AC] en F . La parallèle à (AB) menée par F coupe [BC] en K. Faire la figure....

1. Calculer en fonction de x les périmètres P_1, P_2 et P_3 du triangle AEF et des quadrilatères EFCB et EFKB.

2. Calculer x pour que $P_1 = P_2$.

3. Représenter dans le même repère les fonctions $P_1(x)$ et $P_2(x)$. Retrouver le résultat du 2.

4. Résoudre l'équation $P_1= P_3$. Représenter $P_3(x)$ sur la figure précédente.

p. 1

27. Fonction : 2^nd^ degré

Soit la fonction $f(x)=-2x^2-4x+6$.

1. Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal (unités=1 cm).

2. Trouver les nombres a et b tels que $f(x)=-2\left[(x+a)^2+b\right]$.

2. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)<0$.

4. Tracer sur la même figure la droite (AB) où A a pour coordonnées (–2, 4) et B(1, 0) ; trouvez graphiquement les points d'intersection de (C) et de (AB).

5. Déterminez l'équation de la droite (AB) et vérifiez par le calcul ce que vous avez trouvé au 4.

6. Déterminez graphiquement les abscisses des points du plan pour lesquels la droite (AB) est au dessus de (C).

28. Fonction : 2nd degré

Dans un repère, on considère le point $A(3\ ;\ 1)$ et la droite D d'équation $y = 2x$.

1. Soit M le point de D d'abcisse x. Exprimer AM^2 en fonction de x seulement.

2. Soit $f(x) = 5x^2 - 10x + 10$. Trouver a, b, c tels que $f(x) = a\left(\left(x+b\right)^2 + c\right)$. En déduire le sens de variation de f. Dresser son tableau de variations. Tracer sur la même figure la droite D et la courbe P représentant f.

3. Montrer que AM^2 est minimum pour une valeur de x que l'on précisera. Aurait on pu le deviner ?

29. Fonction : 2nd degré (c)

Soit la fonction $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$.

1. Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal (unités=1 cm).

2. Trouver les nombres a et b tels que $f(x) = 2\left[(x+a)^2 + b\right]$.

3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

4. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) < 0$.

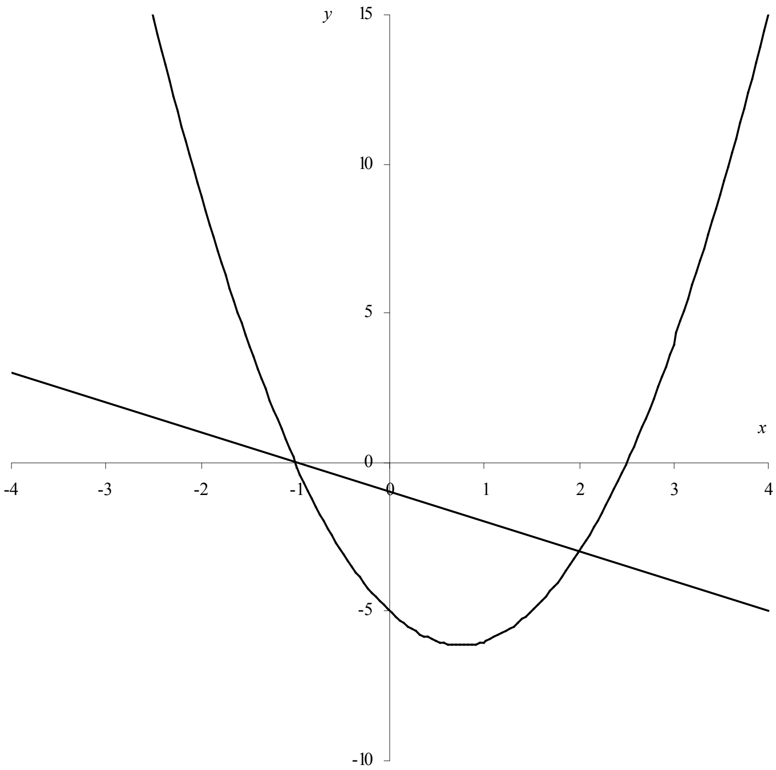
5. Résoudre par le calcul l'équation $f(x) = 0$.

6. Tracer sur la même figure la droite (AB) où A a pour coordonnées $(-1, 0)$ et $B(2, -3)$; déterminez l'équation de la droite (AB).

Quelle inéquation doit-on résoudre si l'on veut déterminer les valeurs de x pour lesquelles (C) est au-dessus de (AB) ?

Correction

1.



x	$-\infty$	$3/4$	$+\infty$
f	$\searrow$	$-49/8$	$\nearrow$

2. On développe :

$f(x)=2\left[(x+a)^2+b\right]=2\left[x^2+2ax+a^2+b\right]=2x^2+4ax+2a^2+2b$; en identifiant les coefficients, on a

$$\begin{cases}4a=-3\\ 2a^2+2b=-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3/4\\ 2b=-5-2(9/16)=-49/8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3/4\\ b=-49/16\end{cases}$$

d'où $f(x)=2\left[\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{49}{16}\right]$.

3. Les variations dépendent en fait du terme $\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2$ qui change de sens de variation suivant que $x<\dfrac{3}{4}$ (décroissant) ou $x>\dfrac{3}{4}$ (croissant) ; lorsqu'on soustrait $\dfrac{49}{16}$ ça ne change rien et lorsqu'on multiplie par 2 non plus.

4. On voit sur la figure que *f*(*x*) est négatif (C en dessous de l'axe *Ox*) lorsque x est entre -1 et 2,5. La solution est donc $]-1\,;2,5[$.

5. $f(x)=0\Leftrightarrow 2\left[\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{49}{16}\right]=0\Leftrightarrow 2\left[\left(x-\dfrac{3}{4}-\dfrac{7}{4}\right)\left(x-\dfrac{3}{4}+\dfrac{7}{4}\right)\right]=0\Leftrightarrow\left(x-\dfrac{5}{2}\right)(x+1)=0$. On retrouve bien les solutions -1 et 5/2.

6. $\begin{vmatrix}x+1 & 2+1\\ y & -3\end{vmatrix}=-3(x+1)-3y=0\Leftrightarrow x+y+1=0\Leftrightarrow y=-x-1$.

Il faut résoudre $f(x)>-x-1$; les solutions sont ici : $x\in]-\infty\,;-1]\cup[2\,.;+\infty[$.

30. Fonction : 2[nd] degré et valeur absolue

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$. On appelle C sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ (unité 2 cm).

1. Vérifier que $f(x) = -(x-1)^2 + 4$ pour tout x réel.

2. a. Etudier les variations de f sur $]-\infty, 1]$ puis sur $[1, +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

b. f admet-elle un minimum sur l'intervalle $[0, 4]$? Si oui, quel est ce minimum et pour quelle(s) valeur(s) de x est il atteint ?

3. a. Préciser par le calcul les coordonnées des points d'intersection de C avec les axes de coordonnées.

b. Résoudre graphiquement puis par le calcul l'inéquation $f(x) \leq 0$.

c. Soit A le point d'intersection de C avec l'axe vertical $y'Oy$ et B le point d'intersection de C avec l'axe horizontal $x'Ox$ qui a une abscisse positive. Déterminer une équation de la droite (AB).

4. a. Calculer $f(-2)$, $f(0,5)$, $f(1,5)$, $f(2)$, puis tracer C et (AB).

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq -x + 3$.

5. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -|x|^2 + 2|x| + 3$.

a. En utilisant le fait que $|x| = x$ si x est positif ou nul et $|x| = -x$ si x est négatif ou nul, par quelle transformation géométrique peut-on en obtenir la représentation graphique de g dans le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i}, \vec{j}\right)$?

b. Donner l'expression de $g(x)$ lorsque x est positif ou nul et représenter g sur la figure précédente en utilisant une couleur différente. En déduire la résolution graphique de l'inéquation $g(x) \geq 0$.

31. Fonction : 2[nd] degré

1. Soit la fonction $P(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer a, b et c pour que l'on ait

$$P(-1)=0,\ P(1)=-4 \text{ et } P(-2)=8.$$

2. Soit la fonction $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ définie sur $\mathbb{R}$. Tracez la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé (feuille entière, origine au milieu de la feuille, unitée= 2 cm ou 3 carreaux sur chaque axe). Dressez son tableau de variation (on prendra comme abscisse du minimum x=0,5).

3. Montrez que la fonction f est la même que la fonction P du 1.

4. Déterminez graphiquement suivant les valeurs de x les solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ puis celles de $f(x) \leq 2$ (les explications doivent figurer sur la figure)

5. Vérifiez que $f(x) = 2\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right]$; en déduire une factorisation de *f(x)* puis le signe de $f(x)$. Quelles sont alors les solutions de $f(x) \leq 0$?

32. Fonction : 2[nd] degré et droite (c)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ dont la représentation graphique est la courbe P et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -4x + 3$ dont la représentation graphique est la droite D.

On a représenté les deux courbes sur le graphique ci-dessous.

1. a. Vérifier que $f(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$.

b. Déterminer les coordonnées du minimum de f.

c. Dresser le tableau de variation de f après avoir justifié par calculs le sens de variation de f.

2. a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$.

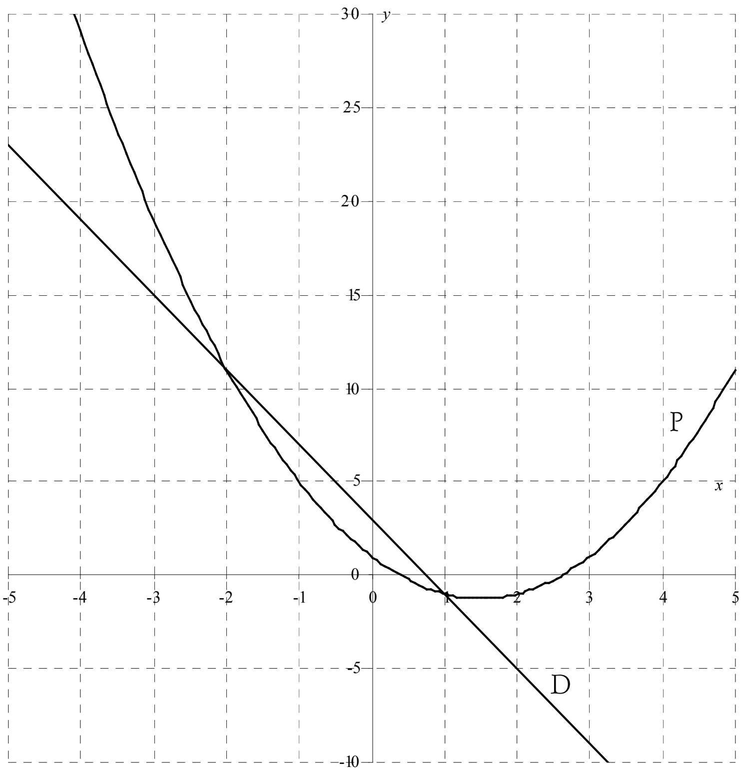
b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\le g(x)$.

3. Soit $d(x)=f(x)-g(x)$.

a. Développer l'expression $(x-1)(x+2)$. En déduire que $d(x)=(x-1)(x+2)$.

b. Retrouver par le calcul les solutions de la question 2. a. et de la question 2. b.

4. L'affirmation « si a et b sont deux nombres réels tels que $-2\le a\le b\le 1$, alors on a l'inégalité $-1\le f(b)\le f(a)\le 15$ » est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.



Correction

1. a. $f(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=x^2-2\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}-\frac{5}{4}=x^2-3x+1$.

b. Comme $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$ est toujours positif ou nul, le minimum de *f* est obtenu pour $x=\frac{3}{2}$ et vaut alors $-\frac{5}{4}$.

c. Prenons $a<b<\frac{3}{2}\Rightarrow a-\frac{3}{2}<b-\frac{3}{2}<0\Rightarrow\left(a-\frac{3}{2}\right)^2>\left(b-\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}>\left(b-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\Rightarrow f(a)>f(b)$

donc *f* est décroissante.

$\frac{3}{2}<a<b\Rightarrow 0<a-\frac{3}{2}<b-\frac{3}{2}\Rightarrow\left(a-\frac{3}{2}\right)^2<\left(b-\frac{3}{2}\right)^2\Rightarrow\left(a-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}<\left(b-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\Rightarrow f(a)<f(b)$

donc *f* est croissante.

2. a. Les courbes se coupent en $x=-2$ et en $x=1$ donc l'équation $f(x)=g(x)$ a pour solutions -2 et 1.

b. La courbe de *f* est en dessous de la courbe de *g* lorsque $-2\le x\le 1$, donc l'inéquation $f(x)\le g(x)$ a pour solution l'intervalle $[-2\,;1]$.

3. a. $(x-1)(x+2)=x^2-x+2x-2=x^2+x-2$ et $d(x)=f(x)-g(x)=x^2-3x+1+4x-3=x^2+x-2$ donc $d(x)=(x-1)(x+2)$.

b. On a $f(x)=g(x)$ lorsque $d(x)=0$, soit lorsque $x=-2$ ou $x=1$; on a $f(x)\le g(x)$ lorsque $d(x)=(x-1)(x+2)\le 0$ d'où aprsè un tableau de signes la solution $[-2\,;1]$.

4. Lorsque $-2\le a\le b\le 1$, la fonction f est décroissante, on a donc $f(1)\le f(b)\le f(a)\le f(-2)$ or $f(1)=-1$ et $f(-2)=11$ d'où $-1\le f(b)\le f(a)\le 11$; comme par ailleurs $11<15$, ona bien $-1\le f(b)\le f(a)\le 15$.

33. Fonction : valeur absolue

Un campeur arrive dans un camping et souhaite installer sa tente dans un endroit bien choisi afin de faire le moins de distance possible lors de ces déplacements.

Notre campeur fréquente surtout trois lieux qui sont alignés :

- la piscine, où il se baigne deux fois par jour ;
- le restaurant, où il va manger trois fois par jour ;
- la douche, où il se rend une fois par jour.

Entre deux activités (piscine, restaurant, douche), notre campeur repasse toujours par sa tente.

Le restaurant est équidistant de la piscine et de la douche.

1. Ces trois lieux peuvent être considérés comme trois points P, R et D d'une droite graduée, d'abscisses respectives 0, 1 et 2.

Exprimer, à l'aide de la valeur absolue, la distance

- de la tente à la piscine TP
- de la tente au restaurant TR
- de la tente à la douche TD.

2. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction d par : $d(x) = 2|x| + 3|x-1| + |x-2|$.

a. Que représente $d(x)$?

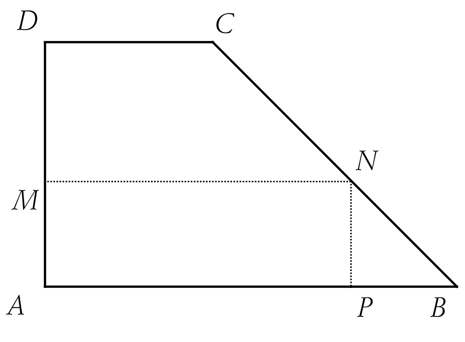
b. Calculer $d(0)$, $d(1)$ et $d(2)$. Que représentent ces trois nombres ?

c. A l'aide de la calculatrice, donner la valeur de x pour laquelle d est minimale. Quel endroit doit donc choisir le campeur pour installer sa tente ?

34. Fonction : 2nd degré (c)

ABCD est un trapèze rectangle tel que $AB = 6$ cm, $CD = 2$ cm, $AD = 4$ cm. M est un point de $[AD]$. On pose $AM = x$ cm.

On construit le rectangle *AMNP* inscrit dans *ABCD* comme sur la figure.



1. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB).

a. Montrer que le triangle BCH est isocèle rectangle.

b. Montrer que le triangle BPN est isocèle rectangle.

c. Montrer que $AM = BP = x$.

2. Quelles sont les valeurs possibles pour x ?

3. Démontrer que : aire $(AMNP) = 6x - x^2$.

4. a. Calculer l'aire du trapèze $ABCD$.

b. Calculer l'aire des triangles CDM et ABM.

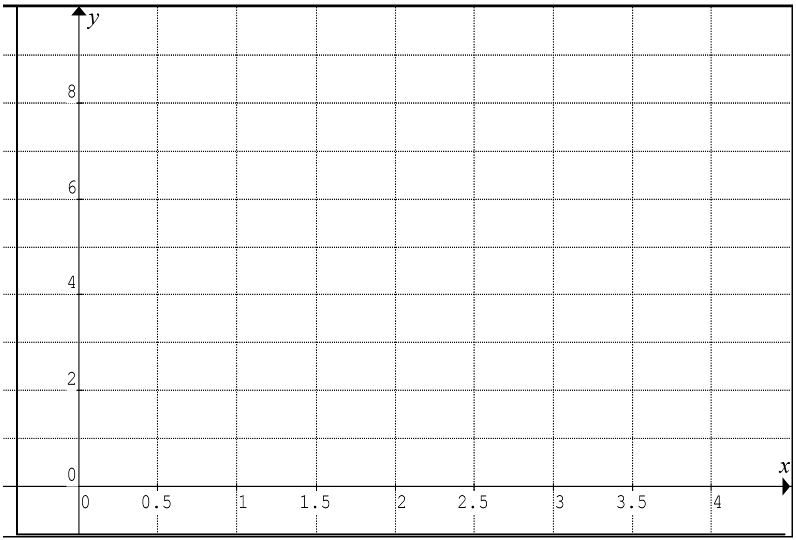
c. En déduire que : aire $(BCM) = 12 - 2x$.

5. On pose $f(x) = 6x - x^2$ et $g(x) = 12 - 2x$.

a. Utiliser la calculatrice pour compléter le tableau de valeurs de f :

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$									

b. Tracer la courbe de f dans le repère ci-dessous.



c. Tracer sur le même repère la représentation graphique de la fonction g.

d. Lire sur le graphique les coordonnées du point d'intersection K des deux courbes. Quels renseignements les coordonnées de ce point donnent-elles à propos des aires de BCM et $AMNP$?

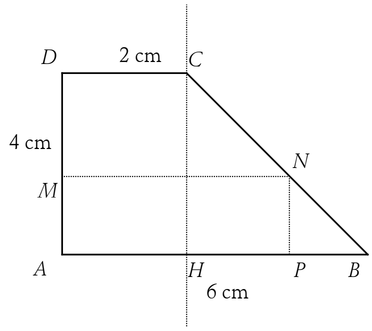
6. On se propose de déterminer par le calcul la valeur de x pour laquelle les aires de $AMNP$ et de BCM sont égales.

a. Développer $(x - 4)^2 - 4$.

b. Ecrire l'équation permettant de calculer x pour que les deux aires soient égales.

c. A l'aide de la réponse obtenue au 6. a., résoudre cette équation et conclure.

<u>Correction</u>



1. a. BCH est rectangle car (CH) est orthogonale à (AB) ; il est isocèle car

$$BH = AB - CD = 6 - 2 = 4 = AD = CH .$$

b. BPN est isocèle rectangle car les triangles BPN et BCH sont semblables.

c. Comme BPN est isocèle rectangle, on a $x = AM = PN = PB$.

2. Le point M peut varier entre A et D, donc $0 \le x \le 4$.

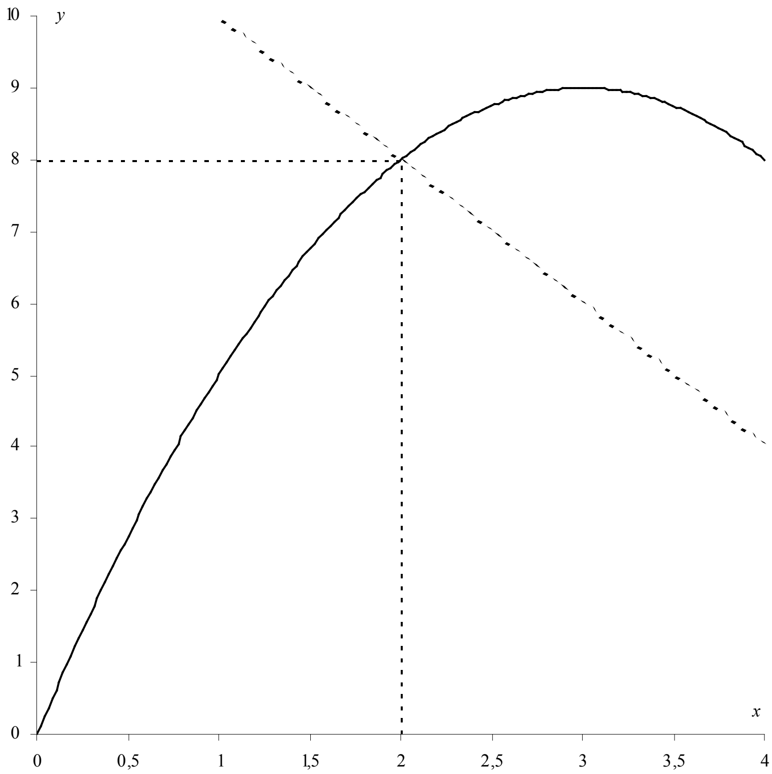
3. aire $(AMNP) = AM.AP = x(6-x) = 6x - x^2$.

4. a. Le trapèze $ABCD$ a pour aire $\frac{6+2}{2}.4 = 16 \text{ cm}^2$.

b. CDM a pour aire $\frac{1}{2}(4-x)2 = 4-x$, ABM a pour aire $\frac{1}{2}.6.x = 3x$.

c. $\text{aire}(BCM) = \text{aire}(ABCD) - \text{aire}(ABM) - \text{aire}(CDM) = 16 - 3x - (4-x) = 12 - 2x$.

5. $f(x) = 6x - x^2$ et $g(x) = 12 - 2x$.



d. K a pour coordonnées 2 et 8 : pour $x = 2$ on a donc égalité entre les aires de BCM et $AMNP$.

6. a. $(x-4)^2 - 4 = x^2 - 8x + 16 - 4 = x^2 - 8x + 12$.

b. Les deux aires sont égales lorsque $f(x)=g(x) \Leftrightarrow 6x-x^2=12-2x \Leftrightarrow x^2-8x+12=0$.

c. Il s'agit évidemment de la même chose, on a donc à résoudre : $(x-4)^2=4 \Rightarrow x-4=\pm 2 \Rightarrow x=6$ ou $x=2$, mais la solution 6 ne marche pas.

35. Fonction : 3ème degré

Soient a, b, 2 réels.

1. Vérifier que l'on a $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

2. Vérifier que l'on a $a^2+ab+b^2=(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2$.

3. En remarquant que $\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2$ est toujours positif, montrer que si $a \le b$ alors $a^3-b^3 \le 0$.

4. Qu'en déduit-on quand au sens de variation de la fonction Cube : $x \mapsto x^3$?

36. Fonction : fraction continue

1. Représenter sur le même graphique la parabole (P) d'équation $y=x^2$, l'hyperbole (H) $y=\frac{1}{x}$ et la droite (D) $y=x+1$.

2. Déterminer graphiquement les solutions des inéquations $x^2 \ge \frac{1}{x}$ et $x^2-x-1 \ge 0$.

3. Justifier que l'équation $x^2-x-1=0$ a deux solutions a et b comprises respectivement entre $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{2}$ pour a et entre $\frac{3}{2}$ et $\frac{5}{3}$ pour b.

4. En cherchant une méthode pour trouver de manière plus précise la valeur de b on tient le raisonnement suivant : puisque $b^2=b+1$, je peux écrire $b=1+\frac{1}{b}$ d'où $b=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}}$ puis $b=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{b}}}$, etc. Justifier les diverses étapes du raisonnement tenu.

5. Calculer les nombres $b_1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}$ et $b_2=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$. Est-ce que b_1 et b_2 sont de meilleures approximations de b que celles obtenues au 3. ?

37. Fonction : optimisation

Une boîte parallélépipédique à base carrée, d'un volume de 64 dm^3 est construite dans un matériau qui revient à 3 centimes le cm^2 pour le fond et le couvercle et à 2 centimes le cm^2 pour la surface latérale.

1. A combien revient un dm^2 de matériau pour le fond ? pour les côtés ? Combien coûterait une boîte de 20 cm de côté sur 30 cm de hauteur ?

2. Montrer que, en posant le côté du carré x et la hauteur de la boîte h, on a le volume $V=x^2h=64$ et on a la surface $S(x)=\frac{256}{x}+2x^2$. Quelles sont les valeurs maximales et minimales de x et h ?

3. Tracer la courbe représentant S sur l'intervalle]0, 4] (on prendra 2 cm pour 1 unité en abscisse et 1 cm pour 5 unités en ordonnée).

4. Trouver à la calculatrice et à 10^{-1} près la valeur de x pour laquelle la surface de la boîte est minimale. Dresser le tableau de variation de S sur [0, 4].

5. Donner alors le volume de la boîte correspondant à la surface minimale. Quel est alors le coût de revient de la boîte.

6. Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles on a $S(x) < 120$. Entre quelles valeurs évolue alors le coût de revient de la boîte ?

7. En fait on veut minimiser le coût de revient de la boîte. Quelle fonction devrait-on utiliser pour ce faire ?

38. Fonction : résolution d'équation

On veut résoudre à la calculatrice l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = x^3 - 1{,}01x^2 - x$.

1. Expliquer en traçant la fonction pourquoi il y a trois solutions. Vérifier qu'une des solutions est 0.

2. A l'aide du *zoom* ou du mode *trace*, donner des valeurs approchées à 10^{-2} près de ces solutions. Contrôlez votre résultat avec un calcul.

39. Distance d'un point à une droite (c)

Dans un repère, on considère le point $A(-1, 1)$ et la droite (D) d'équation $y = -2x$.

1. Soit M le point de (D) d'abcisse x. Exprimer AM^2 en fonction de x seulement.

2. Soit $f(x) = 5x^2 + 6x + 2$. Trouver a et b tels que $f(x) = 5\left((x+a)^2 + b\right)$. En déduire le sens de variation de f. Montrez que $f(x)$ est toujours strictement positive.

3. Montrer que AM^2 est minimum pour une valeur de x que l'on précisera. Quelles sont alors les coordonnées de M ? Aurait on pu le deviner ?

4. Déterminer à l'aide de votre calculatrice les valeurs de x pour lesquelles on a $f(x) < 2$. Quelle interprétation géométrique pouvez-vous donner de cette inégalité et de sa solution ?

<u>Correction</u>

1. M le point de (D) d'abcisse x a pour coordonnées $(x, -2x)$. On a en général $AM^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2$ et ici particulièrement $AM^2 = (x+1)^2 + (-2x-1)^2 = x^2 + 2x + 1 + 4x^2 + 4x + 1 = 5x^2 + 6x + 2$.

2. $f(x) = 5x^2 + 6x + 2$. $f(x) = 5\left((x+b)^2 + c\right) = 5x^2 + 10bx + 5b^2 + 5c$ d'où

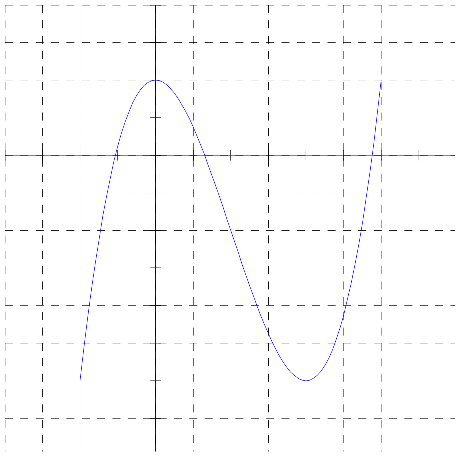
$$\begin{cases} 10b = 6 \\ 5(b^2 + c) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3}{5} \\ b^2 + c = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{9}{25} + c = \dfrac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{3}{5} \\ c = \dfrac{10}{25} - \dfrac{9}{25} = \dfrac{1}{25} \end{cases} \Rightarrow f(x) = 5\left[\left(x + \dfrac{3}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{25}\right].$$

f est donc décroissante pour $x < -\dfrac{3}{5}$ et croissante pour $x > -\dfrac{3}{5}$. Par ailleurs $\left(x + \dfrac{3}{5}\right)^2 + \dfrac{1}{25}$ est une somme de termes positifs et est donc positive. On peut remarquer que $AM = \sqrt{f(x)}$.

3. Comme $AM^2 = f(x)$, AM^2 est minimum pour $x = -\dfrac{3}{5}$ et son minimum est alors $f(-3/5) = 5\left[0 + \dfrac{1}{25}\right] = \dfrac{1}{5}$. Les coordonnées de M sont alors $\left(-\dfrac{3}{5} ; \dfrac{6}{5}\right)$ et c'est le point où (D) est le plus près de A.

4. On a $f(x) < 2$ lorsque $x \in \left]-\dfrac{6}{5} ; 0\right[$: pour ces x la distance entre (D) et A est inférieure à $\sqrt{2}$.

40. Courbe, équation, inéquation



Cette courbe est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$.

1. Décrire les variations de f.

2. Déterminer graphiquement une valeur approchée des antécédents de 1 puis toujours graphiquement une valeur approchée de l'image de 2.

3. Tracer la représentation graphique de la fonction g définie par $g(x) = x - 2$.

4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > g(x)$.

41. Tableau de variation,inéquation

Le tableau de variations suivant est celui d'une fonction f définie sur $[0\,;7]$ (*attention : f n 'est pas définie par intervalles*).

x	0	2	4	5	7
$f(x)$	-1 ↘	-3 ↗	0 ↗	2 ↘	0

1. Dessiner une courbe correspondant à ces données.

2. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$ (décrire les étapes).

3. Quel est l'ensemble des réels k tels que l'équation $f(x) = k$ ait une seule solution ¿ (justifier).

42. Courbe, équation, inéquation

Ci-dessous la parabole représentative de la fonction carré dans un repère orthogonal.

Utiliser cette représentation (et éventuellement le prolongement que l'on peut lui imaginer...) pour répondre aux questions suivantes :

1. Résoudre l'équation $x^2 = 4$.

2. Résoudre l'inéquation $x^2 \leq 1$.

3. Résoudre l'inéquation $x^2 > 4$.

4. Compléter : * si $1 < x < 2$ alors $x^2 \in$ ....

   * si $x < -2$ alors $x^2 \in$ ....

* si $x \geq -1$ alors $x^2 \in$ ....

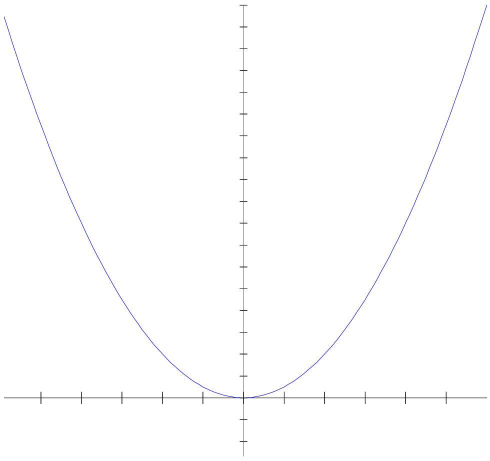
* si $x \in \left[\frac{1}{2}\,;3\right]$ alors $x^2 \in$ ....

* si $x \in \left]-\infty\,;1\right]$ alors $x^2 \in$ ....

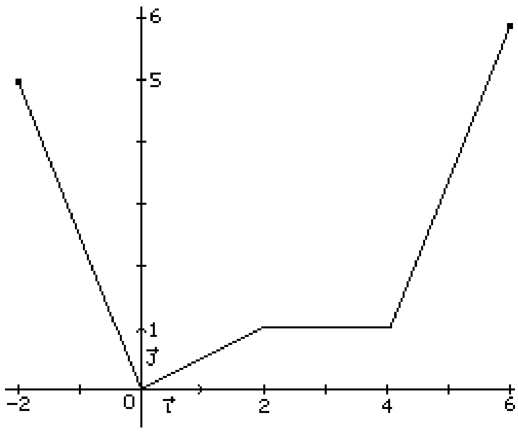
* si $x \in \left]-2\,;5\right]$ alors $x^2 \in$ ....

* si $x \in \left[2\,;+\infty\right[$ alors $x^2 \in$ ....

5. Résoudre (graphiquement) l'équation $x^2 = x$.
6. Résoudre (toujours graphiquement) l'inéquation $x^2 < 2x$.
7. Contrôler les résultats de 5. et 6. par une résolution algébrique



43. Fonction affine par morceaux



1. Pourquoi la représentation graphique ci-contre est bien celle d'une fonction ?

On nomme f cette fonction.

2. Quel est l'ensemble de définition de f ?
3. De quel type est cette fonction ? Pourquoi ?
4. Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 3$ et $f(x) = 5$.
5. Soit α un réel. Pour quelles valeurs de α l'équation $f(x) = \alpha$ n'a-t'elle pas de solutions ?

44. Fonction : inéquations (voir également équations-inéquations)

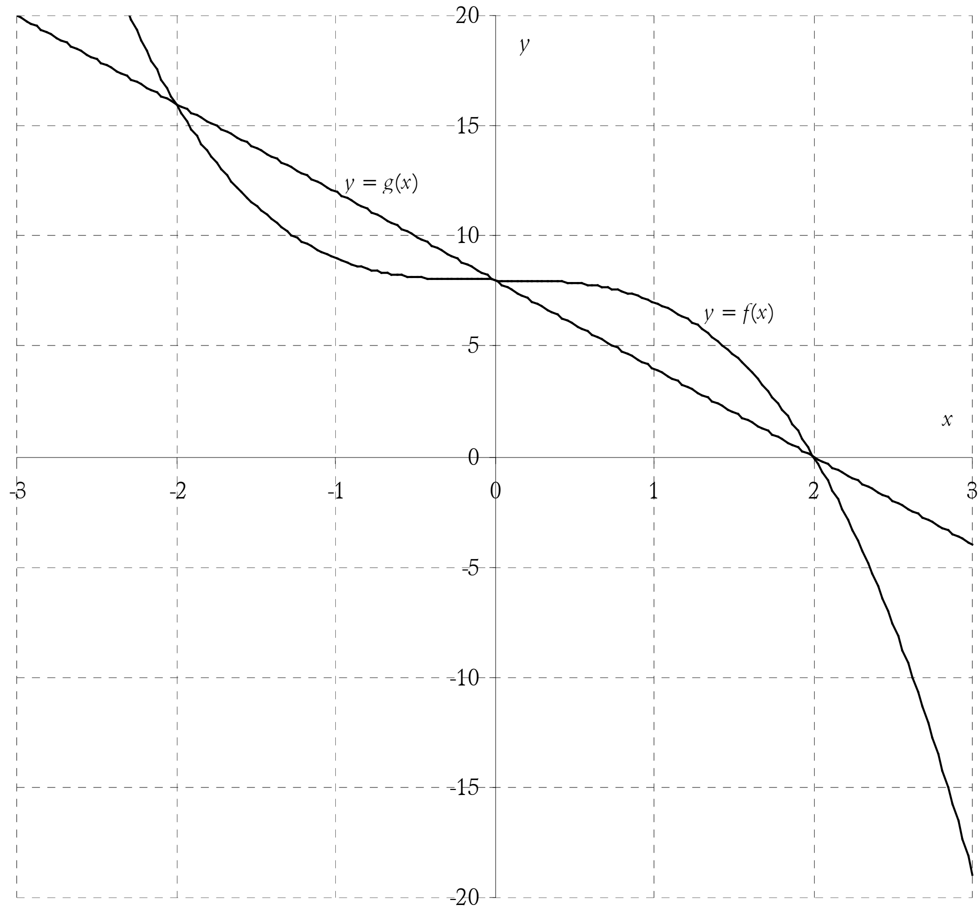
Soient les fonctions $f(x)=8-x^3$ et $g(x)=-4x+8$ représentées ci-dessous.

1. a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$.

b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$.

2. Factoriser l'expression $f(x)-g(x)$.

3. Résoudre alors par le calcul l'équation et l'inéquation du 1.



On complétera les figures 2 et 3 jointes que l'on rendra avec la copie.

45. Fonction : inéquations et degré 3 (c)

Le but de l'exercice est de déterminer les dimensions d'un rectangle inscrit dans une parabole de sorte que son aire soit maximale. Nous nous intéresserons également à quelques questions subsidiaires.

1. On considère la parabole représentée par la fonction $f(x)=-x^2+9$ sur l'intervalle $[-5 ; 5]$.

a. Etudier les variations de f sur l'intervalle $[-5 ; 0]$ puis sur $[0 ; 5]$, dresser son tableau de variations et tracer sa courbe représentative (P) sur la feuille jointe (*figure 2*).

b. On considère le rectangle $MNPQ$ où les points ont pour coordonnées : $M(x ; f(x))$, $N(-x ; f(-x))$, $P(-x ; 0)$ et $Q(x ; 0)$. Tracer $MNPQ$ pour $x = 2$ puis pour $x = 4$.

2. On prend x dans l'intervalle $[0 ; 3]$.

a. Montrer que l'aire de $MNPQ$ est donnée par $g(x)=-2x^3+18x$.

b. Calculer les valeurs exactes de cette aire pour $x = 1$, $x = \sqrt{3}$, $x = 2$, $x = 3$.

3. La courbe représentative de g est donnée sur la figure 3. Faire le tableau de variation de g sur [0 ; 3].

4. A l'aide de votre calculatrice donnez une valeur approchée à 10^{-2} près du maximum de $g(x)$ et de la valeur x_0 pour laquelle ce maximum est atteint. Quelle vous semble être la valeur exacte de x_0 ?

5. Résoudre graphiquement l'inéquation $g(x) \le 12$.

6. On prend x réel quelconque : résoudre par le calcul l'inéquation $g(x) \le 0$. A votre avis pour quelle raison s'est-on limité à l'intervalle [0 ; 3] au début de cette partie ?

Figure 2

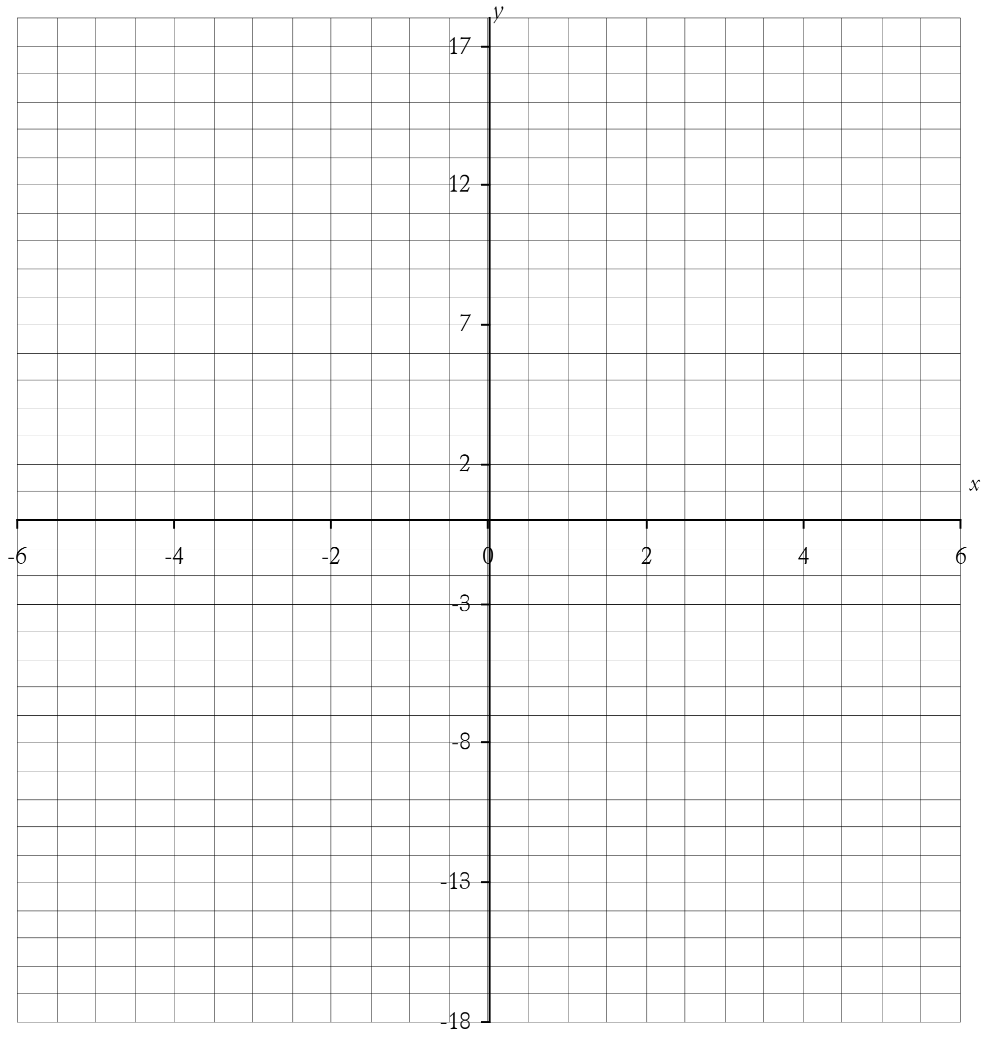
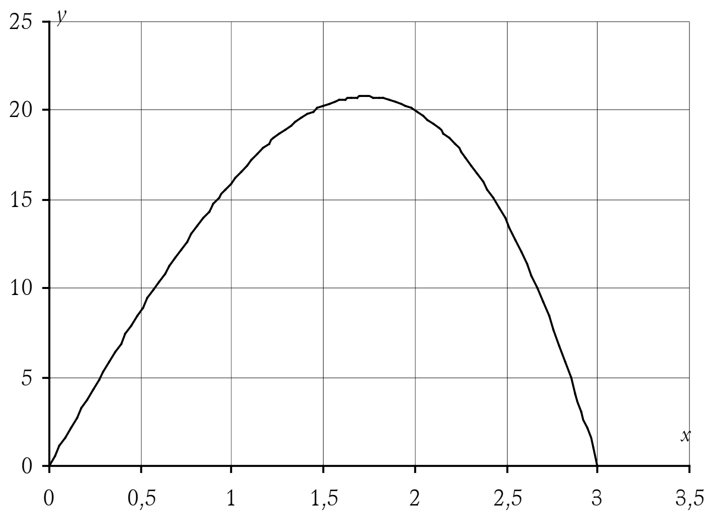


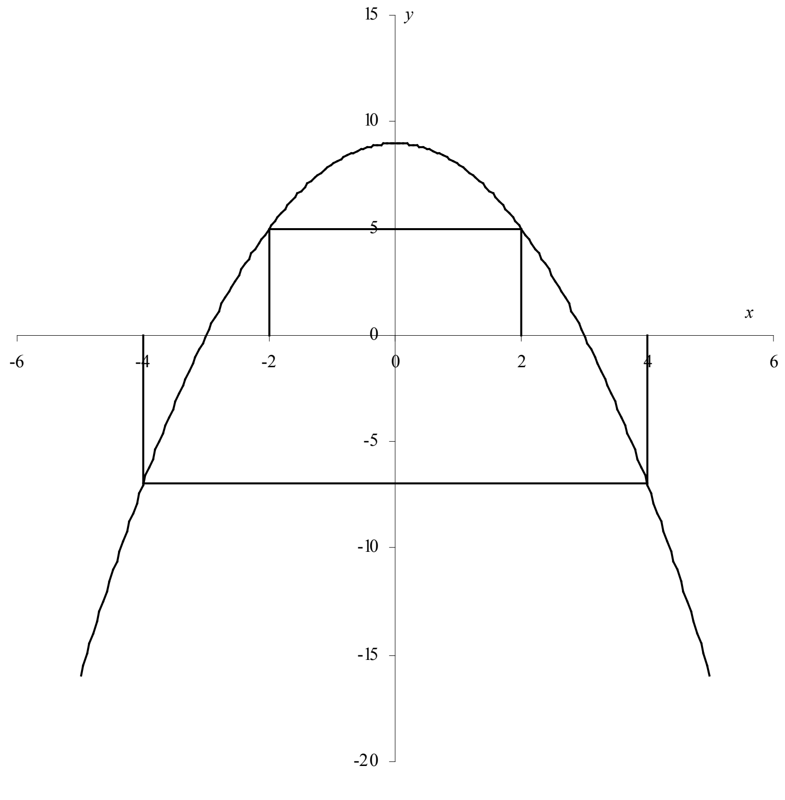
Figure 3



Correction

1. a. Lorsque $a < b < 0$, on a $a^2 > b^2 \Leftrightarrow -a^2 < -b^2 \Leftrightarrow -a^2 + 9 < -b^2 + 9 \Leftrightarrow f(a) < f(b)$ donc f est croissante ; lorsque $0 < a < b$ f est décroissante.

b.



2. a. Le rectangle $MNPQ$ a pour largeur $2x$ et pour hauteur $f(x) = -x^2 + 9$; son aire est donc $g(x) = 2x(-x^2 + 9) = -2x^3 + 18x$.

b. $x = 1$, $g(1) = -2+18 = 16$; $x = \sqrt{3}$, $g(\sqrt{3}) = -2(3\sqrt{3})+18\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$; $x = 2$, $g(2) = -2.8+18.2 = -16+36 = 20$ et $x = 3$, $g(3) = -54+54 = 0$.

3.

x	0		1,7		3
g'		+	0	−	
g	0	↗	21	↘	0

4. Sans être très malin, on se doute que le maximum est obtenu lors que $x = \sqrt{3}$ … et le maximum de $g(x)$ est alors $12\sqrt{3}$.

5. $g(x) \le 12 \Leftrightarrow x \in [0\,;0,7] \cup [2,7\,;3]$.

6. $g(x) \le 0 \Leftrightarrow -2x^3+18x \le 0 \Leftrightarrow -2x(x^2-9) \le 0 \Leftrightarrow -2x(x-3)(x+3) \le 0$. On fait le tableau de signes, ce qui donne : $x \in [-3\,;0] \cup [3\,;+\infty[$.

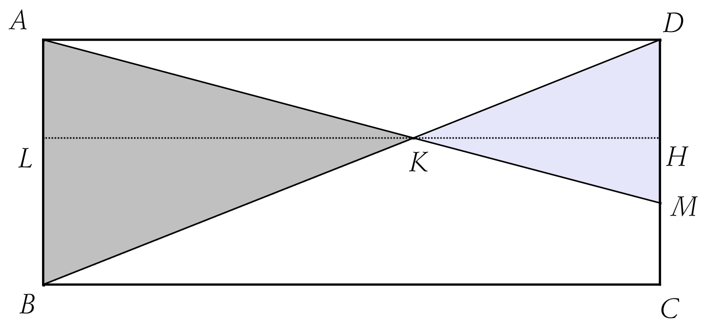
On s'est limité à [0 ; 3] car sinon on aurait pu avoir une aire négative… ce qui n'est pas terrible.

46. Similitude (c)

Soit *ABCD* un rectangle tel que $AB = 1$ et $AD = 2$.

Soit M un point du segment [*DC*]. On pose $DM = x$.

Le segment [*AM*] coupe la diagonale [*BD*] en un point *K*. Le point *K* se projette orthogonalement en *H* sur la droite (*DC*) et en *L* sur la droite (*AB*) (inutile de refaire la figure).



1. Montrer que les triangles *ABK* et *MDK* sont semblables. Vérifier que le rapport de similitude vaut x .

2. On pose $KH = h$.

a. Exprimer *KL* en fonction de h.

b. Démontrer que $x(2-h) = h$.

c. En déduire que $h = \dfrac{2x}{x+1}$.

3. Exprimer en fonction de x les aires des triangles *DMK* et *ABK*.

4. Montrer que l'aire de la portion du plan délimitée par la réunion des triangles *ABK* et *DMK* est $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

5. A l'aide de votre calculatrice déterminer la valeur de x pour laquelle cette aire est minimale et donner une valeur approchée de ce minimum.

Correction

1. $\widehat{AKB}=\widehat{DKM}$ car opposés par le sommet ; $\widehat{ABK}=\widehat{KDM}$ car alternes-internes ; les triangles sont semblables et $s:\begin{cases}A\to M\\K\to K\\B\to D\end{cases}$; le rapport de similitude est alors $\frac{MK}{AK}=\frac{MD}{AB}=\frac{KD}{KB}$ or $\frac{MD}{AB}=\frac{x}{1}=x$.

2. $KH=h$.

a. Comme $AD=2$, on a $KL=2-KH=2-h$.

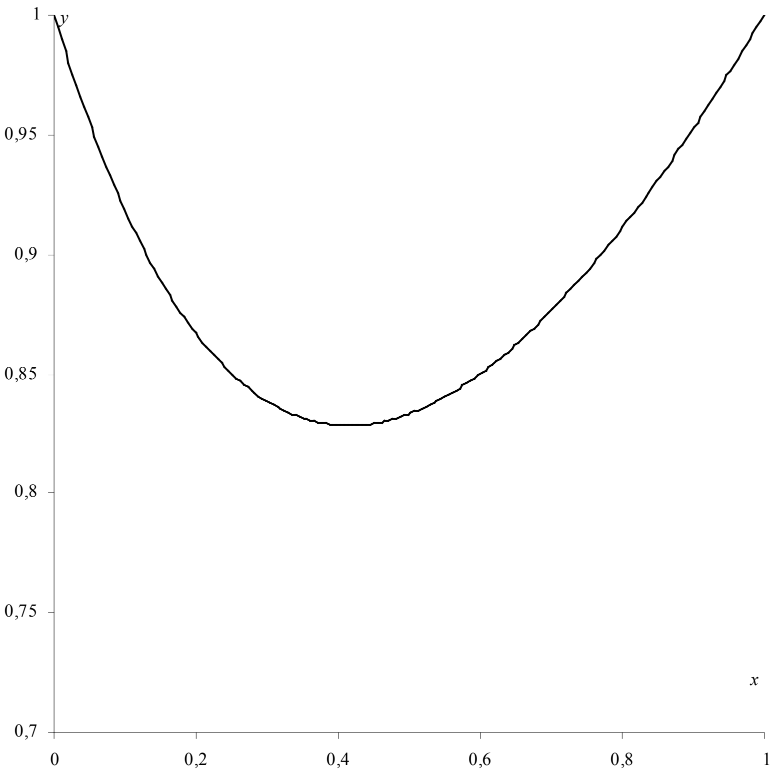
b. Evidemment les hauteurs des triangles AKB et DKM sont dans le même rapport de similitude que les triangles eux-mêmes, soit $\frac{KH}{KL}=x\Leftrightarrow\frac{h}{2-h}=x\Leftrightarrow h=(2-h)x$.

c. $h=(2-h)x\Leftrightarrow h=2x-hx\Leftrightarrow h+hx=2x\Leftrightarrow h(1+x)=2x\Leftrightarrow h=\frac{2x}{1+x}$.

3. $\text{Aire}(DMK)=\frac{1}{2}DM.KH=\frac{1}{2}x.h=\frac{1}{2}\frac{x.2x}{1+x}=\frac{x^2}{1+x}$; $\text{Aire}(ABK)=\frac{1}{2}.AB.KL=\frac{1}{2}.1.(2-h)=\frac{1}{1+x}$.

4. La somme des deux aires est évidemment $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}$.

5.



Le minimum est aux environs de 0,4 et vaut environ 0,83.

47. Fonction : inéquations

Soit la fonction $f(x)=-2x^2-4x+6$.

1. Tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormal (unités=1 cm).
2. Etudier ses variations et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)<0$.

4. Tracer sur la même figure la droite (AB) où A a pour coordonnées (–2, 4) et B(1, 0) ; trouvez graphiquement les points d'intersection de (C) et de (AB).

5. Déterminez l'équation de la droite (AB) et vérifiez par le calcul ce que vous avez trouvé au 4.

6. Déterminez graphiquement les abscisses des points du plan pour lesquels la droite (AB) est au dessus de (C).

48. Tangente à la parabole et à l'hyperbole (c)

1. Tracer dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm) les courbes $H\left(y=\dfrac{1}{x}\right)$, $P\left(y=x^2\right)$ et $D(y=x)$.

2. Résoudre graphiquement et par le calcul les inéquations : $x<x^2$, $x<\dfrac{1}{x}$ et $x^2<\dfrac{1}{x}$.

3. On cherche s'il existe un point de H et un point de P ayant des tangentes parallèles.

Chercher graphiquement une réponse à la question…

4. Analytiquement le problème consiste à trouver une équation de la tangente en un point quelconque de chacune de ces courbes puis à identifier leurs coefficients directeurs de manière à répondre à la question.

a. <u>Tangente à P</u> : on considère un point A de coordonnées $(a\,;a^2)$ de P et une droite D_t de coefficient directeur t passant par A. Montrer que l'équation de D_t est : $y=tx-at+a^2$.

b. En règle générale cette droite recoupe P en un autre point : montrer que cet autre point a pour abscisse $x=t-a$; déterminer son ordonnée.

c. Pour quelle valeur de t Dt ne recoupe-t-elle pas P ? En déduire l'équation de la tangente T à P en A.

d. Tracer les tangentes à P aux points d'abscisses −2, −1, 1 et 2.

5. <u>Tangente à H</u> : la méthode précédente pourrait éventuellement s'appliquer, mais elle manque de généralité. On va procéder autrement : on considère deux points de H d'abscisses positives $U\left(u\,;\dfrac{1}{u}\right)$ et $V\left(v\,;\dfrac{1}{v}\right)$.

a. Déterminer le coefficient directeur de la droite (UV) et montrer que cette droite a pour équation $y=-\dfrac{1}{uv}x+\dfrac{1}{u}+\dfrac{1}{v}$.

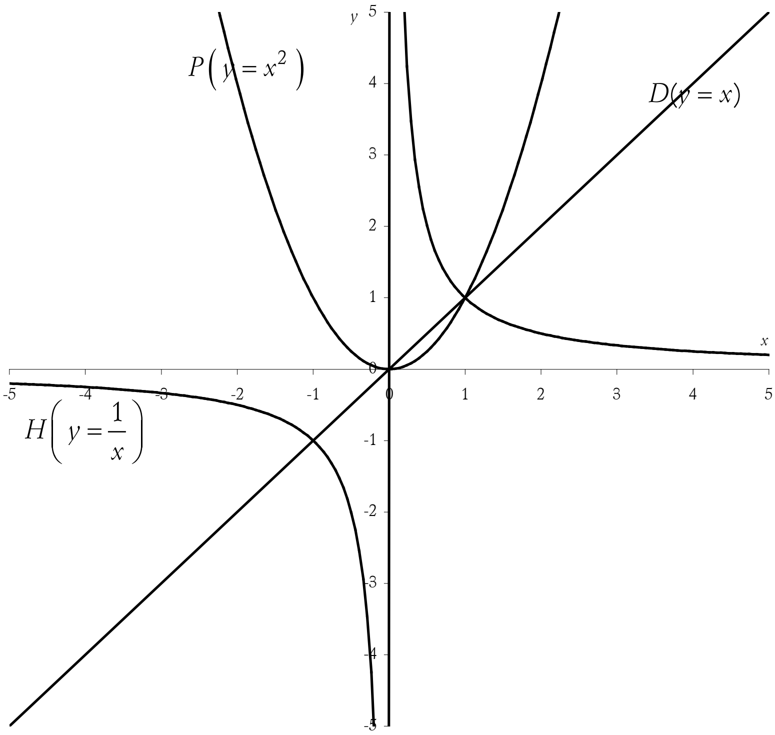
b.On considère maintenant que V se confond avec U et que la droite (UV) se confond avec la tangente T' à H en U : donner une équation de T'. Pour quelle raison a-t-on considéré u et v positifs ?

c. Tracer les tangentes à H aux points d'abscisses −2, −1, 1 et 2.

6. Vérifier que pour répondre à la question initiale il faut résoudre l'équation $-\dfrac{1}{x^2}=2x$. En déduire les coordonnées de l'unique point satisfaisant et tracer les tangentees correspondantes.

<u>Correction</u>

1.



2. Graphiquement : $x<x^2$ lorsque D est en dessous de P, soit pour $x\in]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$;

$x<\frac{1}{x}$ lorsque D est en dessous de H, soit pour $x\in]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$;

et $x^2<\frac{1}{x}$ lorsque P est en dessous de H, soit pour $x\in]0\,;1[$.

Par le calcul :

$x<x^2\Leftrightarrow x-x^2<0\Leftrightarrow x(1-x)<0$; on fait le T.S, ce qui donne $x\in]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$;

$x<\frac{1}{x}\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}<0\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x}<0\Leftrightarrow\frac{(x-1)(x+1)}{x}<0$; on fait le T.S, ce qui donne $x\in]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$;

$x^2<\frac{1}{x}\Leftrightarrow\frac{x^3-1}{x}<0$; or $x^3-1<0\Leftrightarrow x^3<1\Leftrightarrow x<1$; on a donc le T.S. suivant et le résultat $x\in]0\,;1[$.

x		0		1	
x^3-1	$-$		$-$	0	$+$
x	$-$	0	$+$		$+$
quotient	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$

49. Fonctions et inéquations 1 (c)

Soit la fonction f définie par $f(x)=-x+\frac{6}{x+1}$. C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unités : 2 cm).

1. Quel est son ensemble de définition ?

2. Montrer que f est décroissante lorsque $x<-1$. Qu'en est-il lorsque $x>-1$?

3. Déterminer par le calcul la position C par rapport à la droite D $(y=-x)$.

4. Tracer D et C.

5. Déterminer graphiquement la position de C par rapport à (Ox).

6. Quelles inéquations doit-on résoudre pour répondre par le calcul à la question 5 ?

7. Vérifier que $f(x)=\dfrac{-x^2-x+6}{x+1}$ puis que $-x^2-x+6=-\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{25}{4}\right]$. Résoudre alors par le calcul l'inéquation $f(x)\geq 0$ et conclure quand à la question 5.

Correction

1. $E_f=\mathbb{R}-\{-1\}$.

2. Prenons a et b tels que $a<b<-1$, alors $-a>-b>1$ et

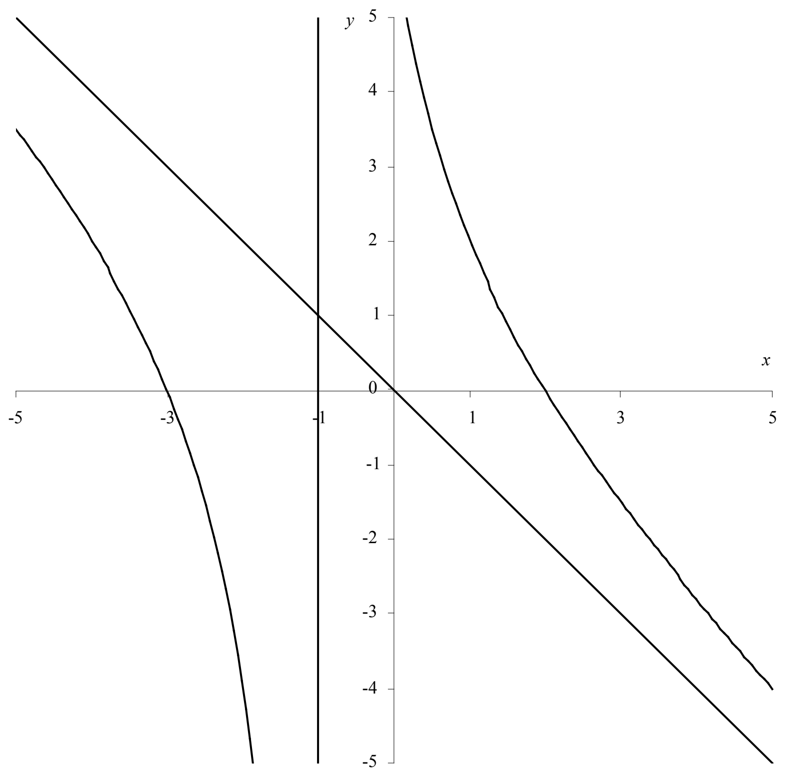
$a+1<b+1<0\Rightarrow \dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{b+1}\Rightarrow \dfrac{6}{a+1}>\dfrac{6}{b+1}$;

en ajoutant les deux inégalités, on a $-a+\dfrac{6}{a+1}>-b+\dfrac{6}{b+1}\Leftrightarrow f(a)>f(b)$ donc l'inégalité de départ a été changée, la fonction est décroissante.

Lorsque $x>-1$ c'est bien évidemment la même chose, cette condition n'intervenant pas.

3. Il nous faut le signe de la différence $f(x)-(-x)=\dfrac{6}{x+1}$: lorsque $x>-1$, $\dfrac{6}{x+1}>0$ donc C est au dessus de D ; lorsque $x<-1$, $\dfrac{6}{x+1}<0$ donc C est en dessous de D.

4.



5. Lorsque $x \in]-\infty\,;-3] \cup]-1\,;2]$ C est au-dessus de (Ox) ; lorsque $x \in [-3\,;-1[\cup [2\,;+\infty[$ C est en dessous de (Ox).

6. On doit résoudre $f(x) \geq 0$ pour savoir quand C est au-dessus de (Ox) ; $f(x) \leq 0$ pour savoir quand C est en dessous de (Ox).

7. On calcule : $f(x) = -x + \dfrac{6}{x+1} = \dfrac{-x(x+1)+6}{x+1} = \dfrac{-x^2-x+6}{x+1}$; puis on vérifie en développant :

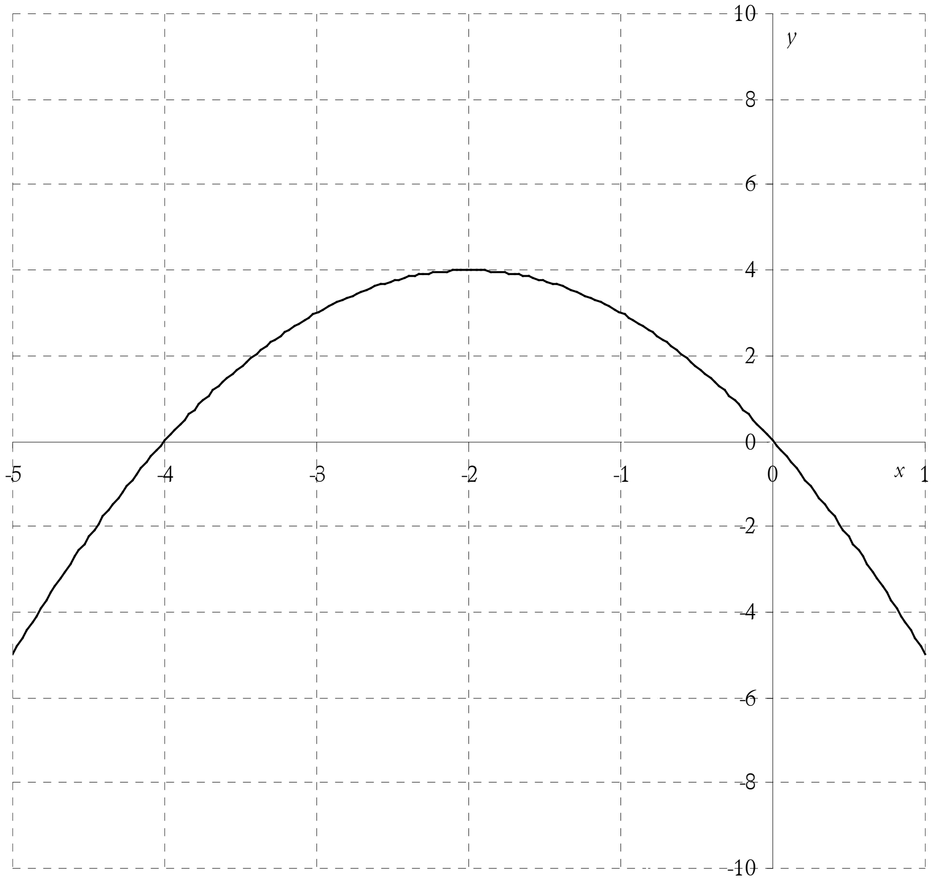
$$-\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] = -\left[x^2 + 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} - \frac{25}{4}\right] = -\left[x^2 + x - \frac{24}{4}\right] = -x^2 - x + 6 \ ;$$

enfin on factorise : $-\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}\right] = -\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{5}{2}\right]\left[\left(x+\dfrac{1}{2}\right)-\dfrac{5}{2}\right] = -(x+3)(x-2)$, ce qui donne pour *f* : $f(x) = \dfrac{-(x+3)(x-2)}{x+1}$. Il reste à faire le tableau de signes et l'on retrouve le résultat précédent.

x		-3		-1		2	
$-(x+3)$	$+$	0	$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

50. Fonctions et inéquations 2 (c)

On munit le plan muni du repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité 2 cm ci-dessous dans lequel figure C_f la courbe représentative de la fonction *f*. Et on définit sur $[-5\,;\,1]\backslash\{-1\}$ la fonction *g* par $g(x) = 2 - \dfrac{2}{x+1}$ dont la courbe représentative est notée C_g.



<u>A. Étude de la fonction f</u>

1. Par simple lecture graphique :

a. Dresser le tableau des variations de f. Déterminer les extremums de f et les valeurs en lesquelles ils sont atteints.

b. Préciser le signe de $f(x)$ en précisant clairement votre démarche.

2. On admet par la suite que sur $[-5\ ;\ 1]$, $f(x) = -x^2 - 4x$. Retrouver par le calcul, le signe de $f(x)$.

<u>B. Étude de la fonction g</u>

1. Déterminer les variations de g sur $[-5\ ;\ -1[$ et sur $]-1\ ;\ 1]$. On dressera le tableau des variations de g.

2. a. Dresser le tableau de valeurs (arrondies au centième) de g sur $[-5\ ;\ 1]\backslash\{-1\}$ par pas de 0,5.

b. Tracer, dans le repère, la courbe C_g avec soin.

<u>C. Positions relatives des courbes</u>

1. Montrer que $f(x) - g(x) = \dfrac{-x^3 - 5x^2 - 6x}{x+1}$.

2. Développer l'expression $x(x + 2)(x + 3)$. En déduire une factorisation de $f(x) - g(x)$.

3. Déterminer alors par le calcul les positions relatives des courbes C_f et C_g sur $[-5\ ;\ 1]\backslash\{-1\}$.

Correction

A. 1. a. Par simple lecture graphique, on a le tableau ci-contre.

x	-5		-2		1
$f(x)$			4		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	-5				-5

On déduit du tableau de variations de f que le maximum de f est 4, atteint en -2 et que le minimum de f est -5 atteint en -5 et en 1.

b. La courbe de f est en-dessous de l'axe des abscisses pour $x \in [-5\,;\,-4[$ puis pour $x \in\,]0\,;\,1]$.

La courbe de f est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x \in\,]-4\,;\,0[$.

La courbe de f intercepte l'axe des abscisses en -4 et en 0.

x	-5		-4		0		1
$f(x)$		$-$		$+$		$-$	

2. $f(x)=-x^2-4x=-x(x+4)$. Les racines de f sont donc -4 et 0 : $-x = 0$ donne $x = 0$ et $x + 4 = 0$ donne $x = -4$.

On retrouve donc le tableau de signe ci-contre.

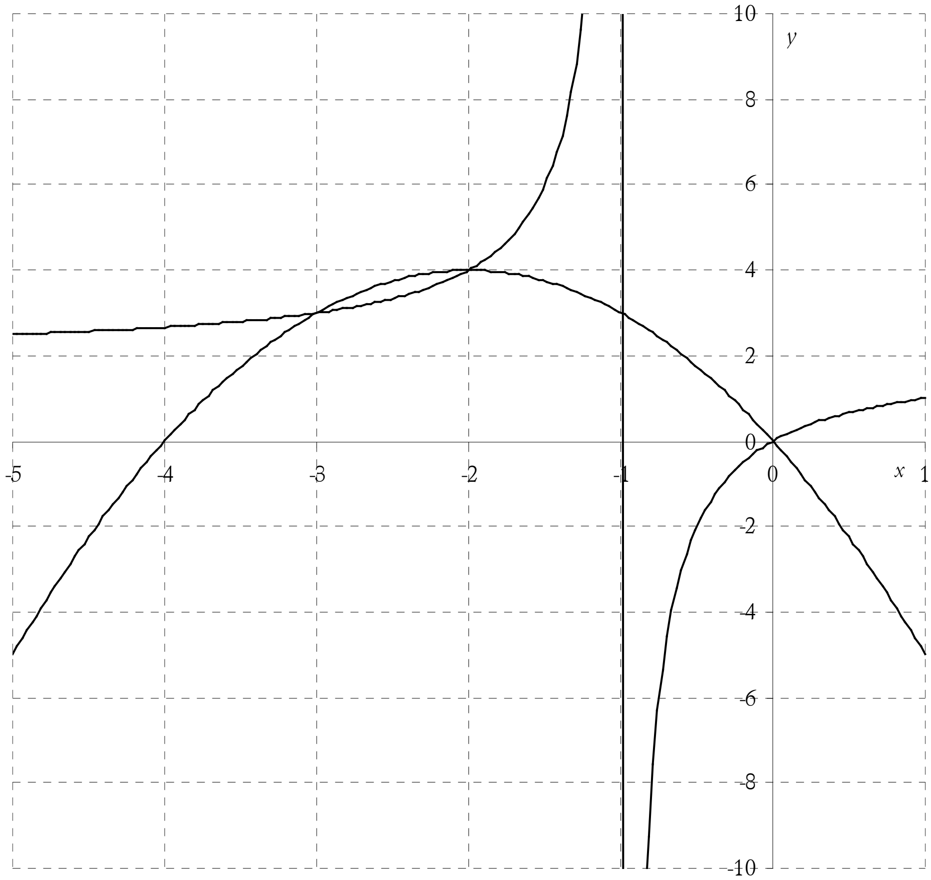
x	-5		-4		0		1
$-x$		$+$		$+$		$-$	
$x+4$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$		$+$		$-$	

B. 1. Sur $[-5\,;\,-1[$: soit $a < b < -1$, alors $a + 1 < b + 1 < 0$ puis $\dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{b+1}$, $-\dfrac{2}{a+1}<-\dfrac{2}{b+1}$, $2-\dfrac{2}{a+1}<2-\dfrac{2}{b+1}$; donc $g(a) < g(b)$ et g est croissante sur $[-5\,;\,-1[$.

Sur $]-1\,;\,1]$: soit $-1 < a < b$, $0 < a + 1 < b + 1$, $\dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{b+1}$, $-\dfrac{2}{a+1}<-\dfrac{2}{b+1}$, $2-\dfrac{2}{a+1}<2-\dfrac{2}{b+1}$ donc $g(a) < g(b)$, g est croissante sur $]-1\,;\,1]$.

x	-5		-1		1
$g(x)$			$\Vert$		1
		$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$	
	$2{,}5$		$\Vert$		

2. a. & b. Voir graphique



Valeurs arrondies à 10^{-4} près.

x	-5	$-4{,}5$	-4	$-3{,}5$	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1
$g(x)$	2,5	2,5714	2,6667	2,8	3	3,3333	4	6	-2	0	0,6667	1

C. 1. $f(x)-g(x)=-x^2-4x-\dfrac{2x}{x+1}=\dfrac{(-x^2-4x)(x+1)-2x}{x+1}=\dfrac{-x^3-4x^2-x^2-4x-2x}{x+1}=\dfrac{-x^3-5x^2-6x}{x+1}$.

2. $x(x+2)(x+3)=(x^2+2x)(x+3)=x^3+3x^2+2x^2+6x=x^3+5x^2+6x$. On déduit des deux questions précédentes que $f(x)-g(x)=\dfrac{-x(x+2)(x+3)}{x+1}$.

3. Les racines du numérateur sont 0, -2 et -3. Et on dresse le tableau de signes suivant :

x	-5		-3		-2		-1		0		1
$-x$		$+$		$+$		$+$		$+$		$-$	
$x+2$		$-$		$-$		$+$		$+$		$+$	
$x+3$		$-$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$x+1$		$-$		$-$		$-$		$+$		$+$	
$f(x)-g(x)$		$-$		$+$		$-$	‖	$+$		$-$	

On trouve donc par le calcul que

C_f est en-dessous de C_g pour $x\in[-5\,;-3[\cup]-2\,;-1[\cup]0\,;1]$.

C_f est au-dessus de C_g pour $x \in \,]-3\,;\,-2[\,\cup\,]-1\,;\,0[$.

C_f intercepte C_g en -3 , en -2 et en 0 ce qui confirme bien ce qu'on voit sur les courbes.

51. Triangle et 2nd degré (c)

Une unité étant choisie, soit un segment [*AB*] de longueur 10, *M* un point du segment [*AB*]. Soient deux points *R* et *P* tel que les triangles *AMR* et *MBP* soient équilatéraux, on se propose dans ce problème d'étudier l'aire du triangle *MRP* lorsque *M* varie sur le segment [*AB*].

A.1. Soit *Q* l'intersection des droites (*AR*) et (*BP*). Montrer que le triangle *ABQ* est équilatéral.

2. Quel est la nature du quadrilatère *MPQR*, justifier votre réponse.

B. Soit x la longueur *AM* et f la fonction qui à x associe l'aire du triangle *MPR*.

1. Sur quel intervalle la fonction f est-elle définie ?

2. Déterminer l'aire des triangles *AMR*, *MPB* et *ABQ* en fonction de x.

3. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 10] on a $f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(10x-x^2)$.

C. 1. Dresser un tableau de valeurs de f avec environ une quinzaine de valeurs de x judicieusement choisies.

2. Tracer la représentation graphique de f dans un repère du plan (O, I, J) (OI=1 cm et OJ=1 cm).

3. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 10] on a $f(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{4}(x-5)^2+25\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

En déduire la valeur de l'aire maximale de *ABQ* et pour quelle valeur de *AM* elle est atteinte ? Retrouver graphiquement ce résultat.

4. Dresser le tableau de variation de f.

Correction

A. 1. ARM est un triangle équilatéral par conséquent l'angle MAR mesure 60°. MBP est aussi un triangle équilatéral par conséquent l'angle MPB mesure aussi 60°.

Dans le triangle ABQ on a : $\widehat{BAQ}=\widehat{MAR}=60°$, $\widehat{ABQ}=\widehat{MBP}=60°$.

la somme des angles d'un triangle étant de 180°, l'angle $\widehat{AQB}$ mesure aussi 60°. Le triangle AQB est donc un triangle équilatéral.

2. Les angles $\widehat{AMR}$ et $\widehat{MBP}$ ont la même mesure de 60°, ils sont donc correspondants, les droites (MR) et (BP) sont alors parallèles. Ainsi les côtés [MR] et [PQ] du quadrilatère MPQR sont parallèles, de la même façon les côtés [RQ] et [MP] sont parallèles.

Le quadrilatère MPQR est un parallélogramme car il a ses côtés opposés parallèles.

B. 1. M est sur le segment [AB] de longueur 10, la longueur x du segment [AM] peut alors prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 10. f est donc définie sur l'intervalle [0 ; 10] .

2. Formule de la longueur de la hauteur d'un triangle équilatéral de côté c : $c\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Formule de l'aire d'un triangle équilatéral de côté c : $A=\dfrac{c}{2}\times c\dfrac{\sqrt{3}}{2}=c^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Aire du triangle AMR de côté x : $A_{AMR}=x^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

aire du triangle MPB de côté $(10-x)$: $A_{MPB}=(10-x)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$;

aire du triangle ABQ de côté 10 : $A_{ABQ}=100\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

3. Sachant que MPQR est un parallélogramme on a :

$$A_{MPR}=\frac{1}{2}A_{MPQR}\Leftrightarrow A_{MPR}=\frac{1}{2}(A_{ABQ}-A_{AMR}-A_{MPB})\Leftrightarrow A_{MPR}=\frac{1}{2}\left[100\frac{\sqrt{3}}{4}-x^2\frac{\sqrt{3}}{4}-(10-x)^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right]$$

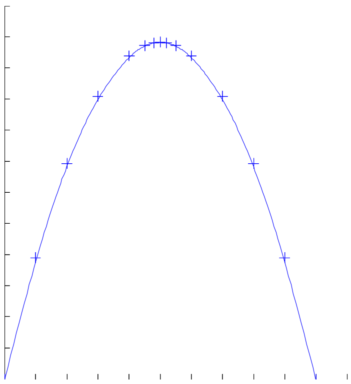
$$\Leftrightarrow A_{MPR}=\frac{\sqrt{3}}{8}\left[100-x^2-(100-20x+x^2)\right]\Leftrightarrow A_{MPR}=\frac{\sqrt{3}}{8}(20x-2x^2)\Leftrightarrow A_{MPR}=\frac{\sqrt{3}}{4}(10x-x^2).$$

D'où $f(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}(10x-x^2)$.

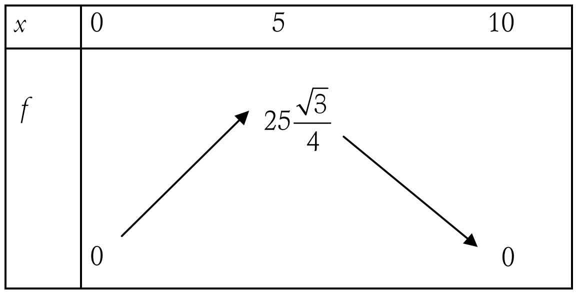
C. 1.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	4,5	5,5	4,8	5,2
$f(x)$	0	3,9	6,9	9,1	10,4	10,82	10,4	9,1	6,9	3,9	0	10,72	10,72	10,81	10,81

2.



4.



3. On a pour tout nombre réel x de l'intervalle [0 ; 10] :

$$-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-5)^2+25\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-(x-5)^2+25\right]\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-5)^2+25\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\left[-(x^2-10x+25)+25\right]$$

$$\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-5)^2+25\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}(10x-x^2)\Leftrightarrow-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-5)^2+25\frac{\sqrt{3}}{4}=f(x).$$

On a $-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-5)^2\le 0$ d'où $-\frac{\sqrt{3}}{4}(x-5)^2+25\frac{\sqrt{3}}{4}\le 25\frac{\sqrt{3}}{4}$ autrement dit $f(x)\le 25\frac{\sqrt{3}}{4}$; comme $f(5)=25\frac{\sqrt{3}}{4}$, on en déduit que $25\frac{\sqrt{3}}{4}$ est un maximum pour f atteint en 5.

52. Aire d'un triangle rectangle (1)

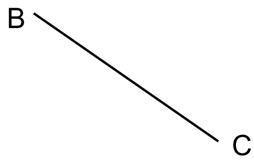
1. On donne BC = 5 cm . Construire sur la figure ci-contre **uniquement à la règle et au compas** un point D tel que le triangle DBC soit rectangle en D . Le point D est-il unique ?

2. On pose DB = x . Entre quelles valeurs x varie-t-il ?

3. Exprimer la longueur DC en fonction de x .

4. En déduire l'aire du triangle DBC en fonction de x. On la notera $A(x)$.

5. Compléter le tableau suivant :



Valeur de x (cm)	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,25	3,5	3,75	4	4,25	4,5
Valeur de DC (cm)												
Aire de DBC (cm²)												

6. Représenter graphiquement les points de ce tableau : le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Les unités graphiques sont : 2 cm pour une unité sur l'axe des abscisses et 2 cm pour une unité sur l'axe des ordonnées. On placera les valeurs de x en abscisse et les valeur de $A(x)$ en ordonnée. Réunir ces points par une « courbe continue » (sans lever le crayon et **sans utiliser la règle**).

7. Comment varie $A(x)$ lorsque x augmente de 0,5 à 3,5 ? Comment varie $A(x)$ lorsque x augmente de 3,75 à 4,5 ?

8. Graphiquement, quel semble être le maximum de l'aire $A(x)$? Pour quelle valeur de x est-il atteint ?

9. Géométriquement quelle est, à votre avis, la propriété du triangle DBC lorsque son aire est maximum ?

Calculer les valeurs de x et de $A(x)$ correspondantes . On donnera des valeurs approchées à 0,01 près .

53. Aire d'un triangle rectangle (2)

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que AB = 6 et AC = 12. E est un point du segment [AB] distinct de A et de B. On pose EB = x.

La parallèle à la droite (AC) passant par E coupe la droite (BC) en F. La parallèle à la droite (AB) passant par F coupe la droite (AC) en G.

On admet que le quadrilatère AEFG obtenu est un rectangle .

1. a. Prouver que $\frac{\text{BE}}{\text{BA}}=\frac{\text{AG}}{\text{AC}}$. En déduire l'expression de AG en fonction de x.

b. Calculer l'aire $A(x)$ du rectangle AEFG en fonction de x.

2. Compléter les tableaux ci-dessous (On donnera des valeurs approchées à 0,01 près).

Valeurs de x	0,1	0,5	1	1,5	2	2,25	2,5	2,75	2,9	3
Valeurs de $A(x)$										

Valeurs de x	3,1	3,25	3,5	3,75	4	4,5	5	5,5	5,9
Valeurs de $A(x)$									

3. Représenter sur papier millimétré la fonction $A : x \mapsto A(x)$ dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On posera OI = 2 cm et OJ = 1 cm .

4. En utilisant cette courbe, répondre aux questions suivantes :

a. Quelles sont les valeurs de x pour lesquelles l'aire du rectangle vaut 10 ?

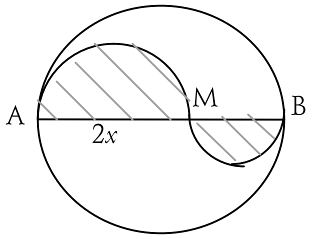
b. Déduire de la question 1. la valeur de x pour laquelle le rectangle AEFG est un carré. Indiquer, grâce au graphique, l'autre valeur de x pour laquelle le rectangle a pour aire celle de ce carré .

c. On admet que la représentation graphique possède un axe de symétrie. Tracer cet axe sur la figure et donner son équation .

d. Quelle est la plus grande valeur de l'aire du rectangle AEFG ? Quelle est la valeur de x correspondante ? Où se trouve alors le point E sur le segment [AB] ?

54. Yin et Yang

Sur un diamètre [AB] d'un cercle de rayon 4 cm, on marque un point M. On désigne par $2x$, avec $0 \le x \le 4$, la longueur de AM.



On trace deux demi-cercles de part et d'autre de (AB), de diamètre [AM] pour l'un et [BM] pour l'autre.

Exprimer l'aire de la partie hachurée et déterminer pour quelle valeur de x cette aire est maximum. (Vous avez le choix de la méthode : graphique, algébrique...)

Correction

Les demi-disques de diamètre [AM] et [MB] ont pour aires : $\frac{\pi}{8}(2x)^2$ et $\frac{\pi}{8}(8-2x)^2$. L'aire de la partie hachurée est donc la somme des deux : $A(x)=\frac{\pi}{8}\left[(8-2x)^2+(2x)^2\right]$. En développant, on trouve finalement : $A(x)=\pi(x^2-4x+8)$.

On a, entre autres, deux possibilités pour trouver le minimum :

1. on trace la courbe point par point pour x variant entre 0 et 4, avec un tableau de valeurs et on voit que le minimum est atteint pour $x = 2$. (Le tableau doit être assez précis et la courbe propre...) ;

2. on peut aussi le prouver par le calcul (plus difficile !). Pour cela, on écrit $A(x)$ de manière différente ... $A(x)=\pi.\left[(x-2)^2+4\right]$. Les deux termes dans le crochet sont toujours positifs et le minimum de $A(x)$ est atteint quand le premier est le plus petit possible et donc quand il vaut 0, c'est-à-dire pour $x = 2$.

Dans tous les cas, on trouve que l'aire minimale vaut 4π cm

55. Trapèze (1)

ABCD est un trapèze rectangle tel que AB = 6, AD = 4 et CD = 2.

Le point M décrit le segment [AD]. Le réel x désigne la longueur AM. On construit le rectangle AMNP où N et P appartiennent respectivement aux Segments [BC] et [AB]. On admet que BP = AM = x.

1. Donner l'ensemble de nombres réels auquel appartient x.

2. Démontrer que l'aire A du rectangle AMNP en fonction de la longueur x est $A = x(6 - x)$.

3. Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels x tels que $0 \le x \le 4$ donnée par $f(x)=x(6-x)$.

a. Remplir le tableau de valeurs suivant (sur votre feuille) :

x	0	1	1.75	3	4
$f(x)$					

b. Faire la représentation graphique de f : repère orthogonal, 2 cm pour 1 en abscisses, 1 cm pour 1 en ordonnées.

c. En utilisant la représentation graphique de f, donner la position de M pour laquelle l'aire A est maximale. Quelle est cette aire ?

d. Calculer l'image de $\frac{3}{4}$ par f, de $2\sqrt{2}$ par f.

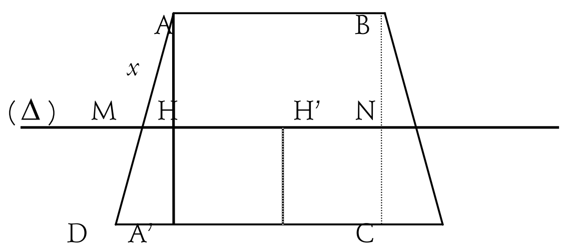
e. Rechercher graphiquement les antécédents de 8 et 8,25 par f.

56. Trapèze (2)

ABCD est un trapèze tel que AB = 4, CD = 6 et AD=BC.

Soit A '(respectivement B') le projeté orthogonal de A (respectivement de B) sur (CD), AA'= 4.

La droite (Δ) parallèle à la base (AB) coupe [AD], [BC], [AA'] respectivement en M, N, H tels que AH = x.



1. Exprimer en fonction de x la longueur MH. On pourra raisonner dans le triangle AA'D.

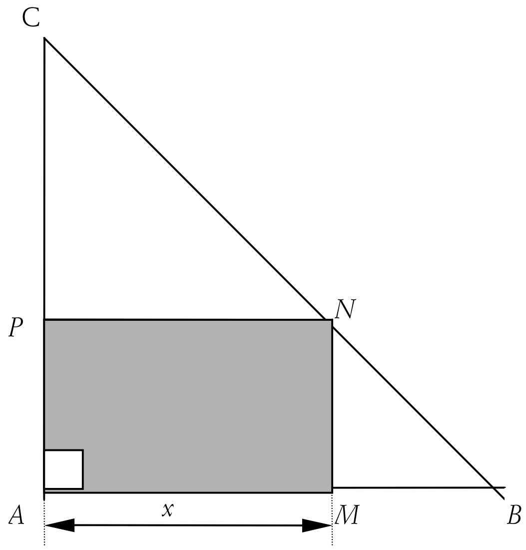
2. En déduire une expression en fonction de x de la longueur H'N, puis de la longueur MN.

3. Calculer en fonction de x l'aire, notée $f(x)$, du trapèze ABNM.

4. Préciser l'intervalle sur lequel la fonction f est définie.

5. Résoudre graphiquement à l'aide de la représentation graphique de f, l'inéquation $f(x) \geq 10$. Donnez votre réponse sous forme d'un intervalle.

57. Triangle et rectangle



ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que : $AB = AC = 6$ cm. M est un point du segment $[AB]$ tel que $AM = x$ ($x \in [0;6]$).

Soient $N \in [BC]$ et $P \in [AC]$ tels que le quadrilatère $AMNP$ soit un rectangle. On admettra que les triangles CPN et BMN sont isocèles.

1. Soit f la fonction qui, à chaque valeur de x, associe l'aire du rectangle $AMNP$.

a. Montrer que $f(x) = x(6-x)$.

b. Vérifier que $f(x) = -(x-3)^2 + 9$.

c. Compléter le tableau de valeurs suivant et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité = 1cm).

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
$f(x)$													

2. a. Comment varie f lorsque x varie de 0 à 3 ?

Soit x et x' tels que $0 \leq x < x' \leq 3$; comparer à l'aide du graphique $f(x)$ et $f(x')$.

b. Comment varie f lorsque x varie de 3 à 6 ?

Soit x et x' tels que $0 \leq x < x' \leq 3$; comparer à l'aide du graphique $f(x)$ et $f(x')$.

3. On va maintenant montrer les variations de f déterminées graphiquement à la question 2. en utilisant les variations de la fonction « carré ».

a. Montrer que $x \mapsto (x-3)^2$ est décroissante sur $[0\,;3]$ et croissante sur $[3\,;6]$.

b. En déduire les variations de $x \mapsto -(x-3)^2$ puis de $x \mapsto -(x-3)^2 + 9$.

c. donner le tableau de variations de f sur $[0\,;6]$.

d. en déduire que l'aire du rectangle $AMNP$ est maximale pour une position particulière du point M que l'on précisera. Quelle est l'aire correspondante ?

58. Distance d'arrêt d'une automobile (c)

Lorsqu'un automobiliste perçoit un danger majeur, il freine « à fond » pour arrêter son véhicule.

La distance d'arrêt , c'est-à-dire la distance parcourue par le véhicule entre l'instant où l'automobiliste perçoit le danger et l'instant où le véhicule s'immobilise dépend évidemment de nombreux facteurs : qualité des réflexes du conducteur, état du véhicule, des pneus, de la route… Mais fondamentalement cette distance est donnée par la formule :

$$d = \frac{0{,}75}{100}v^2 + \frac{2{,}5}{10}v$$

où d est exprimée en mètres et v en km.h^{-1} .

1. Montrez, par le calcul, que la fonction $f : v \mapsto \frac{0,75}{100}v^2 + \frac{2,5}{10}v$ est croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$. On a $d = f(v)$.

2. a. Faites le tableau des valeurs de d pour des valeurs de v : 0, 10, 20, ..., 120, 130 (de 10 en 10).

b. Construisez la courbe représentative de f en utilisant l'échelle suivante :

1 km.h^{-1} pour 1 mm sur l'axe des abscisses.

1 m pour 1 mm sur l'axe des ordonnées.

3. Comparez l'augmentation de la distance d'arrêt lorsqu'on passe de 50 km.h^{-1} à 60 km.h^{-1}, puis lorsqu'on passe de 100 km.h^{-1} à 110 km.h^{-1}.

4. En utilisant la courbe représentative de la fonction f, lisez approximativement la vitesse à ne pas dépasser si l'on veut pouvoir s'arrêter en moins de 30 m ; en moins de 50 m.

5. On peut penser que la formule donnée correspond à une situation moyenne et qu'un conducteur aux réflexes rapides, dans un véhicule aux freins surpuissants, sur route sèche, réalise de bien meilleures performances. On suppose que la distance d'arrêt, dans une telle situation, est donnée par la formule :

$$D = \frac{0,5}{100}v^2 + \frac{1}{10}v\ .$$

a. Construisez, dans le même repère, la courbe représentative de la fonction $g : v \mapsto \frac{0,5}{100}v^2 + \frac{1}{10}v$ et répondez, dans cette nouvelle situation, aux questions 3 et 4 ci-dessus.

b. Pensez-vous que les limitations de vitesse soient justifiées ?

Correction

1. On montre que la fonction est croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$. Soient v_1 et v_2 deux valeurs telles que $0 \le v_1 \le v_2$. Montrons que $f(v_1) \le f(v_2)$: $v_1^2 \le v_2^2$ car $x \mapsto x^2$ croissante sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

De plus, (*) $\frac{0,75}{100}v_1^2 \le \frac{0,75}{100}v_2^2$ car $\frac{0,75}{100} > 0$; d'autre part (**) $\frac{2,5}{10}v_1 \le \frac{2,5}{10}v_2$ car $\frac{2,5}{10} > 0$.

En additionnant (*) et (**), on trouve : $f(v_1) \le f(v_2)$.

2. a. et b. Voir autre page.

3. De 50 à 60 km/h, d varie de 31,25 à 42 m, c'est à dire une augmentation de 34,4 %. De 100 à 110 km/h, d varie de 100 à 118,3 m, c'est à dire une augmentation de 18,3 %.

4. D'après le graphique, pour s'arrêter en moins de 30 m, il faut rouler à environ 49 km/h. De même, pour s'arrêter en moins de 50 m, il faut rouler à environ 66 ou 67 km/h.

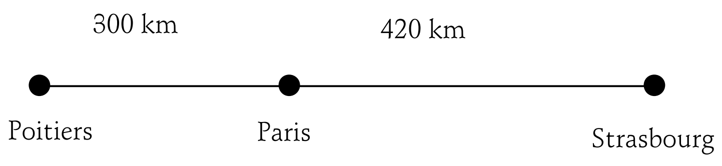
5. a. Le graphique et sa lecture sont laissés au lecteur.

De 50 à 60 km/h, D varie de 17,5 à 24 m, c'est à dire une augmentation de 37,1 %. De 100 à 110 km/h, D varie de 60 à 71,5 m, c'est à dire une augmentation de 19,2 %. D'après le graphique, pour s'arrêter en moins de 30 m, il faut rouler à environ 68 km/h. De même, pour s'arrêter en moins de 50 m, il faut rouler à environ 90 km/h.

b. Bonne question ! Il y aurait beaucoup de choses à dire mais on peut au moins remarquer qu'il n'y a pas très longtemps, la vitesse en ville était limitée à 60 km/h. Aujourd'hui, elle est à 50 km/h (justement dans le but de s'arrêter en moins de 30 mètres).

On gagne, avec une voiture « normale », 10 mètres de distance de freinage sur les 40 qu'il faudrait pour s'arrêter, ce qui est déjà important ... Une autre chose à remarquer est aussi que quel que soit le véhicule, d et D varient, en pourcentage, de la même façon lorsqu'on passe de 50 à 60 et de 100 à 110 ...

59. Poitiers – Paris - Strasbourg



Un train qu'on suppose rouler à la vitesse de 120 km.h^{-1} passe à Poitiers à 0 heure et se dirige vers Strasbourg en passant par Paris.

1. Déterminez $d(t)$, la distance parcourue à partir de Poitiers (en km) en fonction du temps t en heures. Que dire de cette fonction ?

2. Représentez graphiquement cette fonction en respectant les unités données (1 cm pour 1 heure en abscisse et 2 cm pour 100 km en ordonnée).

3. Résoudre graphiquement $d(t) = 240$ puis $d(t) \geq -120$.

Déterminer graphiquement $d(t)$ pour t=1h 30mn.

4. Donnez l'image de -4 ; 2 ; 3 ; 3,5 ; 5 ; 7 ; 7,5 par d.

5. Donnez les antécédents de -240 ; 120 ; 240 ; 300 ; 480 ; 600 ; 720 par d.

6. A quelle heure arrivera-t-il en gare de Strasbourg ?

7. En sachant que ce train était parti de Bordeaux à 22 h 00, quelle est la distance entre Bordeaux et Poitiers ?

60. Etude de fonction et application à la physique.

Ce problème est constitué de deux parties.

Soit la fonction f définie sur Ë par $f(x) = x^2 - 6x + 5$; on appellera cette expression **FORME 1**.

1$^{\text{ère}}$ partie *Etude de la fonction*

1. a. Démontrer que $f(x) = (x-3)^2 - 4$; on appellera cette expression **FORME 2**.

b. En utilisant la **FORME 2**, résoudre l'équation $f(x) = 0$.

c. En utilisant encore la **FORME 2**, démontrer que f est croissante sur $[3 ; +\infty[$.

d. On admet que f est décroissante sur $]-\infty ; 3]$. Dresser le tableau des variations de f.

2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(x)$	32		12			-3			0	5	12	21	

3. Tracer, la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ judicieusement choisi.

2$^{\text{ème}}$partie *Où il est question d'électricité*

On considère deux résistances R_1 et R_2 (la valeur est en ohms, Ω). Si ces deux résistances sont montées en série, la résistance équivalente est de $6\,\Omega$ et si ces deux résistances sont montées en parallèle, la résistance équivalente est de $\frac{5}{6}\Omega$.

Les lois de l'électricité permettent d'écrire les relations suivantes:

$$R_1 + R_2 = 6 \quad (1)\text{et} \qquad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{6}{5} \quad (2)$$

1. a. Montrer que (2) équivaut à $\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{5}{6}$ (3).

b. A partir des relations (1) et (3), déduire la relation $R_1 R_2 = 5$ (4).

2. a. En utilisant la relation (1), exprimer R_2 en fonction de R_1.

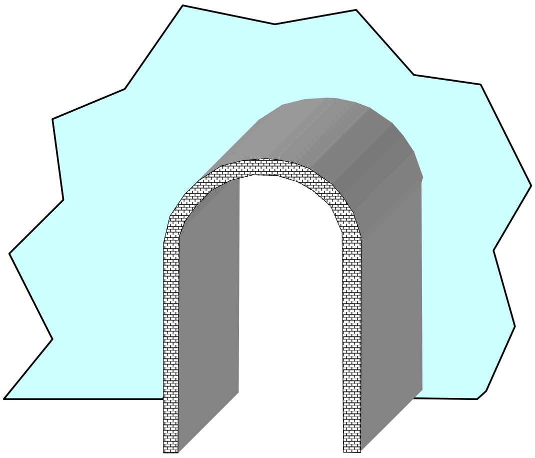
b. Remplacer alors R_2 par cette expression dans (4) et montrer que R_1 vérifie la relation : $R_1^2 - 6R_1 + 5 = 0$.

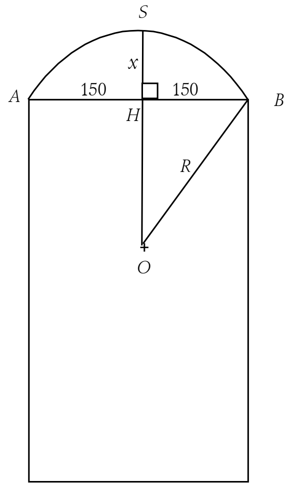
c. Pourquoi en est-il de même pour R_2 ?

d. Déduire, à l'aide des questions 1.b. de la 1$^{\text{ère}}$ partie les valeurs de R_1 et de R_2.

61. Arc et flèche (Bac pro Aménagement finition, France 06/07) (c)

Une entreprise doit réaliser le plafond cintré d'une galerie selon le schéma ci-dessous.





La largeur de la galerie $AB = 300$ cm $= 3$ m.

La flèche $x = SH$ dépend du rayon de cintrage R qui est le rayon de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$ passant par S :

$$OA = OS = OB = R.$$

Partie A

1. En considérant le segment $[OS]$, exprimer OH en fonction de R et de x.

2. En déduire l'expression développée de OH^2 en fonction de R.

3. Dans le triangle OBH, exprimer OH^2 en fonction de R.

4. Montrer qu'à partir des expressions obtenues aux questions précédentes, on obtient : $2Rx - x^2 = 150^2$.

5. En déduire que le rayon de cintrage R est donné en fonction de la flèche x par la relation :

$$R = \frac{x}{2} + \frac{11\,250}{x}.$$

6. Si la flèche x vaut 0,5 m, combien vaut le rayon ? Est-il possible que le rayon soit inférieur à 1,50 m ?

Partie B

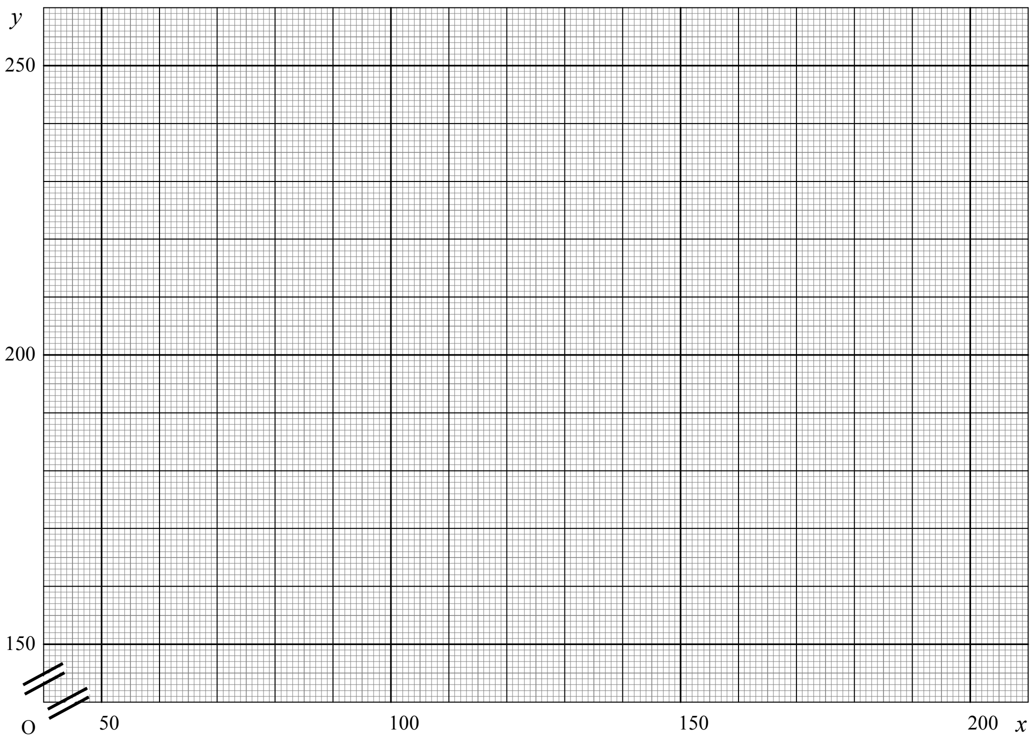
On considère la fonction f définie sur l'intervalle [70 ; 200] par : $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{11\,250}{x}$.

1. Déterminer le sens de variation de f à l'aide de la calculatrice. Dresser le tableau de variation de f.

2. Compléter le tableau de valeurs suivant. Arrondir à l'unité.

x	70	75	90	100	120	160	180	200
$f(x)$								

3. Tracer la représentation graphique de la fonction f.



Partie C : Exploitation de la courbe

1. Pour quelle valeur de x le rayon R est-il minimal ?

2. Quelle est dans ce cas la particularité de l'arc $\overset{\frown}{AB}$?

3. La flèche retenue est $x = 80$ cm. Déterminer graphiquement, pour cette valeur de x, la longueur du rayon de cintrage R ? Laisser apparents les traits utiles à la lecture.

Correction

Partie A

1. $OS = OH + x \Rightarrow OH = R - x$.

2. $OH^2 = \left(R - x\right)^2 = R^2 - 2Rx + x^2$.

3. $OH^2 + 150^2 = R^2 \Rightarrow OH^2 = R^2 - 150^2$.

4. $R^2 - 2Rx + x^2 = R^2 - 150^2 \Leftrightarrow -2Rx + x^2 = -150^2 \Leftrightarrow 2Rx - x^2 = 150^2$.

5. $2Rx - x^2 = 150^2 \Leftrightarrow 2Rx = x^2 + 150^2 \Leftrightarrow R = \dfrac{x^2 + 150^2}{2x} = \dfrac{x^2}{2x} + \dfrac{150^2}{2x} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{11250}{x}$.

6. Si la flèche x vaut 0,5 m, soit 50 cm on a $R = 25 + \dfrac{11250}{50} = 250 \text{ cm} = 2{,}5 \text{ m}$.

Il est impossible que le rayon soit inférieur à 1,50 m, sinon la galerie s'écroulerait…