Classe de Seconde

Equations, inéquations

1. Intervalles

Exercice 1

Quelques questions…

* $-0,25$ appartient-il à $[-1/4\ ;\ 3[$?
* 3 appartient-il à $]3\ ;\ 10[$?
* 0 appartient-il à $]-5\ ;\ 2]$
* 10^5 appartient-il à $[-2,7\ ;+\infty[$?
* $\sqrt{2}$ appartient-il à $]-\infty\ ;1,4]$?

Exercice 2

1 . Donner un exemple d'intervalle fermé dont les bornes sont ...

a - des **entiers** :

b - des **fractions** :

2. Cocher **vrai** ou **faux** :

$[b\ ;\ \sqrt{2}\,]$ est un intervalle fermé si $b = -1$.	**Vrai**	**Faux**
$[b\ ;\ \sqrt{2}\,]$ est un intervalle fermé si $b > \sqrt{2}$.	**Vrai**	**Faux**
$[b\ ;\ \sqrt{2}\,]$ est un intervalle fermé si $b < \sqrt{2}$.	**Vrai**	**Faux**
$[-2,3\ ;\ c]$ est un intervalle fermé si $c = -2,3$	**Vrai**	**Faux**
$[-2,3\ ;\ c]$ est un intervalle fermé si $c > -2,3$	**Vrai**	**Faux**

$[-2{,}3\ ;\ c]$ est un intervalle fermé si $c \leq -2{,}3$ **Vrai** **Faux**

Exercice 3

On pose $I = \left[-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{3}\right[$ et $J = \left]\frac{1}{2}\,;3\right]$.

Vrai ou Faux ?

a. $\frac{1}{2} \in I$ b. $\frac{1}{2} \in J$ c. $2 \in J$ d. $3 \in J$

e. Il existe des réels appartenant à la fois à I et à J.

f. Il existe des réels n'appartenant ni à I ni à J.

Exercice 4

1. Ecrire les inégalités suivantes sous forme d'intervalles :

a. les réels x tels que $x < 0$;

b. les réels x tels que $-1 \leq x \leq 1$.

2. Ecrire les intervalles suivants sous forme d'inégalités :

a. $]-2\ ;\ 6\ [$ b. $]-\infty\ ;\ 5[$.

Exercice 5

On pose $A = \left]-\infty\,;\sqrt{2}\,\right]$, $B = [\,0\,;7\,[$ et $C =]-1\,;3\,]$.

Déterminer $A \cup B$; $A \cap C$; $A \cap B \cap C$.

Déterminer les ensembles D et E suivants : $D = A \cup C$ et $E = D \cap B$.

Exercice 6

Dites, dans chaque cas, à quel intervalle appartient x et représentez cet ensemble sur une droite graduée.

a. $-1 \leq x \leq 2$ b. $x < -\frac{3}{2}$ c. $x \geq 10$ d. $0 < x \leq 3$ e. $x \leq -1$

f. x est un réel strictement positif

Exercice 7

Traduisez par des inégalités l'appartenance d'un réel x à chacun des intervalles.

a. $[-2\ ;\ 3]$ b. $]-1\ ;\ 0]$ c. $]-\infty\ ;\ 4[$

d. $]2\ ;\ +\infty\ [$ e. $]\ -\infty\ ;\ 0[$ f. $\left]3\,;\frac{11}{2}\right[$.

Exercice 8

On considère les intervalles $I =]\,3\,;+\infty\,[$, $J = [\,1\,;2\,]$ et $K = [\,2\,;4\,]$.

1. Représenter chacun de ces intervalles sur un axe gradué.

2. Simplifier, lorsque c'est possible, les écritures des ensembles $I \cap J, I \cap K, J \cap K, I \cup J, I \cup K$ et $J \cup K$.

3. Pour chacun d'entre eux, préciser leur nature (c'est-à-dire s'il s'agit d'un intervalle fermé ou…, borné ou…).

2. Factorisations de polynômes - Applications…

1. a. Rappeler les identités remarquables.

b. Factoriser le plus possible les expressions suivantes :

A = $(7x - 1)(2x - 5) - (3x + 1)(7x - 1)$; B = $4y^2 + 8y + 4$; C = $8z(z - 2)^2 - 2z^3$.

2. Factoriser le plus possible les expressions suivantes :

Série 1 : A $= 7x(x-3)-(3-x)(2x-3)$; B $= x^2(2+x)+x(4+2x)+(2+x)$; C $= 9(x-5)-x^2(x-5)$

D $= (2-x)(5x-3)+(4-2x)(x-1)-7(x-2)$.

Série 2 : $A(t)=(-2t-1)^2-9(3t+4)^2$; $B(x)=(6x-2)(2x+3)-(-9x+3)(-5x+7)$;

$C(x)=49x^2-14x+4$; $D(y)=\frac{1}{4}y^2+y+1$.

3. a. Développer les expressions suivantes :

$$A(x)=(3x+1)^2-2(4x-5)(4x+5) \; ; \; B(z)=(z+4)(z-4)-z^2.$$

b. Calculer $(9876543218)(9876543210)-(9876543214)^2$.

c. Utiliser les écritures $5\,247\,624=5\,247\times10^3+624$ et $1\,872\,239=1\,872\times10^3+239$ pour calculer à la machine la valeur exacte de $5\,247\,624\times1\,872\,239$.

4. Factoriser (et réduire) les expressions suivantes :

$H=4x^2-2x$; $J=(2x+1)(8x-3)-(17x+2)(2x+1)-(2x+1)(6x+5)$; $K=3x^2+6x+3$.

Résoudre l'équation $J = 0$.

5. On donne $P(x) = 5(x^2 - 9) - (x - 5)(6 - 2x)$.

a. Développer et réduire $P(x)$.

b. Factoriser $P(x)$.

Un conseil : il est prudent de développer au brouillon le produit obtenu afin de vérifier que le résultat est le même qu'au a. sinon, chercher l'erreur !

c. Utiliser la forme convenable pour résoudre les équations :

$$P(x) = 0 \; ; \; P(x) = -15 \; ; \; P(x) = 7x + 5.$$

d. Calculer $P(-3)$ et $P\left(\frac{2}{5}\right)$.

3. Equations simples

Résoudre les équations suivantes:

a. $9(x+2)^2-(2x-2)^2=0$

b. $(x-11)^2+(33-3x)(x+2)=0$

c. $(x-2)(2x+7)-(x^2-4)=0$

d. $\frac{x+3}{2}-\frac{4x-3}{3}=1-\frac{5x-12}{6}$

e. $(-2x+4)^2+(-2x+4)(5x-25)=0$.

f. $\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=0$.

4. Equations valeur absolue

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$

a. $|3x+10|=|5x-4|$ b. $|x-\pi|-|x+2|=0$ c. $\left|3x+\frac{\pi}{2}\right|+\frac{|x|}{2}=-3$

d. $|x-5|=12$ e. $|3-x|\le 5$ f. $|x-5|=-2$ g. $|x+7|>2$

2. Ecrire sans le symbole | | les nombres suivants :

a. $\left|1-\sqrt{2}\right|$ b. $|a|$ pour a négatif c. $\left|\sqrt{3}-\frac{5}{3}\right|$

3. Calculer

a. $a=-\left|-\frac{2}{3}\right|+\left|-\frac{13}{9}\right|$ b. $x-|x+1|$ quand $x=-5$

4. Résoudre les équations suivantes

a. $|-2x|=7$ b. $|-x|=-5$ c. $|-x+4|=0$

5. Equation problème

Un cadet de Gascogne dit à ses amis : « *J'ai dépensé 5 écus de plus que les deux neuvièmes du contenu de ma bourse et il me reste 2 écus de moins que les deux tiers de ce que j'avais en rentrant dans cette taverne* ».

Combien avait-il d'écus dans sa bourse en rentrant ?

6. Equation problème

Un cycliste effectue un parcours en 9 heures. Sa vitesse est de 30 km/h sur le premier tiers de la distance totale, 20 km/h sur le second tiers et 15 km/h sur le troisième tiers. Trouver la distance parcourue.

7. Equation problème

Trouver trois nombres entiers consécutifs tels que la différence entre le carré du plus grand et le produit des deux autres soit égale à 715.

(on pourra noter ces nombres x, $x+1$ et $x+2$)

8. Equation problème

A 9 heures du matin Paul part de A vers B en bicyclette (vitesse 15 km/h) . A 10 heures moins le quart, Pauline en fait autant de B vers A (vitesse 20 km/h). Ils se rencontrent à mi-chemin pour pique-niquer. Quelle heure est-il alors ?

9. Equation problème

Valérie et Maria doivent parcourir 30 km chacune. Valérie met 3h de plus que Maria. Si elle doublait sa vitesse, elle mettrait 2h de moins. Quelle est la vitesse de chacune ?

10. Equation problème

" Un homme est entré dans un verger et a cueilli des fruits. Mais le verger avait trois portes et chacune était gardée par un gardien. Cet homme donc partagea en deux ses fruits avec le premier et lui en donna deux de plus; puis il partagea le reste avec le second et lui en donna deux de plus, enfin il fit de même avec le troisième. Il sortit du jardin avec un seul fruit. Combien en avait-il cueilli ? " (Abraham Ben Ezra XI°Siécle)

11. Equation problème (c)

On veut disposer un certain nombre de jetons en carré (par ex avec 9 jetons on fait un carré de 3 sur 3). En essayant de constituer un premier carré, on s'aperçoit qu'il reste 14 jetons. On essaie alors de faire un deuxième carré en mettant un jeton de plus par côté. Il manque alors 11 jetons. Combien y avait-t-il de jetons au départ ?

Correction

Appelons x le nombre de jetons sur le côté du carré et y le nombre de jetons dont on dispose. On a alors $y=x^2+14$ pour la première situation et $y=(x+1)^2-11$ pour la deuxième.

En identifiant les deux y, on a : $x^2+14=(x+1)^2-11 \Leftrightarrow x^2+14=x^2+2x+1-11 \Leftrightarrow 2x=24 \Leftrightarrow x=12$. On en déduit y : $y=12^2+14=144+14=158$.

12. Equation problème

Une somme de 3795 **€** est partagée en trois parts proportionnelles aux nombres 3, 5 et 7. Déterminer ces trois parts.

Correction

La première part vaut $3k$, la deuxième $5k$ et la troisième $7k$; on a donc

$$3k+5k+7k=3795 \Leftrightarrow 15k=3795 \Leftrightarrow k=253$$

d'où la première vaut 759, la deuxième 1265 et la troisième 1771.

13. Equation problème

Un magicien demande à un spectateur de :

penser à un nombre;

de le multiplier par deux;

de retrancher 3 à ce produit;

de multiplier le tout par 6.

Le spectateur annonce comme résultat 294. Quel était le nombre du départ ?

14. Equation problème (c)

Lorsqu'on descend un escalier comptant moins de 200 marches, 2 marche par 2 marches, il en reste une.

Lorsqu'on le descend 3 marches par 3 marches, il en reste 2. Lorsqu'on le descend 4 marches par 4 marches il en reste 3.

Lorsqu'on le descend 5 marches par 5 marches il en reste 4.

Lorsqu'on le descend 6 marches par 6 marches, il en reste 5.

Lorsqu'on le descend 7 marches par 7 marches, il n'en reste pas.

Combien l'escalier a-t-il de marches ? Justifier votre réponse.

Correction

On constate que le nombre de marches est multiple de 7, impair, multiple de 3 plus 2, de 4 plus 3, de 5 plus 4, de 6 plus 5.

Les multiples de 7 impairs et inférieurs à 200 sont : 7 , 21 , 35, 49 , 63 , 77 , 91 , 105 , 119 , 133 , 147 , 161 , 175 , 189, mais seul 119 vérifie les 4 dernières conditions :

119 divisé par 3 est égal à 39 il reste 2 ;

119 divisé par 4 est égal à 39 il reste 3 ;

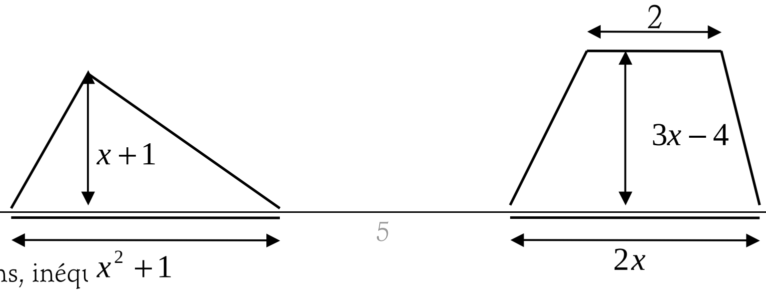
119 divisé par 5 est égal à 39 il reste 4 ;

119 divisé par 6 est égal à 39 il reste 5.

15. Application géométrique

1. Résoudre $x^2-6x+9=0$.

2. Un géomètre prétend qu'on peut construire un triangle et un trapèze de même aire avec les dimensions suivantes (en cm).



Si le géomètre a raison, pour quelle(s) valeur(s) de x est-ce possible ?

16. Quelques mises en équations

1. Richard possède une certaine somme d'argent. Il envisage d'en dépenser les 2/3 pour acheter un album de timbres, et d'en encaisser le quart en revendant ses timbres en double. Il lui restera alors 210 frs. Combien possède-t-il ?

2. Un transporteur a livré 144 caisses, toutes identiques, et 23 fûts tous de même masse, en trois voyages.

Le premier chargement de 56 caisses et de 4 fûts atteignait 3480 kg. Le second de 40 caisses et 7 fûts pesait 4350 kg. Quelle était la masse du dernier chargement ?

3. Problème d'anthologie grecque

"- Ô noble Pythagore, descendant des Muses de l'Hélicon ! dis-moi combien il y a de jeunes gens sur la place de la Science, prêts à lutter pour le prix ?

- Je te le dirai, Ô Polycrate ! Vois : la moitié travaille à la subtile Mathématique ; le quart, au contraire, se livre à l'étude de la nature, l'Eternelle ; tandis que le septième garde le silence absolu, conservant la science en son cœur. Joins-y trois femmes pour lesquelles Théano brille d'un éclat spécial, et tu auras le nombre de prêtres que je destine aux Muses."

Aider Polycrate à calculer le nombre de personnes se trouvant sur la place de la Science.

4. Un âne porte 15 sacs de sel et 2 kg d'olives. Un mulet porte 2 sacs de sel et 41 kg d'olives.

L'âne souffle fort ! « De quoi te plains-tu ? » dit le mulet, « nous portons la même charge »

Quelle est la masse, en kilogrammes, d'un sac de sel ?

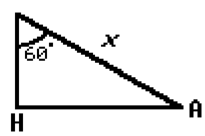
5. Un astronaute en mission sur la lune a posé son vaisseau spatial dans une grande plaine, la Mer de la Tranquillité. Debout sur le sol, il mesure, à l'aide d'un rayon laser, la distance qui le sépare de la pierre la plus lointaine qu'il puisse apercevoir à l'horizon. Il trouve 2395 mètres. Le pied de l'instrument mesure 1,65 mètres. Calculer le rayon de la lune à un kilomètre près.

6. Une ficelle de 81 cm est fixé à deux clous A et B distants de 45 cm. On tend la ficelle jusqu'à un point C tel que ABC est un triangle rectangle en A. Calculer alors les longueurs AC et BC.

7. La moyenne de six notes est 4. On ajoute une note et la moyenne devient 5. Quelle est cette septième note ?

8. Peut-on trouver trois nombres entiers naturels consécutifs dont la somme vaut 1993 ?

9. Dans ce demi - triangle équilatéral, déterminez x pour que la hauteur AH mesure 7 cm .



10. David et Fabrice ont respectivement 15 ans et 5 ans. Dans combien d'années l'âge de David sera-t-il le double de celui de Fabrice ? Dans combien d'années sera-t-il le triple ? Dans combien d'années sera-t-il 6 fois plus grand ?

11. Un père à 27 ans de plus que son fils. Dans 6 ans, son âge sera le double de celui de son fils. Quels sont les âges du père et du fils ?

12. Une mère de 37 ans a trois enfants âgés de 8, 10 et 13 ans. Dans combien de d'années l'âge de la mère sera-t-il égal à la somme des âges de ses enfants ?

13. Pierre dit à Yves : « J'ai 5 fois l'âge que tu avais quand j'avais l'âge que tu as ». Yves lui répond : « Quand tu auras 5 fois l'âge que j'ai, la somme de nos âges sera 84 ans ». Quel est l'âge de Pierre ?

14. Quand le père avait l'âge du fils, le fils avait 10 ans. Quand le fils aura l'âge du père, le père aura 70 ans. Quels sont leurs âges respectifs ?

15. Si on augmente de 3 mètres la longueur du côté d'un carré, l'aire augmente de 45 m². Quelle est l'aire de ce carré ?

16. On dispose des jetons en carré : il en reste 12. Si on ajoute 1 jeton par côté, il en manque 1. Combien a-t-on de jetons ?

17. Mathieu possède un terrain carré. Une grande allée de largeur constante, d'une superficie de 464 m², le borde intérieurement. Lorsqu'il fait le tour de son terrain, il remarque une différence de 32 m entre le parcours effectué au bord intérieur de l'allée et celui correspondant au bord extérieur. Quelle est la superficie totale du terrain ?

17. Equations en vrac (1)

Résoudre les équations suivantes …

a) $2t-3(t+1)=\dfrac{1-3t}{2}$

b) $2(3-x)+3(x-\dfrac{1}{3})=5+x$

c) $(\dfrac{7}{2}a-3)(5-a)=0$

d) $5x^2=25x$

e) $\sqrt{2}t+\sqrt{3}=\sqrt{2}(t+7)+\sqrt{3}-7\sqrt{2}$

f) $(x-2)^2=9$

g) $(s-7)(s+7)=0$

h) $x^2-7x+3=(x+3)^2$

i) $2(b+8)-3b+4=21-b$

j) $x^2-2x+1=4$

18. Equations en vrac (2)

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{x+7}{4}-\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{x+2}{3}$ b. $3(2x+4)-2x=14-2(1-2x)$ c. $5x^2-7x=0$

d. $(2x+3)^2=36$ e. $(3x-4)(x-2)-(6x-8)(x-3)=0$ f. $\dfrac{2x+3}{x-1}=0$

g. $\dfrac{2x-3}{x+1}=\dfrac{2x+3}{x-2}$ h. $\dfrac{2x+3}{x-1}=\dfrac{2x-7}{x+5}$.

19. Equations et fonctions affines.

1. Etablir le tableau de variation de la fonction $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$.

2. Faire la représentation graphique de f.

3. Résoudre par le calcul l'équation $f(x)=0$ et l'inéquation $f(x)\leq 0$.

4. Etablir un lien entre le calcul et la représentation graphique.

5. Résoudre $f(x)\geq 0$.

6. On a montré que $\begin{cases} f(2)=0 \\ \text{si } x\leq 2 \text{ alors } f(x)\geq 0 \\ \text{si } x\geq 2 \text{ alors } f(x)\leq 0 \end{cases}$. Rassembler ces information dans un tableau de signe.

7. Etablir le tableau de signe de $3x-1$.

20. Inéquation

On veut comparer les deux nombres

$$a=(1{,}000.000.000.003)^2 \text{ et } b=(0{,}999.999.999.997)^2.$$

a. Calculer a et b avec votre calculatrice. Que constate-t-on ?

b. Pour répondre à la question, on pose x = 0,000 000 000 003. Montrer que $a \geq b$ est équivalent à résoudre l'inéquation $(1+x)^2 \geq (1-x)^2$. Résoudre cette inéquation . Comparer alors a et b.

c. En utilisant une méthode semblable, comparez les nombres

$$c=\frac{1}{2{,}000.000.005} \text{ et } d=\frac{1}{1{,}999.999.995}$$

21. Inéquations

Résoudre les équations / inéquations suivantes:

a. $9(x+2)^2-(2x-2)^2 \leq 0$

b. $\dfrac{3}{1-3x} \geq \dfrac{2}{1+2x}$

c. $\dfrac{x}{4}-3 \leq x\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

d. $\dfrac{2x+5}{1+2x} > \dfrac{1-2x}{5-2x}$

e. $\begin{cases} -3x+\dfrac{2}{3} \geq 0 \\ -\dfrac{1}{4}x+2 > 1-x \end{cases}$

h. $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{x-1}{x-2}=\dfrac{14}{x^2-4}$

i. $\left|4x-1\right| \leq 3$ puis $\left|4x^2-1\right| \leq 3$

j. $(2-x)(x+7) \geq 4-x^2$.

k. $0<\dfrac{4x-8}{-5x-3} \leq 2$.

l. Diverses inéquations à résoudre…

$\dfrac{1}{x^2}<-7$	$(2x-3)^2<7$	$\dfrac{3}{x} \geq -1$
$81-(3x-1)^4 \geq 0$	$\dfrac{x^2+1}{x^2-4} \leq 1$	$\dfrac{x-3x^2}{(x-3)^2} \geq 0$
$\dfrac{7-x^2}{\sqrt{2x+3}} \geq 0$	$\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{5}{2x+4} \leq \dfrac{-3x}{x^2-4}$	$(2x+3)\sqrt{1-4x^2} \leq 0$

m. Etudier le signe de l'expression $A=\dfrac{x-3(x+2)}{x+2}$.

22. Inéquations produits en vrac

Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions…

a. $(x-3)(5-2x) \leq 0$ b. $\dfrac{3-2x}{5}-\dfrac{x-2}{10}<\dfrac{5x+2}{2}-\dfrac{1}{5}$ c. $(3x-2)(x+1)(7-2x)<0$

d. $2(x-4)+1-5x \leq 3(1-x)-7$ e. $\dfrac{3-x}{5}-\dfrac{2x+1}{10} \geq \dfrac{1}{2}x+3$ f. $(3-x)(5x-4)^2 \geq (3-x)$

g. $(x-5)(2-x)\leq 0$ h. $(x-3)(-2x^2+5x-3)\leq (x-3)^2$ i. $3x-1<x(x+3)$

j. $(2x-3)(2x^2-7x-1)\leq (3-2x)(3x^2+6x+1)$ k. $(4x+3)(4+5x)\geq 0$

l. $(x-2)(2x+8)-(5x-7)(x-2)>0$ m. $\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}<\frac{1+x}{6}$ n. $(x+1)^2-9x^2\geq 0$

23. Inéquations quotients en vrac

a. $\frac{2x+4}{x-5}\leq 0$ b. $\frac{x(2x+7)}{(x+1)(5-x)}\geq 0$ c. $\frac{x+3}{2x-1}\leq 4$ d. $\frac{2x-3}{x+1}+\frac{3}{x-1}\leq\frac{2x^2}{x^2-1}$.

24. Inéquations (c)

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

a. $\frac{2}{3}x-5\geq\frac{4}{9}(x-5)$; b. $(x-2)(3x-1)>3x-1$; c. $\frac{x^2-x+2}{x+1}\leq 1$.

Correction

a. On multiplie l'inégalité par 9 : $\Leftrightarrow 6x-45\geq 4(x-5)$.

On développe le terme de droite : $\Leftrightarrow 6x-45\geq 4x-20$.

On regroupe les termes en x : $\Leftrightarrow 6x-4x\geq 45-20$.

On réduit : $\Leftrightarrow 2x\geq 25$

Finalement : $\Leftrightarrow x\geq\frac{25}{2}$ d'où : $\boxed{S=\left[\frac{25}{2};+\infty\right[}$.

b. Le terme $(3x-1)$ est présent des deux côtés : $\Leftrightarrow (x-2)(3x-1)-1(3x-1)>0$

On factorise par $(3x-1)$ **:** $\Leftrightarrow (3x-1)[(x-2)-1]>0$

D'où : $\Leftrightarrow (3x-1)(x-3)>0$.

Les valeurs qui annulent les deux termes du produit sont : $\frac{1}{3}$ et 3 .

x	$-\infty$		1/3		3		$+\infty$
$3x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(3x-1)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $\boxed{S=\left]-\infty\,;1/3\right[\cup\left]3\,;+\infty\right[}$.

c. Remarque : la fraction n'est pas définie pour $x=-1$.

On passe le « 1 » à gauche et on réduit au même dénominateur : $\Leftrightarrow\frac{x^2-x+2}{x+1}-\frac{x+1}{x+1}\leq 0$.

On réduit le numérateur : $\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+1}{x+1}\leq 0$

On « reconnaît » l'identité remarquable : $\Leftrightarrow\frac{(x-1)^2}{x+1}\leq 0$

Le numérateur est toujours positif , le signe du quotient est donc celui du dénominateur ! Donc $\boxed{S=\left]-\infty\,;-1\right[}$ (-1 est exclu à cause de la remarque ci-dessus).

25. Inéquations (c)

Résoudre les inéquations suivantes:

1. $\dfrac{x-1}{x-3} \le \dfrac{x-2}{x-4}$

Correction

$\dfrac{x-1}{x-3} \le \dfrac{x-2}{x-4} \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)(x-4)}{(x-3)(x-4)} - \dfrac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x-4)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x+4-x^2+5x-6}{(x-3)(x-4)} \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-2}{(x-3)(x-4)} \le 0$.

Il faut donc que $(x-3)(x-4) > 0$, soit après avoir fait le tableau de signes : $x \in]-\infty\,;3[\cup]4\,;+\infty[$.

2. $\begin{cases} x^2-16 \le 0 \\ 3x+2 > x+3 \end{cases}$

Correction

$\begin{cases} x^2-16 \le 0 \\ 3x+2 > x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)(x+4) \le 0 \\ 2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le x \le 4 \\ x > 1/2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left]\dfrac{1}{2}\,;4\right]$.

26. Inéquations

1. Développer l'expression $(2x+1)^2-4$. Résoudre l'inéquation $\dfrac{4x^2+4x-3}{5-2x} < 0$.

2. Résoudre les inéquations :(on fera un petit schéma explicatif...)

a. $|x-3| \le 2$ *b.* $\left|x+\dfrac{1}{2}\right| \le 2$

c. $|1-2x| > 3$ *d.* $-1 \le |3+2x| \le 1$

27. Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\dfrac{2x^2-5}{x+1} \ge x-1$.
2. $|3-2x| \le 4$.
3. $|x-5| = 4$, en déduire la résolution de $\left|x^2-5\right| = 4$.

28. Polynômes et équations/inéquations

1. On considère $g(x) = 28x^2-7+2x(-2x+1)-(2x-1)^2$.

a. Factorisez $g(x)$ en remarquant que $28x^2-7 = 7\left(4x^2-1\right)$.

b. Déterminez l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) \ge 0$.

c. Déterminez l'ensemble des solutions de l'inéquation $g(x) < 5x+4$.

2. Factoriser : $P(x) = 3(4-x)(2x-1)+2(3-x)(4x-16)$ puis résoudre l'inéquation $P(x) \le 0$.

3. Soit $A(x) = x^2-4x$ et $B(x) = x(5x-10)$.

a. Ecrire $A(x) - B(x)$ sous forme factorisée.

b. Faire un tableau de signes pour le produit obtenu.

c. En utilisant les résultats du tableau, répondre aux questions suivantes :

Comment doit-on choisir x pour que $A(x) \geq B(x)$?

Comparer sans les calculer $A(x)$ et $B(x)$ pour $x = 1,5268$ puis pour $x = 7829$.

4. On considère $f(x) = -(x-2)(2x+7) + \left(x^2 - 4\right)$.

a. Factorisez $f(x)$.

b. Résolvez $f(x) = 0$.

c. Déterminez l'ensemble S des solutions de l'inéquation $f(x) > 0$.

29. Valeurs absolues et inéquations

1. Résoudre successivement $|2x-9| < 5$, $|2x-9| = 5$, $|2x-9| > 5$.

2. En déduire le tableau de signe de l'expression $|2x-9| - 5$.

3. Résoudre alors l'inéquation $\dfrac{|2x-9|-5}{21-3x} \leq 0$.

30. Equations et PGCD

1. a. Donner la décomposition en facteurs premiers de 357 et de 105.

b. Déterminer le PGCD de 357 et 105.

c. Simplifier la fraction suivante : $\dfrac{357}{105}$.

d. Citer le plus petit ensemble auquel appartient cette fraction et justifier.

2. Résoudre les deux équations suivantes :

a. $357(x + 2) = 105(3x - 2) + 21(2x + 7)$

b. $\dfrac{357x-357}{210x+105} = \dfrac{17}{5}$

31. Fonctions et inéquations (c)

Soit la fonction f définie par $f(x) = -x + \dfrac{6}{x+1}$. C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unités : 2 cm).

1. Quel est son ensemble de définition ?

2. Montrer que f est décroissante lorsque $x < -1$. Qu'en est-il lorsque $x > -1$?

3. Déterminer par le calcul la position C par rapport à la droite D $(y = -x)$.

4. Tracer D et C.

5. Déterminer graphiquement la position de C par rapport à (Ox).

6. Quelles inéquations doit-on résoudre pour répondre par le calcul à la question 5 ?

7. Vérifier que $f(x) = \dfrac{-x^2 - x + 6}{x+1}$ puis que $-x^2 - x + 6 = -\left[\left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4}\right]$. Résoudre alors par le calcul l'inéquation $f(x) \geq 0$ et conclure quand à la question 5.

Correction

1. $E_f = \mathbb{R} - \{-1\}$.

2. Prenons a et b tels que $a < b < -1$, alors $-a > -b > 1$ et

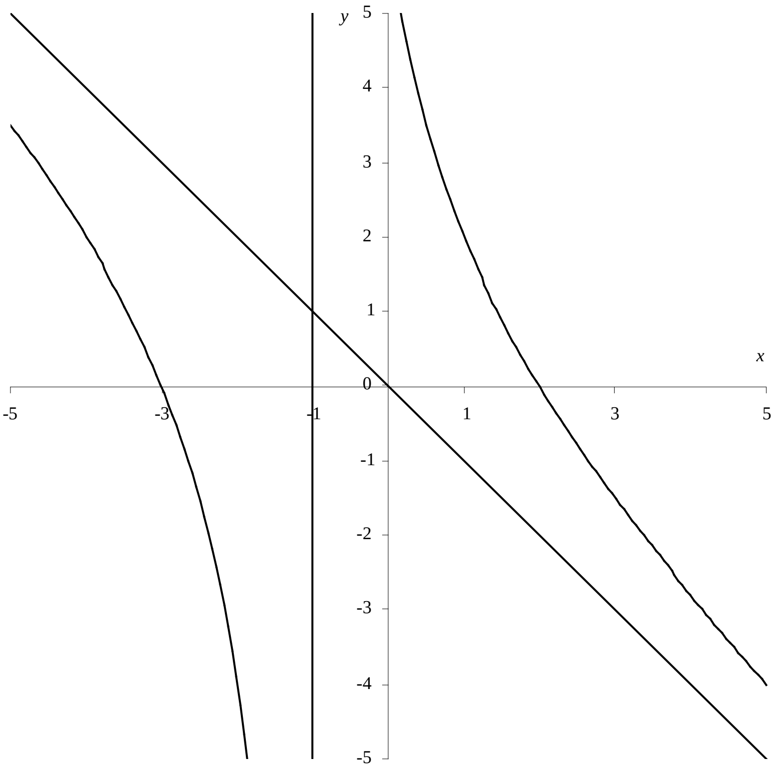
$a+1 < b+1 < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{a+1} > \dfrac{1}{b+1} \Rightarrow \dfrac{6}{a+1} > \dfrac{6}{b+1}$;

en ajoutant les deux inégalités, on a $-a+\frac{6}{a+1}>-b+\frac{6}{b+1}\Leftrightarrow f(a)>f(b)$ donc l'inégalité de départ a été changée, la fonction est décroissante.

Lorsque $x>-1$ c'est bien évidemment la même chose, cette condition n'intervenant pas.

3. Il nous faut le signe de la différence $f(x)-(-x)=\frac{6}{x+1}$: lorsque $x>-1$, $\frac{6}{x+1}>0$ donc C est au dessus de D ; lorsque $x<-1$, $\frac{6}{x+1}<0$ donc C est en dessous de D.

4.



5. Lorsque $x\in]-\infty\,;-3]\cup]-1\,;2]$ C est au-dessus de (Ox) ; lorsque $x\in[-3\,;-1[\cup[2\,;+\infty[$ C est en dessous de (Ox).

6. On doit résoudre $f(x)\geq 0$ pour savoir quand C est au-dessus de (Ox) ; $f(x)\leq 0$ pour savoir quand C est en dessous de (Ox).

7. On calcule : $f(x)=-x+\frac{6}{x+1}=\frac{-x(x+1)+6}{x+1}=\frac{-x^2-x+6}{x+1}$; puis on vérifie en développant :

$$-\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right]=-\left[x^2+2\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}-\frac{25}{4}\right]=-\left[x^2+x-\frac{24}{4}\right]=-x^2-x+6\ ;$$

enfin on factorise : $-\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right]=-\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{2}\right]\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{2}\right]=-(x+3)(x-2)$, ce qui donne pour *f* : $f(x)=\frac{-(x+3)(x-2)}{x+1}$.

Il reste à faire le tableau de signes :

x		-3		-1		2	
$-(x+3)$	$+$	0	$-$		$-$		$-$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

et l'on retrouve le résultat précédent.

32. Avez-vous compris ? (c)

En corrigeant la copie d'Emile Franc, élève de 2nde 24 bis, voici ce que j'ai trouvé :

Enoncé : Résoudre $\dfrac{5x}{1-x} \leq \dfrac{10x}{2x+1}$.

Réponse

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}-\left\{-1\,;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Je passe tout à gauche : $\dfrac{5x}{1-x}-\dfrac{10x}{2x+1} \leq 0$, soit $\dfrac{10x^2+5x-10x-10x^2}{(1-x)(2x+1)} \leq 0$ et enfin $\dfrac{-5x}{(1-x)(2x+1)} \leq 0$.

Je fais le tableau de signes :

x		$-1/2$		1		5	
$1-x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-5x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
quotient	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$

Et je conclus : $x \in]-1/2\,;1[\cup]5\,;+\infty]$.

1. Saurez-vous trouver les erreurs d'Emile ?

2. Résoudre correctement l'inéquation $\dfrac{5x}{1-x} \leq \dfrac{10x}{2x+1}$.

Correction

Erreur 1 : L'ensemble de définition est $\mathbb{R}-\left\{1\,;-\dfrac{1}{2}\right\}$.

Je passe tout à gauche : $\dfrac{5x}{1-x}-\dfrac{10x}{2x+1} \leq 0$, soit

Erreur 2 : $\dfrac{10x^2+5x-10x+10x^2}{(1-x)(2x+1)} \leq 0$, l'expression dont on cherche le signe est alors $\dfrac{-5x+20x^2}{(1-x)(2x+1)} \leq 0$.

Trois erreurs dans le T.S. :
la valeur qui annule $-5x$ est 0 et non 5 ; le signe de $1-x$ est + puis − ; il faut deux barres sous le 1.

x		$-1/2$		1		$\boxed{5}$	
$1-x$	$\boxed{-}$		$-$	0	$+$		$+$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$-5x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
quotient	$+$	0	$-$	$\boxed{0}$	$+$	$\Vert$	$-$

La conclusion est fausse : $x\in[-1/2\,;1[\cup]5\,;+\infty[$.

2. $\dfrac{5x}{1-x}\le\dfrac{10x}{2x+1}$ donne donc $\dfrac{-5x+20x^2}{(1-x)(2x+1)}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{5x(4x-1)}{(1-x)(2x+1)}\le 0$.

x		$-1/2$		0		$1/4$		1	
$1-x$	$+$		$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$
$5x$	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$
$4x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
quotient	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$

La solution est $x\in]-\infty\,;-1/2[\cup[0\,;1/4]\cup[1\,;+\infty[$.

33. Trigonométrie (c)

Soit la fonction $f(x)=4x^2-4x-3$.

1. Trouver a, b et c réels tels que $f(x)=a\left[(x+b)^2+c\right]$; en déduire la factorisation suivante de f : $f(x)=(2x+1)(2x-3)$.

2. Résoudre l'inéquation $f(x)\le 0$.

3. Résoudre les inéquations suivantes :

* $4\cos^2 x-4\cos x-3\le 0$

* $4\sin^2 x-4\sin x-3\le 0$.

Correction

1. $f(x)=a\left[(x+b)^2+c\right]=ax^2+2abx+a\left(b^2+c\right)\Rightarrow\begin{cases}a=4\\2ab=-4\\a(b^2+c)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=-1/2\\4\left(\dfrac{1}{4}+c\right)=-3\Rightarrow c=-1\end{cases}$;

on a donc $f(x)=4\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-1\right]=2\left(x-\frac{1}{2}+1\right)2\left(x-\frac{1}{2}-1\right)=(2x+1)(2x-3)$.

2. $f(x)\le 0 \Leftrightarrow (2x+1)(2x-3)\le 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{3}{2}\right]$ après tableau de signes.

3. $4\cos^2 x-4\cos x-3\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\cos x \\ 4X^2-4X-3\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\cos x \\ -\frac{1}{2}\le X\le\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le \cos x\le\frac{3}{2}$; il faut donc que $-\frac{1}{2}\le \cos x\le 1$, soit que x soit compris entre $-\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$.

Pour sin x, c'est le même genre de choses, ici cela donne $x\in\left[-\pi\,;\frac{-5\pi}{6}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6}\,;\pi\right]$.

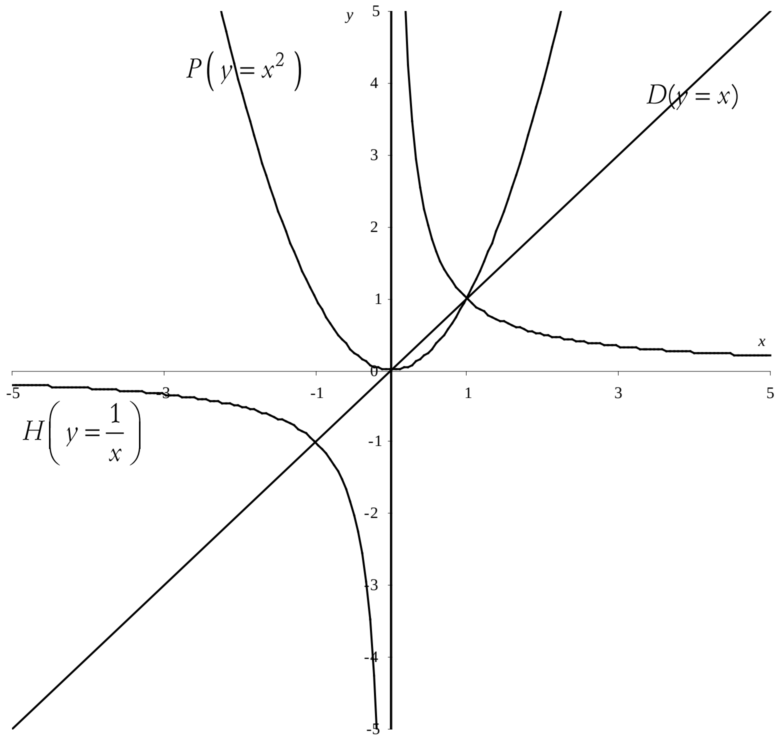
34. Equations et inéquations (c)

1. Tracer dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (unité : 2 cm) les courbes $H\left(y=\frac{1}{x}\right)$, $P\left(y=x^2\right)$ et $D(y=x)$.

2. Résoudre graphiquement puis par le calcul les inéquations : $x<x^2$, $x<\frac{1}{x}$ et $x^2<\frac{1}{x}$.

Correction

1.



2. Graphiquement : $x<x^2$ lorsque D est en dessous de P, soit pour $x\in\,]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$;

$x<\frac{1}{x}$ lorsque D est en dessous de H, soit pour $x\in\,]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$;

x		0		1	
x^3-1	−		−	0	+
x	−	0	+		+
quotient	+	‖	−	0	+

et $x^2 < \frac{1}{x}$ lorsque P est en dessous de H, soit pour $x \in]0\,;1[$.

Par le calcul :

* $x < x^2 \Leftrightarrow x - x^2 < 0 \Leftrightarrow x(1-x) < 0$; on fait le T.S, ce qui donne $x \in]-\infty\,;0[\cup]1\,;+\infty[$;

* $x < \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x} < 0$; on fait le T.S, ce qui donne $x \in]-\infty\,;-1[\cup]0\,;1[$;

* $x^2 < \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x} < 0$; or $x^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^3 < 1 \Leftrightarrow x < 1$; on a donc le T.S. suivant et le résultat $x \in]0\,;1[$.

35. Résolution approchée d'équation (c)

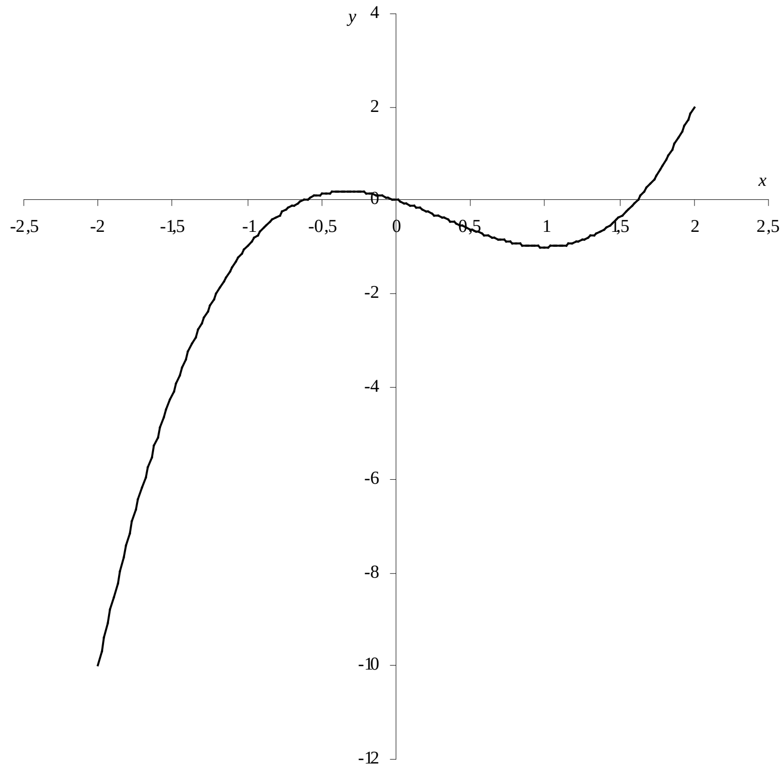
On veut résoudre à la calculatrice l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = x^3 - x^2 - x$.

1. Expliquer en traçant la fonction pourquoi il y a trois solutions. Vérifier qu'une des solutions est 0.

2. A l'aide du *zoom* ou du mode *trace*, donner des valeurs approchées à 10^{-2} près de ces solutions. Contrôlez votre résultat avec un calcul.

Correction

1. Comme on le voit sur la figure, la courbe de f coupe trois fois l'axe (Ox), et particulièrement en 0 : $f(0) = 0^3 - 0^2 - 0 = 0$.



2. La première solution est environ $-0{,}618$, la deuxième environ 1,618. On calcule $f(-0{,}618) \approx 5.10^{-5}$ et $f(1{,}618) \approx 12.10^{-5}$, donc les deux sont très proches de 0.

En fait on peut factoriser f : $f(x)=x(x^2-x-1)$ et $x^2-x-1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$ d'où l'on tire les solutions $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

36. Fonctions : inéquations (c)

Soient les fonctions $f(x)=8-x^3$ et $g(x)=-4x+8$.

1. Représenter les courbes des fonctions f et g.

2. a. Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=g(x)$.

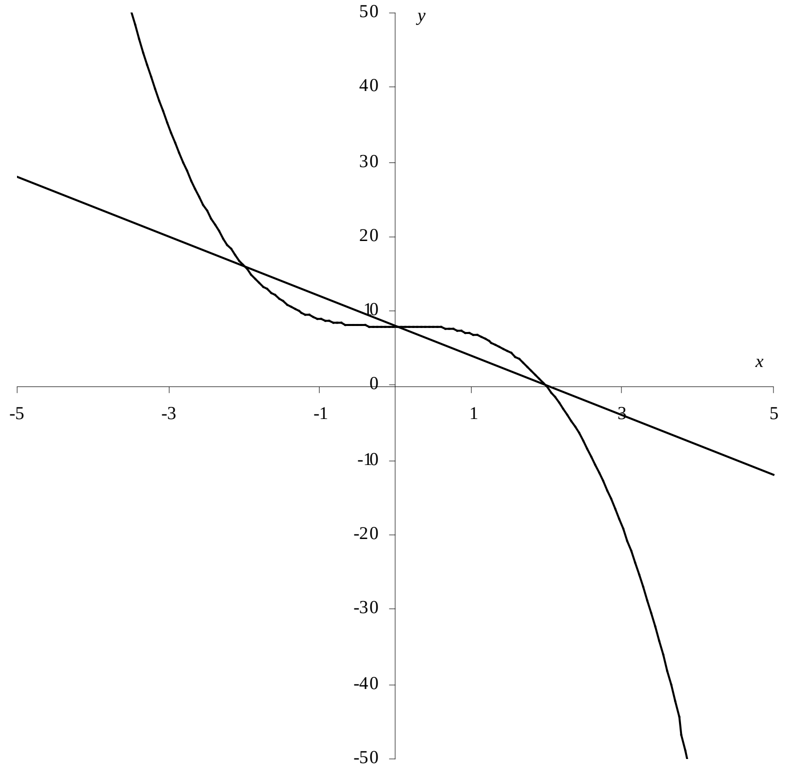
b. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x)\geq g(x)$.

3. Factoriser l'expression $f(x)-g(x)$.

4. Résoudre alors par le calcul l'équation et l'inéquation du 2.

<u>Correction</u>

1. Représentation (g est représentée par une droite…)



2. a. Il semble que les points d'intersection entre les courbes soient en −2, 0 et 2.

b. $f(x)\geq g(x)$ lorsque la courbe de f est au-dessus de celle de g : soit lorsque $x\in]-\infty\,;-2]\cup[0\,;2]$.

3. $f(x)-g(x)=(8-x^3)-(-4x+8)=4x-x^3=x(4-x^2)=x(2-x)(2+x)$.

4. Un petit tableau de signes redonne le résultat précédent.

x		-2		0		2	
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$2-x$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2+x$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)-g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

37. Module : signes

1. Signe d'un produit

a. Remplir ce tableau :

	Vrai	Faux
$2\times 3\leq 0$		
$1,1\times(-2)<0$		
$4\times\sqrt{2}\geq 0$		
$\sqrt{3}\times(-5)>0$		
$(-4)\times(-3)\leq 0$		

b. Compléter ces deux phrases :

* $4\times x$ est négatif quand x est ……………………..
* $-3\times a$ est positif quand a est ……………………..

c. Remplir ce deuxième tableau :

Signe du produit ab	$a\leq 0$	$a\geq 0$
$b\leq 0$	ab.....0	ab.....0
$b\geq 0$	ab.....0	ab.....0

2. Inéquations du premier degré

a. On veut résoudre l'inéquation $2x-3\geq 0$, représenter graphiquement l'ensemble S des solutions et dresser un tableau de signe. Compléter la solution proposée.

On résout d'abord $2x-3\geq 0$: $2x-3\geq 0 \Leftrightarrow 2x\geq 3\Leftrightarrow$ … . D'où $S=$.....

Représentation graphique de l'ensemble des solutions :

Tableau de signe :

x	
$2x-3$	

b. Refaire de même sur ta feuille avec : $3x-21\leq 0$ et $7-2x\geq 0$.

3. Inéquations produits

a. On veut résoudre l'inéquation produit $(3x-1)\times(x+2)>0$ et représenter graphiquement l'ensemble S des solutions. Compléter la solution proposée.

x		$\frac{1}{3}$	
$3x-1$			
$x+2$	0		
$(3x-1)\times(x+2)$		0	

Conclusion $S=$.................. et

d. Refaire de même sur ta feuille avec : $(2-x)\times(x+1)\geq 0$ et $(2x-3)\times(7-x)\leq 0$.

38. Ordre, valeur absolue, inéquations 1

1. Sachant que $2<\sqrt{7}<3$, déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de $\sqrt{7}$ sans utiliser la touche « racine » de votre calculatrice . Décrire précisément la méthode utilisée .

2. On suppose maintenant que $2,6<\sqrt{7}<2,7$ et que $2,3<\frac{7}{3}<2,4$; déterminer un encadrement de $\frac{7}{3}-\sqrt{7}$ puis un encadrement de $\frac{\sqrt{7}}{\frac{7}{3}}$ en utilisant les encadrements précédents .

3. Ecrire le nombre $\left|\frac{7}{3}-\sqrt{7}\right|$ sans utiliser les valeurs absolues.

4. Résoudre l'équation $|x+2|=\frac{5}{2}$.

5. Résoudre l'inéquation $\left|x-\frac{1}{3}\right|\leq\frac{2}{3}$.

39. Ordre, valeur absolue, inéquations 2

1. Sachant que $3<\sqrt{11}<4$, déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près par défaut de $\sqrt{11}$ sans utiliser la touche « racine » de votre calculatrice . Décrire précisément la méthode utilisée .

2. On suppose maintenant que $3,3<\sqrt{11}<3,4$ et que $3,4<\frac{24}{7}<3,5$ déterminer un encadrement de $\frac{24}{7}-\sqrt{11}$ puis un encadrement de $\frac{\sqrt{11}}{\frac{24}{7}}$ en utilisant les encadrements précédents .

3. Ecrire le nombre $\left|\sqrt{11}-\frac{24}{7}\right|$ sans utiliser les valeurs absolues.

4. Résoudre l'équation $|x+4|=\frac{3}{2}$.

5. Résoudre l'inéquation $\left|x-\frac{2}{3}\right|>\frac{1}{3}$.