Première S

**Exercices : Suites Numériques**

[1.  Généralités 2](#_Toc215215797)

[1-1 :  Basique 1 2](#_Toc215215798)

[1-2 :  Basique  2 2](#_Toc215215799)

[1-3 :  Basique  3 2](#_Toc215215800)

[1-4 :  Basique  4 3](#_Toc215215801)

[1-5 :  Basique  5 3](#_Toc215215802)

[1-6 :  Basique  6 3](#_Toc215215803)

[1-7 :  Basique  7 3](#_Toc215215804)

[1-8 :  Basique  8 3](#_Toc215215805)

[1-9 :  Salaires 3](#_Toc215215806)

[1-10 :  Suites arithmétiques - 1 4](#_Toc215215807)

[1-11 :  Suites arithmétiques - 2 4](#_Toc215215808)

[1-12 :  Suites arithmétiques - 3 4](#_Toc215215809)

[1-13 :  Suites géométriques - 1 4](#_Toc215215810)

[1-14 :  Suites géométriques - 2 (c) 4](#_Toc215215811)

[1-15 :  Suites géométriques - 3 5](#_Toc215215812)

[2.  Convergence 5](#_Toc215215813)

[2-16 :  Limites – 1 5](#_Toc215215814)

[2-17 :  Limite d’une somme 5](#_Toc215215815)

[2-18 :  Limite d’une suite - QCM 6](#_Toc215215816)

[2-19 :  Limite d’une suite - 1 6](#_Toc215215817)

[2-20 :  Limite d’une suite - 2 6](#_Toc215215818)

[3.  Récurrence 7](#_Toc215215819)

[3-21 :  Raisonnement par récurrence (c) 7](#_Toc215215820)

[3-22 :  Un exemple « amusant » 7](#_Toc215215821)

[3-23 :  Une inégalité importante (c) 7](#_Toc215215822)

[3-24 :  Récurrence et conjecture 8](#_Toc215215823)

[4.  Exemples variés 9](#_Toc215215824)

[4-25 :  Une suite 9](#_Toc215215825)

[4-26 :  Une autre suite 9](#_Toc215215826)

[4-27 :  Encore une suite 9](#_Toc215215827)

[4-28 :  Encore une suite - 2 9](#_Toc215215828)

[4-29 :  Y fait chô 10](#_Toc215215829)

[5.  Suites adjacentes 10](#_Toc215215830)

[5-30 :  Barycentre (c) 10](#_Toc215215831)

[5-31 :  Aire 11](#_Toc215215832)

[5-32 :  Approximation décimale 11](#_Toc215215833)

[5-33 :  zeta(2) 12](#_Toc215215834)

[6.  Suites récurrentes 12](#_Toc215215835)

[6-34 :  Suite linéaire - 1 12](#_Toc215215836)

[6-35 :  Suite linéaire - 2 12](#_Toc215215837)

[6-36 :  Suite linéaire - 3 12](#_Toc215215838)

[6-37 :  Suite linéaire et aires de triangles 13](#_Toc215215839)

[6-38 :  Suite récurrente - 2 14](#_Toc215215840)

[6-39 :  Suite récurrente - 3 14](#_Toc215215841)

[6-40 :  Suite récurrente – 4 14](#_Toc215215842)

[6-41 :  L’algorithme de la racine carrée 15](#_Toc215215843)

[6-42 :  Récurrence sur deux termes 16](#_Toc215215844)

[6-43 :  Coccinelles 16](#_Toc215215845)

[6-44 :  Les lettres de Gaston (c) 18](#_Toc215215846)

[6-45 :  Suite récurrente 21](#_Toc215215847)

[6-46 :  Le nombre d’or 21](#_Toc215215848)

[7.  Divers 22](#_Toc215215849)

[7-47 :  Polynomes de Bernoulli 22](#_Toc215215850)

[7-48 :  Série harmonique 23](#_Toc215215851)

[7-49 :  Une somme 23](#_Toc215215852)

## Généralités

### Basique 1

La location d'une machine coûte 60 € la 1ère journée. La 2ème journée de location coûte 65 € et chaque journée supplémentaire 5 € de plus que la précédente.

Combien de jours pourra-t-on utiliser la machine avec un budget de 3570 € ? Vous ferez apparaître sur votre copie tous les calculs nécessaires.

### Basique  2

1. (*un*) désigne une suite arithmétique de premier terme *u*0 = 1 et de raison 4.

a. Calculer *u*1, *u*2, *u*3.

b. Donner *un* en fonction de *n* et calculer *u*19.

2. (*vn*) désigne une suite géométrique de premier terme *v*0 = 2 et de raison 3.

a. Calculer *v*1, *v*2, *v*3.

b. Donner *vn* en fonction de *n* et calculer *v*10.

c. Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite (*vn*).

### Basique  3

Au pays des plantes géantes, les nénuphars poussent en doublant chaque jour leur surface. Un matin un nénuphar éclôt au centre d'un étang circulaire d'un rayon de 100 m ; le nénuphar mesure alors 1 cm de rayon.

1. Exprimer la surface *Sn* du nénuphar après *n* jours en fonction de l'entier *n*.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer le jour au cours duquel le nénuphar recouvrira tout l'étang.

3. Montrer que le rayon *rn* du nénuphar, après *n* jours, est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

4. Deux nénuphars éclosent un certain jour à une distance de 20 m l'un de l'autre. L'un mesure 1 cm de rayon, l'autre 2 cm. A l'aide d'une calculatrice, déterminer le jour au cours duquel leurs feuilles se chevaucheront.

### Basique  4

(*un*) est la suite définie sur  par . Déterminer le sens de variation de cette suite. Préciser sa limite.

### Basique  5

(*un*) est la suite géométrique de premier terme *u*0 = 8 et de raison *q* = .

1. Calculer les termes *u*1, *u*2, *u*20.

2. Montrer que la somme  est égale à 

### Basique  6

Soit la suite (*un*) définie par *u*0 = 1 et .

1. Calculer les termes *u*1 et *u*2.

2. La suite (*un*) est-elle arithmétique ? géométrique ?

3. Reprsenter graphiquement les premiers termes de *un*. Quelles conjectures émettez-vous ?

4. On admet que, pour tout *n*, *un* n’est pas nul. On pose .

a. Calculer *v*0, *v*1, et *v*2.

b. Calculer *vn*+1 en fonction de *vn*. En déduire que (*vn*) est une suite arithmétique.

c. Exprimer *vn* en fonction de *n*. En déduire *un* en fonction de *n*.

### Basique  7

Déterminer la monotonie des suites  et  définies par  et  (on pourra comparer  et).

### Basique  8

On considère la suite  définie par .

1. Écrire le terme général  à l'aide du symbole .

2. Donner une valeur approchée de ,  et  à 0,1 près. Conjecturer la monotonie de la suite .

3. Démontrer votre conjecture.

### Salaires

Un chef d’entreprise paie 60 000 F par an pour l’entretien de ses machines. Lors du renouvellement du contrat pour les dix prochaines années, une société lui propose deux formules :

Contrat A : Le contrat augmente de 5% par an.

1. Exprimer en fonction de *n* le montant *un* du contrat lors de la *n*ième année.

2. Calculer le montant du contrat pour la 10ème année.

3. Au bout de combien d’années le contrat dépasserait-il le double du contrat initial ?

4. Calculer la somme payée, au total, au bout de ces 10 années.

Contrat B : Le contrat augmente de 3500 F par an.

1. Exprimer en fonction de *n* le montant *vn* du contrat lors de la *n*ième année.

2. Calculer le montant du contrat pour la 10ème année.

3. Calculer la somme payée, au total, au bout de ces 10 années.

4. Quel est le contrat le plus avantageux ?

### Suites arithmétiques - 1

1. Soit  une suite arithmétique. On sait que  et . Calculer la raison et le premier terme de cette suite.

2. En déduire  en fonction de .

3. Pour quelle valeur de  a-t-on  ?

4. A partir de quel rang a-t-on  ?

5. Calculer la somme .

### Suites arithmétiques - 2

Soit  la suite arithmétique de raison 4 et de premier . Calculer la somme 

### Suites arithmétiques - 3

On considère la suite  définie par  et .

1. Calculer .

2. Démontrer que la suite  définie par  est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison de .

3. En déduire l’expression de  en fonction de , puis l’expression de  en fonction de .

4. En déduire que la suite  est strictement monotone et bornée.

### Suites géométriques - 1

On laisse tomber une balle d’une hauteur de 1 mètre. A chaque rebond elle rebondit des 3/4 de la hauteur d’où elle est tombée.

1. On note la hauteur atteinte au *n*ième rebond. Calculer la hauteur atteinte au 2ème rebond, au 10ème, au 1000ème.

2. A quel rebond la hauteur atteinte est elle inférieure à 10−12 mètre ? Quelle est alors la distance parcourue par la balle ?

### Suites géométriques - 2 (c)

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23% de son intensité lumineuse.

1. Soit *I*0 l’intensité d’un rayon lumineux à son entrée dans la plaque de verre et *I*1 son intensité à la sortie. Exprimer *I*1 en fonction de *I*0.

2. On superpose *n* plaques de verre identiques ; on note *In* l’intensité du rayon à la sortie de la *n*-ième plaque.

a. Exprimer *In* en fonction de .

b. Quelle est la nature de la suite *In* ? Déterminer l’expression de *In* en fonction de *n* et de *I*0.

c. Quel est le sens de variation de *In* ?

3. Quelle est l’intensité initiale d’un rayon dont l’intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?

4. Calculer le nombre minimum de plaques qu’un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante ?

Correction

1. La perte de 23 % correspond à .

2. a. A chaque passage l’intensité est multipliée par 0,77 : .

b.  est une suite géométrique de raison 0,77. On a .

c. Comme ,  est décroissante.

3. On cherche  sachant que  : .

4. On cherche *n* pour que . A la machine on a les résultats suivants :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* | *In* | *n* | *In* |
| 0 | 1 | 9 | 0,09515169 |
| 1 | 0,77 | 10 | 0,0732668 |
| 2 | 0,5929 | 11 | 0,05641544 |
| 3 | 0,456533 | 12 | 0,04343989 |
| 4 | 0,35153041 | 13 | 0,03344871 |
| 5 | 0,27067842 | 14 | 0,02575551 |
| 6 | 0,20842238 | 15 | 0,01983174 |
| 7 | 0,16048523 | 16 | 0,01527044 |
| 8 | 0,12357363 | 17 | 0,01175824 |

Pour *n*=6 on est en dessous de 1/4.

### Suites géométriques - 3

On place un capital *C* de 10 000 € à 6% par an en capitalisant les intérêts.

1. De combien dispose-t-on au bout d’un an ? de 2 ans ? de *n* ans ?

2. Au bout de combien d’années le capital initial sera-t-il doublé ?

3. On place *C* à *t*% par an. Sachant qu’au bout de 10 ans ce capital est doublé quel est le taux annuel des intérêts ?

4. On rajoute *C* tous les ans, toujours à 6% par an. De combien disposera-t’on au bout de 10 ans ?

## Convergence

### Limites – 1

Déterminer la limite des suites définies par leur terme général

  .

### Limite d’une somme

On considère la suite  définie par : .

1. Montrer que, pour tout entier , on a .

2. En déduire que, pour tout  de  : .

3. Montrer que la suite  est convergente et préciser sa limite.

### Limite d’une suite - QCM

Dire si les propriétés sont vraies, fausses ou si l’on ne peut rien dire (on justifiera ses dires).

1. Une suite  vérifie pour tout *n* > 100 l’inégalité .

a.  est bornée. b.  tend vers 1 c.  est croissante

2. Une suite  qui vérifie pour tout *n*  est strictement décroissante.

3. La suite  définie par  vérifie . Elle est :

a. décroissante, b. bornée, c. convergente.

4. Toute suite convergente est bornée.

5. Toute suite non majorée tend vers .

### Limite d’une suite - 1

1. Soit une suite de terme général *un* . Que signifie : la suite (*un*) a pour limite ?

2. Soit la suite (*un*) définie par  pour n ≥1.

a. Montrez qu’à partir d’un certain rang , à déterminer, tous les termes de la suite appartiennent à l’intervalle ]10 ; [.

b. Soit *A* un réel aussi grand que l’on veut (on peut supposer ) ; montrez qu’à partir d’un certain rang , à déterminer enfonction de *A*, tous les termes de la suite appartiennent à l’intervalle ]*A*; [.

c. En déduire à l’aide du 1. la limite de la suite (*un*).

d. Donnez une méthode pratique permettant d’obtenir cette limite sans avoir recours à la définition.

### Limite d’une suite - 2

*Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM). Les quatre questions sont indépendantes.*

*Pour chaque question il y a deux conclusions correctes. Le candidat doit cocher au plus deux cases (celles qu’il juge correctes). Aucune justification n’est demandée.*

On considère trois suites (*un*), (*vn*) et (*wn*) qui vérifient la propriété suivante :

« Pour tout entier naturel *n* strictement positif : ».

1. Si la suite (*vn*) tend vers −∞, alors :

□ La suite (*wn*) tend vers −∞

□ la suite (*un*) est majorée

□ la suite (*un*) tend vers −∞

□ la suite (*wn*) n’a pas de limite.

2. Si *un* > 1, *wn* = 2*un* et lim(*un*) = *l*, alors :

□ lim (*vn*) = *l*

□ La suite (*wn*) tend vers +∞

□ lim (*wn* − *un*) = *l*

□ On ne sait pas dire si la suite (*vn*) a une limite ou non.

3. Si lim (*un*) = −2 et lim (*wn*) = 2, alors :

□ La suite (*vn*) est majorée

□ lim (*vn*) = 0

□ la suite (*vn*) n’a pas de limite

□ On ne sait pas dire si la suite (*vn*) a une limite ou non.

4. Si  et  alors :

□ lim (*wn*) = 0

□ lim (*vn*) = 2

□ lim (*un*) = 2

□ la suite (*vn*) n’a pas de limite.

## 

## Récurrence

### Raisonnement par récurrence (c)

1. On note  (et on lit « factorielle » *n*).

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel , on a : .

2. Démontrez que, pour tout entier naturel *n*, l’entier  est un multiple de 7.

Correction

1. Pour  la propriété est  ce qui est vrai.

Supposons que  ; alors il faut montrer que . Or par hypothèse  donc en multipliant par  qui est supérieur à 2, on a .

2. Vérifions pour quelques valeurs que cela marche :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *n* |  |  |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 7 | 1 |
| 2 | 77 | 11 |
| 3 | 721 | 103 |
| 4 | 6545 | 935 |
| 5 | 59017 | 8431 |
| 6 | 531377 | 75911 |
| 7 | 4782841 | 683263 |
| 8 | 43046465 | 6149495 |
| 9 | 387419977 | 55345711 |
| 10 | 3486783377 | 498111911 |

On suppose donc que  est un multiple de 7, soit  où *k* est un entier.

Montrons maintenant que  : cela donne  ; or  d’où en remplaçant :

.

On a donc  qui est bien un entier.

### Un exemple « amusant »

Soit . Montrer que  converge et trouver sa limite.

### Une inégalité importante (c)

1. Montrer que pour tout réel *x* positif ou nul et pour tout entier *n* positif ou nul, on a .

2. Soit la suite . Calculer les valeurs de *un* pour *n*=1, 2, 3, 10, 100 .Que remarquez vous ?

3. En utilisant le 1., montrer que pour tout *n*>0, on a . En déduire le sens de variation de  et que 

4. Quelle est la limite de *un* quand *n* tend vers .

Correction

1. Par récurrence : pour *n* = 0,  ; ok.

On suppose que  et on multiplie tout par  :

.

C’est ok !

2. .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* | *n*! | *nn* | *un* |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 2 | 4 | 0,5 |
| 3 | 6 | 27 | 0,22222222 |
| 4 | 24 | 256 | 0,09375 |
| 5 | 120 | 3125 | 0,0384 |
| 6 | 720 | 46656 | 0,0154321 |
| 7 | 5040 | 823543 | 0,0061199 |
| 8 | 40320 | 16777216 | 0,00240326 |
| 9 | 362880 | 387420489 | 0,00093666 |
| 10 | 3628800 | 1E+10 | 0,00036288 |
| 100 | 9,333E+157 | 1E+200 | 9,3326E-43 |

La suite semble décroître et tendre vers 0.

3. .

On applique l’inégalité du 1. avec  : . CQFD.

Tous les termes de la suite sont positifs évidemment donc , la suite est bien décroissante.

Par récurrence on a  ; puis  et . Ok !

4. Comme  tend vers 0 lorsque *n* tend vers l’infini, et que u, on a .

### Récurrence et conjecture

On considère la suite (*un*) définie par  pour tout entier naturel *n*.

1. Etudier la monotonie de la suite (*un*).

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel *n*, .

b. Quelle est la limite de la suite (*un*) ?

3. Conjecturer une expression de *un* en fonction de *n*, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

## Exemples variés

### Une suite

*un* est la suite définie par . Déterminer le sens de variation de *un*.

### Une autre suite

Soit (*un*) la suite de terme général  définie pour *n* > 0.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (*un*).

2. On admet les deux résultats suivants :

\* pour tout *n* pair non nul, ,

\* pour tout *n* impair, .

a. Montrer que pour tout *n* > 0, on a : .

b. En déduire que pour tout *n* > 0, on a l’encadrement .

c. Montrer que la suite (*un*) converge et déterminer sa limite.

### Encore une suite

On définit une suite (*un*) par .

1. Calculer *u*1, *u*2, *u*3. La suite (*un*) est-elle croissante ou décroissante?

2. On pose *vn* = *un* − 4*n* + 10. Calculer *v*0, *v*1, *v*2, *v*3.

3. Montrer que la suite (*vn*) est géométrique, en préciser la raison.

4. En déduire l’expression de *vn* en fonction de *n*.

5. En déduire l’expression de *un* en fonction de *n*.

6. Quelle est la limite de (*un*)?

7. On pose S*n* = *u*0 + *u*1 + *u*2 + ... + *un*. Donner l’expression de S*n* en fonction de *n*.

### Encore une suite - 2

On définit une suite (*un*) par 

1. Montrer que . La suite (*un*) est-elle géométrique, arithmétique ?

2. On définit la suite (*vn*) par . Calculer .

3. Montrer que la suite (*vn*) est géométrique de raison .

4. En déduire l’expression de *vn* puis celle de *un* en fonction de *n*.

5. Quelle est la limite de (*vn*) ? Celle de (*un*) ?

6. Calculer .

7. Calculer .

### Y fait chô

On admet que si on mélange un litre d'eau à la température *T* et un litre d'eau à la température *T’*, on obtient deux litres d'eau à la température .

On dispose d'un litre d'eau à la température *T*0 = 80 °C ; on lui ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient deux litres à la température *T*1.

On prélève alors un litre sur les deux obtenus, auquel on ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient deux litres d'eau à la température *T*2.

On répète le processus : on prélève un litre sur les deux obtenus, auquel on ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient deux litres à la température *T*3.

1. On fabrique ainsi une suite (*Tn*) telle que *Tn*+1 est la température du mélange d'un litre d'eau à la température *Tn* et d'un litre d'eau à la température 20°C.

a. Calculer *T*1, *T*2 et *T*3.

b. Exprimer *Tn*+1 en fonction de *Tn*.

2. Soit la suite (*un*) telle que pour tout *n*, *un* = *Tn* − 20.

a. Démontrer que la suite (*un*) est une suite géométrique.

b. Exprimer *un* en fonction de l'entier *n*.

c. En déduire que pour tout *n*, .

d. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le premier rang *n* à partir duquel .

## Suites adjacentes

### Barycentre (c)

Soit *an* et *bn* les suites définies pour tout *n* entier naturel par :



1. Soit (*un*) la suite de terme général  . Montrer que *un* est constante et calculer *un*.

2. Soit (*vn*) la suite de terme général  . Montrer que *vn* est une suite géométrique. En déduire l'expression de *vn* en fonction de *n*.

3. Exprimer *an* et *bn* en fonction de *un* et *vn* puis en fonction de *n*. Calculer .

Correction

1. .

*un* est constante et vaut .

2. .

*vn* est une suite géométrique de raison  et de premier terme . On a donc .

3. On a .

Comme  tend vers 0 à l’infini, .

On vérifie avec le tableur par exemple :

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *n* | *an* | *bn* | *n* | *an* | *bn* |
| 0 | 2 | 3 | 7 | 2,4999936 | 2,5000064 |
| 1 | 2,4 | 2,6 | 8 | 2,49999872 | 2,50000128 |
| 2 | 2,48 | 2,52 | 9 | 2,49999974 | 2,50000026 |
| 3 | 2,496 | 2,504 | 10 | 2,49999995 | 2,50000005 |
| 4 | 2,4992 | 2,5008 | 11 | 2,49999999 | 2,50000001 |
| 5 | 2,49984 | 2,50016 | 12 | 2,5 | 2,5 |
| 6 | 2,499968 | 2,500032 | 13 | 2,5 | 2,5 |

### Aire

Première partie

On considère la courbe (C) de la fonction inverse :  pour . On voudrait trouver une valeur approchée de l’aire comprise entre (C), l’axe (O*x*) et les droites d’équations *x* = 1 et *x* = 2. On découpe l’intervalle [1 ; 2] en *n* intervalles de même amplitude.

1. Donner les valeurs *x*0, *x*1, …, *xn* des bornes des intervalles.

2. Déterminer les images de ces valeurs par *f*.

3. En considérant les aires des *n* rectangles dont l’un des sommets est sur la courbe (C), déduire, en fonction de *n*, un encadrement de l’aire cherchée.

*Deuxième partie*

On considère la suite (*un*) définie par : , pour tout *n* de \*, et la suite (*vn*) définie par : , pour tout *n* de \*.

1. Déterminer *u*1, *u*2, *u*3, *u*4, *v*1, *v*2, *v*3, *v*4 et en donner des valeurs approchées à 10–2 près.

2. Représenter les points correspondants sur une droite.

3. Démontrer que la suite (*un*) est croissante et la suite (*vn*) est décroissante.

4. Calculer *vn* – *un* et démontrer que .

5. Quelle conjecture peut-on faire pour les suites (*un*) et (*vn*) ?

6. En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée à 10−3 près de *u*50 et *v*50 puis de *u*150 et *v*150 .

### Approximation décimale

On considère les suites (*un*) et (*vn*) définies par :  et  pour tout *n* de .

1. Donner les valeurs de *u*0, *v*0, *u*1, *v*1, *u*2, *v*2, *u*3, *v*3, *u*4, *v*4.

2. Démontrer que les suites (*un*) et (*vn*) sont adjacentes.

3. Quelle est leur limite ?

4. Que peut-on dire du nombre dont l’écriture décimale est 0,9999… ?

5. On connaît le développement décimal périodique d’un nombre. Donner une méthode permettant de retrouver la fraction dont ce nombre est issu.

### zeta(2)

On considère la suite définie par  et la suite  définie par .

1. Démontrer que les suites (*un*) et (*vn*) sont adjacentes.

2. Soit *l* leur limite. Donner un entier *n*0 pour lequel l’encadrement de *l* par  et  est un encadrement d’amplitude inférieure ou égale à 10–3.

3. En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée de  et .

Est-il possible que *l* soit égal à  ?

## Suites récurrentes

### Suite linéaire - 1

On considère la suite  définie par .

1. Calculer les 6 premiers termes de cette suite ; que pouvez vous conjecturer sur son comportement (sens de variation, limite) ?

2. On pose  ; montrer que  est une suite géométrique, donner l’expression de  puis celle de  en fonction de *n*. Prouver les résultats obtenus de manière divinatoire au a.

3. On considère  et . Donner les expressions de  et  en fonction de *n* ; déterminer leurs limites quand *n* tend vers l’infini.

### Suite linéaire - 2

1. Quel est le taux d’intérêt mensuel *t* que l’on doit utiliser pour obtenir un taux d’intérêt annuel *T* ?

2. On emprunte une somme S à un taux d’intérêt annuel *T* sur *n* années. Déterminer le montant du remboursement mensuel *R* (traite).

3. Vous empruntez 10 000 € à 5 % l’an sur 12 ans. Déterminez la traite que vous devrez payer mensuellement. Quel est le montant total des intérêts payés à la banque ?

### Suite linéaire - 3

Soit la suite  définie par :  et .

1. Montrer que la suite  de terme général  est une suite géométrique.

2. En déduire l'expression de  puis de  en fonction de *n*. Calculer alors la valeur exacte de .

3. Montrer que la suite  est décroissante et calculer sa limite.

4. Déterminer le plus petit entier naturel  à partir duquel 

5. Exprimer la somme  en fonction de .

6. Déterminer la limite de la suite . Est-elle convergente ?

### Suite linéaire et aires de triangles

Soit la suite (*un*) définie par son premier terme *u*1= et par la relation .

Partie I

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (*un*).

2. En utilisant une représentation graphique adaptée émettre quelques conjectures sur le comportement de (*un*) : sens de variation, limite.

3. Soit la suite (*vn*) définie par .

a. Montrer que (*vn*) est une suite géométrique.

b. Déterminer le terme général *vn* en fonction de *n*.

c. En déduire le terme général *un* en fonction de *n*.

4. Etudier la limite de la suite (*un*).

Partie II

On considère un triangle *ABC* isocèle rectangle tel que *BA* = *BC* = 5.

On divise ce triangle en 4 triangles isocèles rectangles obtenus en joignant les milieux des côtés et on numérote 1 le triangle central (Etape 1).

Chacun des 3 triangles non numérotés est alors divisé en 4 triangles isocèles rectangles obtenus comme précédemment et on numérote 2 le triangle central comme précédemment. Il y a donc 3 triangles numérotés 2 (Etape 2).

Après trois étapes, on obtient la figure ci-dessous contenant 1 triangle numéroté 1, 3 triangles numérotés 2 et 9 triangles numérotés 3.



Pour tout entier *n* différent de 1, on désigne par *an* l’aire de la surface totale de tous les triangles numérotés de 1 à *n* après *n* étapes.

1. Calculer l’aire du triangle *ABC*.

2. a. La différence *a*2 − *a*1 représente l’aire des triangles numérotés 2. La différence  représente l’aire restante (non numérotée) à l’étape 1. Combien vaut le rapport  ?

b. La différence *a*3 − *a*2 représente l’aire des triangles numérotés 3. La différence  représente l’aire restante (non numérotée) à l’étape 2. Combien vaut le rapport  ?

3. En déduire alors que .

4. En déduire la limite vers laquelle tend l’aire numérotée lorsqu’on poursuit à l’infini le numérotage.

### Suite récurrente - 2

Soit la suite (*un*) définie par 

1. Calculer les 10 premiers termes de *un* .

2. Si *un* 0, on pose  . Calculez les 10 premiers termes de la suite *tn* .

3. Trouvez une expression de *tn* en fonction de *n*, puis de *un* en fonction de *n*.

### Suite récurrente - 3

Soit la suite  définie par *u0* et 

1. Pour quelle(s) valeur(s) de *u*0 a-t-on *un* constante ?

2. On prend *u*0= 2.

a. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

b. Soit la fonction . Tracer sa courbe représentative C ainsi que la droite D(*y=x)*. c. Représenter graphiquement la construction des premiers points de la suite *un* et conjecturer son comportement (sens de variation,majorant, minorant,limite).

### Suite récurrente – 4

On définit la suite  par son premier terme  et la relation de récurrence :



1. Montrer qu’il existe deux valeurs *a =*2 et *b = –*3 de  tels que la suite  soit constante

2. Soit  ; après avoir étudiée *f* sur , tracer sa courbe représentative ainsi que la droite *y = x* sur l’intervalle [0 ; 5] et représenter les premiers termes de  (on prendra ).

Conjecturer le comportement de *un* (sens de variation, limite).

3. Montrer que si  est différent de *a* et *b*, il en est de même de  (faire une démonstration par récurrence).

4. Calculer  en fonction de . En déduire la nature de la suite . Donner l’expression de *vn* en fonction de *n* puis celle de *un*. Calculer la limite de *un* quand *n* tend vers .

**Correction**

1.  est constante : , équation du second degré qui a les solutions *a =*2 et *b = –*3 de  tels que la suite

2. Le tracé avec le tableur. Voir <http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/divers/suite_recurrente.xls>

Comportement de *un* : pas monotone, tend vers 2.

3. Supposons donc *un* différent de 2 et −3.

On aura par exemple  ce qui est impossible. Même chose pour .

4. .

La suite  est géométrique de raison , de premier terme  (qui dépend de ) donc . Comme on a

 ;

il reste à remplacer…

On remarque que  tend vers 0 (suite géométrique de raison *q* telle que ) et donc que  tend vers .

### L’algorithme de la racine carrée

Un algorithme de calcul de  (algorithme de Héron, déjà connu des Babyloniens) consiste à utiliser la suite récurrente  de premier terme *u*0 quelconque et positif.

1. Vérifier graphiquement que *un* converge.

2. Montrer que si *u*0 est positif, *u*1 est forcément supérieur à  puis montrer que tous les *u*n sont supérieurs à .

3. Montrer que la suite *un* est décroissante ; conclure quand à la convergence de *un*.

4. Faire l’application numérique pour *a*=2.

5. On prend .

a. Montrer que pour tout *n* , .

b. Montrer par récurrence que .

c. En supposant que , au bout de combien d’itérations sera-t-on sûr que  est une valeur approchée de  à  près ?

### Récurrence sur deux termes

On considère la suite (*un*) définie par : .

1. Montrer que la suite *sn* définie par  est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire *sn* en fonction de *n*.

2. On pose  et on considère la suite *tn* définie par *tn*=*vn+*1*−* *vn*. Exprimer *tn* en fonction de *sn*.

3. Exprimer *vn* puis *un* en fonction de *n* (on pourra calculer de deux manières la somme .

4. Déterminer .

### Coccinelles

On sait tous qu’il y a des années à coccinelles et d’autres sans ! On se propose d’étudier l’évolution d’une population de coccinelles à l’aide d’un modèle utilisant la fonction numérique *f* définie par

*f*(*x*) = *kx*(1 − *x*),

*k* étant un paramètre qui dépend de l’environnement (*k* réel).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million.

L’effectif des coccinelles, exprimé en millions d’individus, est approché pour l’année *n* par un nombre réel *un*, avec *un* compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l’année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra *u*0= 0,3.

On admet que l’évolution d’une année sur l’autre obéit à la relation *un*+1 = *f*(*un*), *f* étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l’exercice est d’étudier le comportement de la suite (*un*) pour différentes valeurs de la population initiale *u*0 et du paramètre *k*.

1. Démontrer que si la suite (*un*) converge, alors sa limite *l* vérifie la relation *f*(*l*) = *l*.

2. Supposons *u*0 = 0,4 et *k* = 1.

a. Etudier le sens de variation de la suite (*un*).

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier *n*, .

c. La suite (*un*) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d. Que peut-on dire de l’évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

3. Supposons maintenant *u*0 = 0,3 et *k* = 1,8.

a. Etudier les variations de la fonction *f* sur [0 ; 1] et montrer que .

b. En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,

– montrer que, pour tout entier naturel *n*, ;

– établir que, pour tout entier naturel *n*, *un*+1 > *un*.

c. La suite (*un*) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d. Que peut-on dire de l’évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

4. On a représenté sur les feuilles annexes la fonction *f* dans les deux cas étudiés ci-dessus ainsi que la droite d’équation *y* = *x*. Le troisième graphique correspond au cas où *u*0 = 0,8 et *k* = 3,2.

a. Illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en 1. et 2. en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives *u*0, *u*1, *u*2,. . .

b. En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l’évolution de la population dans le troisième cas.

1er cas : *u*0 = 0,4 et *k* = 1.

2e cas : *u*0 = 0,3 et *k* = 1,8.

3e cas : *u*0 = 0,8 et *k* = 3,2.

### Les lettres de Gaston (c)

On définit la suite  par .

1. Dans un repère de votre choix, représenter les droites d’équation respectives  et , puis les premiers termes de la suite .

2. On pose pour tout *n* . Montrer que la suite  est géométrique. En déduire l’expression de  en fonction de *n* et la limite de . Au bout de combien de temps a-t-on  ?

3. Gaston L, garçon de bureau aux éditions Dupuis, se plaint à sa dulcinée : « Voyez-vous, m’oiselle Jeanne, tous les jours je sais traiter le quart de mon courrier en retard, mais il m’arrive 200 lettres de plus chaque matin .» « Monsieur Gaston, vous arriverez bien à trouver une solution, vous êtes si intelligent… » Oui, mais quelle solution, sachant qu’hier soir il y avait 2000 lettres sur le bureau de notre héros ?

4. La question a. est indépendante de ce qui précède

a. Si est une suite croissante, on définit  par . Montrer que est croissante et que pour tout *n* on a . Que peut-on dire pour une suite décroissante (on ne justifiera pas ses affirmations).

b. On appelle  la quantité de lettres qu’il y eu en moyenne sur le bureau de Gaston pendant les *n* premiers jours (en comptant comme jour 0 le soir où il y avait 2000 lettres). Exprimer  en fonction de *n*. Quel est le sens de variation de. La suite  est-elle convergente ?

Généralisation : On considère une suite *v* donnée (???) et la suite *u* dont le terme général *un* est la moyenne arithmétique : .

A partir du calcul des premiers termes et d’une représentation graphique, on demande de conjecturer une expression de *un* en fonction de *n*, que l’on demande de démontrer.

Correction

1.

2. . .

On a donc  et  puis .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* | *un* | *n* | *un* |
| 0 | 2000 | 9 | 890,1016235 |
| 1 | 1700 | 10 | 867,5762177 |
| 2 | 1475 | 11 | 850,6821632 |
| 3 | 1306,25 | 12 | 838,0116224 |
| 4 | 1179,6875 | 13 | 828,5087168 |
| 5 | 1084,765625 | 14 | 821,3815376 |
| 6 | 1013,574219 | 15 | 816,0361532 |
| 7 | 960,1806641 | 16 | 812,0271149 |
| 8 | 920,135498 | 17 | 809,0203362 |

A *n* = 17 on a .

3. Le pauvre Gaston L. n’arrivera jamais à éliminer son courrier en retard… : il en restera toujours au moins 800. Et m’oiselle Jeanne sera bien déçue…

4. a. Remarquons que :  ; cherchons  :

.

Si  est croissante on a  d’où .

Comme  est croissante, on a  donc . CQFD.

En fait on avait .

Voici un exemple sur une suite décroissante : .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *n* | *xn* |  |  |
| 0 | 10 | 10 | 10 |
| 1 | 9 | 19 | 9,5 |
| 2 | 8,1 | 27,1 | 9,03333333 |
| 3 | 7,29 | 34,39 | 8,5975 |
| 4 | 6,561 | 40,951 | 8,1902 |
| 5 | 5,9049 | 46,8559 | 7,80931667 |
| 6 | 5,31441 | 52,17031 | 7,45290143 |
| 7 | 4,782969 | 56,953279 | 7,11915988 |
| 8 | 4,3046721 | 61,2579511 | 6,80643901 |
| 9 | 3,87420489 | 65,132156 | 6,5132156 |
| 10 | 3,4867844 | 68,6189404 | 6,23808549 |
| 11 | 3,13810596 | 71,7570464 | 5,97975386 |
| 12 | 2,82429536 | 74,5813417 | 5,73702629 |
| 13 | 2,54186583 | 77,1232075 | 5,50880054 |
| 14 | 2,28767925 | 79,4108868 | 5,29405912 |
| 15 | 2,05891132 | 81,4697981 | 5,09186238 |
| 16 | 1,85302019 | 83,3228183 | 4,90134225 |
| 17 | 1,66771817 | 84,9905365 | 4,72169647 |
| 18 | 1,50094635 | 86,4914828 | 4,55218331 |
| 19 | 1,35085172 | 87,8423345 | 4,39211673 |
| 20 | 1,21576655 | 89,0581011 | 4,24086196 |
| 21 | 1,09418989 | 90,152291 | 4,09783141 |
| 22 | 0,9847709 | 91,1370619 | 3,96248095 |

La suite  semble également décroissante.

On peut remarquer simplement que  est la moyenne des termes de .

b.  ;

or  est géométrique donc  d’où

.

Comme  est décroissante,  doit être également décroissante. La suite converge également : le terme  tend vers 1,  tend vers 0 donc  tend vers 800.

### Suite récurrente

On considère la suite  définie par  .

1. a. Calculer  et .

b. Tracer dans un repère orthonormal la courbe représentative P de la fonction *f* :  ainsi que la droite d (*y* = *x*).

c. Utiliser d et P pour construire sur l’axe des abscisses les points  d’abscisses respectives .

2. a. Montrer par récurrence que .

b. Montrer que  est croissante.

3. On considére la suite .

a. Montrer que .

b. Montrer par récurrence que . En déduire l’expression de  puis celle de .

c. Déterminer la limite de  puis celle de .

### Le nombre d’or

*Les questions* Q1, Q2, … *sont à rédiger classiquement sur une copie.*

*Les questions* T1, T2, … *sont à traiter à l’aide d’un tableur et à faire vérifier par le professeur.*

**1ère partie : définition du nombre d’or**

Le nombre d’or est le nombre irrationnel noté par la lettre grecque  (prononcer phi) et égal à .

Q1. Donner une valeur approchée à 10 – 6 près du nombre d’or .

T1. Donner une valeur approchée à 10 – 12 près du nombre d’or .

**2ème partie : construction géométrique du nombre d’or**

Construire un carré ABCD de côté 1 et marquer le milieu I de [AB].

Tracer le cercle de centre I et de rayon IC ; il coupe la demi-droite [AB) en E. Construire le rectangle AEFD.

Q2. Calculer la valeur exacte de IC puis démontrer que .

*NB :**le rectangle AEFD est appelé* ***rectangle d’or*** *car le rapport entre sa longueur et sa largeur est égal au nombre d’or.*

**3ème partie : le nombre d’or solution d’une équation**

Q3. Montrer que le nombre d’or  est solution de l’équation .

Q4. Démontrer alors que l’inverse de l’opposé de ce nombre  est aussi solution de cette équation.

**4ème partie : Fractions en cascade**

On considère la suite de fractions : 

Q5. Simplifier ces fractions et en donner une valeur approchée à 10 – 6 près.

Q6. Reprendre les calculs en remplaçant 2 par 1.

T2. Sur un tableur, saisir un nombre A positif dans la cellule A1.

Dans la cellule A2, marquer «  = 1 + 1/A1 », puis recopier vers le bas jusqu’à la ligne 30.

Observer les décimaux obtenus et comparer au nombre d’or.

*NB : On demandera l’écriture des nombres décimaux avec 12 décimales.*

T3. Recommencer en remplaçant A par un autre nombre positif.

**5èmepartie : la suite de Fibonacci**

Léonard de Pise, plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci (1175-1250), était un commerçant et un grand voyageur. Son livre *Liber abbaci,* qui est principalement consacré aux calculs commerciaux, est aussi un recueil de petits problèmes dont celui très célèbre sur l’évolution d’une population de lapins qui l’amène à introduire la suite de nombres entiers suivants :

- les deux premiers termes sont 0 et 1,

- chaque terme suivant est la somme des deux termes précédents ;

voici donc les 7 premiers termes : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

Q7. a. Continuer cette suite jusqu’au 15ème terme.

b. Calculer le quotient du 12ème terme par le 11ème, puis le quotient du 13ème terme par le 12ème, puis le quotient du 14ème par le 13ème et enfin le 15ème par le 14ème. Que constate-t-on ?

T4. a. À l’aide d’un tableur, calculer les trente premiers termes de la suite de Fibonacci.

b. Calculer la suite des quotients obtenus en divisant un terme par son précédent. Que constate-t-on ?

**6ème partie : les puissances de **

Q8. a. Vérifier que .

b. Montrer que  en partant de l’égalité  et en remplaçant  par . Montrer de la même façon que .

c. Exprimer de la même façon ,  et  en fonction de .

Q9. Montrer que  ; exprimer de même ,  et  en fonction de .

## Divers

### Polynomes de Bernoulli

1. Rappeler la démonstration de : .

2. Démontrer par récurrence que  puis que .

L’obtention de ces formules n’a rien d’évident : la première était connue d’Euclide, la deuxième d’Archimède car il s’en sert pour calculer des volumes, la troisième des Arabes, et la formule générale a été obtenue par Jakob Bernoulli vers 1720.

3. On regarde une méthode de calcul de volume utilisant la formule pour S2. Cette méthode est appelée méthode d’*exhaustion* (mise en forme un peu plus moderne…).

On veut calculer le volume d’un cône ; pour cela on le découpe en *n* tranches de hauteur  où *h* est la hauteur *SO*. Soit *R* le rayon du cercle de base (*Oa*0), le volume du cône sera compris entre une série de tranches plus larges que lui et une série de tranches moins larges que lui. On note *mk* et *pk* les extrémités de la base de la tranche n° *k*.

a. Calculer le volume de la tranche extérieure numéro *k* et celui de la tranche intérieure en fonction de *h*, *k*, *n*, *R* et la largeur de la base .

b. Montrer que .



c. Appelons *un* la somme des tranches supérieures, *vn* celle des tranches inférieures et *V* le volume cherché :  avec  et . Montrer que

d. En déduire que .

4. Pour S3 le mathématicien arabe Al-Karagi (10ème siècle ap. J.-C.) utilise la méthode suivante.

On note  et dans un repère orthonormal  on construit les carrés  de côté .

a. Faire la figure et représenter les carrés pour *n* = 1, 2, 3 et 4.

b. Calculer l’aire du carré  puis celle du polygone .

c. Conclure.

5. Une méthode presque générale : nous allons calculer  en utilisant une méthode qui peut se réemployer, mais qui ne donne pas vraiment de formule.

a. Déterminer un polynôme *P* de degré 5 tel que .

b. En écrivant la relation  et en ajoutant toutes ces relations, montrer que  s’exprime à l’aide de *S*1, *S*2 et *S*3.

c. Donner l’expression de *S*4 en fonction de *n*.

### Série harmonique

Montrer que la suite de terme général  diverge vers .

### Une somme

Soient , *n* réels strictement positifs. Montrer que .