Première S

Exercices : Suites Numériques

1. Généralités

1-1 : Basique 1

La location d'une machine coûte 60 € la 1ère journée. La 2ème journée de location coûte 65 € et chaque journée supplémentaire 5 € de plus que la précédente.

Combien de jours pourra-t-on utiliser la machine avec un budget de 3570 € ? Vous ferez apparaître sur votre copie tous les calculs nécessaires.

1-2 : Basique 2

1. (u_n) désigne une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 4.

a. Calculer u_1, u_2, u_3.

b. Donner u_n en fonction de n et calculer u_{19}.

2. (v_n) désigne une suite géométrique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison 3.

a. Calculer v_1, v_2, v_3.

b. Donner v_n en fonction de n et calculer v_{10}.

c. Calculer la somme des 10 premiers termes de la suite (v_n).

1-3 : Basique 3

Au pays des plantes géantes, les nénuphars poussent en doublant chaque jour leur surface. Un matin un nénuphar éclôt au centre d'un étang circulaire d'un rayon de 100 m ; le nénuphar mesure alors 1 cm de rayon.

1. Exprimer la surface S_n du nénuphar après n jours en fonction de l'entier n.

2. À l'aide de la calculatrice, déterminer le jour au cours duquel le nénuphar recouvrira tout l'étang.

3. Montrer que le rayon r_n du nénuphar, après n jours, est le terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison.

4. Deux nénuphars éclosent un certain jour à une distance de 20 m l'un de l'autre. L'un mesure 1 cm de rayon, l'autre 2 cm. A l'aide d'une calculatrice, déterminer le jour au cours duquel leurs feuilles se chevaucheront.

1-4 : Basique 4

(u_n) est la suite définie sur $\mathbb{R}$ par $u_n = 2 - \frac{3}{n^2+1}$. Déterminer le sens de variation de cette suite. Préciser sa limite.

1-5 : Basique 5

(u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 8$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

1. Calculer les termes u_1, u_2, u_{20}.

2. Montrer que la somme $S = u_0 + u_1 + ... + u_{20}$ est égale à $\frac{2^{21}-1}{2^{17}}$

1-6 : Basique 6

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2.

2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? géométrique ?

3. Reprsenter graphiquement les premiers termes de u_n. Quelles conjectures émettez-vous ?

4. On admet que, pour tout n, u_n n'est pas nul. On pose $v_n = 1 + \frac{2}{u_n}$.

a. Calculer v_0, v_1, et v_2.

b. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire que (v_n) est une suite arithmétique.

c. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire u_n en fonction de n.

1-7 : Basique 7

Déterminer la monotonie des suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ définies par $u_n = 2008 + \frac{2007}{2}n^2 - \frac{1}{3}n^3$ et $v_n = \frac{n}{2^n}$ (on pourra comparer $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et 1).

1-8 : Basique 8

On considère la suite $\left(w_n\right)_{n\geq 1}$ définie par $w_n = -n + \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

1. Écrire le terme général w_n à l'aide du symbole Σ.

2. Donner une valeur approchée de w_1, w_2 et w_3 à 0,1 près. Conjecturer la monotonie de la suite (w_n).

3. Démontrer votre conjecture.

1-9 : Salaires

Un chef d'entreprise paie 60 000 F par an pour l'entretien de ses machines. Lors du renouvellement du contrat pour les dix prochaines années, une société lui propose deux formules :

Contrat A : Le contrat augmente de 5% par an.

1. Exprimer en fonction de n le montant u_n du contrat lors de la $n^{\text{ième}}$ année.
2. Calculer le montant du contrat pour la $10^{\text{ème}}$ année.
3. Au bout de combien d'années le contrat dépasserait-il le double du contrat initial ?
4. Calculer la somme payée, au total, au bout de ces 10 années.

Contrat B : Le contrat augmente de 3500 F par an.

1. Exprimer en fonction de n le montant v_n du contrat lors de la $n^{\text{ième}}$ année.
2. Calculer le montant du contrat pour la $10^{\text{ème}}$ année.
3. Calculer la somme payée, au total, au bout de ces 10 années.
4. Quel est le contrat le plus avantageux ?

1-10 : Suites arithmétiques - 1

1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique. On sait que $u_5 = 125$ et $u_{16} = 48$. Calculer la raison et le premier terme de cette suite.

2. En déduire u_n en fonction de n.

3. Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = -127$?

4. A partir de quel rang a-t-on $u_n \leq -250$?

5. Calculer la somme $S = u_{1789} + u_{1790} + \ldots + u_{2007}$.

1-11 : Suites arithmétiques - 2

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite arithmétique de raison 4 et de premier $u_1 = -5$. Calculer la somme $S = \sum_{k=1}^{25}(u_k + k)$

1-12 : Suites arithmétiques - 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{nu_n + 4}{n+1}$.

1. Calculer u_2.

2. Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = n\,u_n$ est une suite arithmétique dont on précisera le premier terme et la raison de (v_n).

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis l'expression de u_n en fonction de n.

4. En déduire que la suite (u_n) est strictement monotone et bornée.

1-13 : Suites géométriques - 1

On laisse tomber une balle d'une hauteur de 1 mètre. A chaque rebond elle rebondit des 3/4 de la hauteur d'où elle est tombée.

1. On note u_n la hauteur atteinte au $n^{\text{ième}}$ rebond. Calculer la hauteur atteinte au $2^{\text{ème}}$ rebond, au $10^{\text{ème}}$, au $1000^{\text{ème}}$.

2. A quel rebond la hauteur atteinte est elle inférieure à 10^{-12} mètre ? Quelle est alors la distance parcourue par la balle ?

1-14 : Suites géométriques - 2 (c)

En traversant une plaque de verre teintée, un rayon lumineux perd 23% de son intensité lumineuse.

1. Soit I_0 l'intensité d'un rayon lumineux à son entrée dans la plaque de verre et I_1 son intensité à la sortie. Exprimer I_1 en fonction de I_0.

2. On superpose n plaques de verre identiques ; on note I_n l'intensité du rayon à la sortie de la n-ième plaque.

a. Exprimer I_n en fonction de I_{n-1}.

b. Quelle est la nature de la suite I_n ? Déterminer l'expression de I_n en fonction de n et de I_0.

c. Quel est le sens de variation de I_n ?

3. Quelle est l'intensité initiale d'un rayon dont l'intensité après avoir traversé 4 plaques est égale à 15 ?

4. Calculer le nombre minimum de plaques qu'un rayon doit avoir traversé pour que son intensité sortante soit inférieure ou égale au quart de son intensité entrante ?

Correction

1. La perte de 23 % correspond à $I_1 = I_0 - \frac{23}{100} I_0 = 0,77 I_0$.

2. a. A chaque passage l'intensité est multipliée par 0,77 : $I_n = 0,77 I_{n-1}$.

b. I_n est une suite géométrique de raison 0,77. On a $I_n = I_0 q^n = I_0 \left(0,77^n\right)$.

c. Comme $I_n = 0,77 I_{n-1} < I_{n-1}$, I_n est décroissante.

3. On cherche I_0 sachant que $I_4 = 15$: $I_4 = 15 = I_0 \left(0,77\right)^4 \Rightarrow I_0 = \frac{15}{0,77^4} \approx 42,67$.

4. On cherche n pour que $I_n \le \frac{1}{4} I_0 \Leftrightarrow I_0 0,77^n \le 0,25 I_0 \Leftrightarrow 0,77^n \le 0,25$. A la machine on a les résultats suivants :

n	I_n	n	I_n
0	1	9	0,09515169
1	0,77	10	0,0732668
2	0,5929	11	0,05641544
3	0,456533	12	0,04343989
4	0,35153041	13	0,03344871
5	0,27067842	14	0,02575551
6	0,20842238	15	0,01983174
7	0,16048523	16	0,01527044
8	0,12357363	17	0,01175824

Pour n=6 on est en dessous de 1/4.

1-15 : Suites géométriques - 3

On place un capital C de 10 000 **€** à 6% par an en capitalisant les intérêts.

1. De combien dispose-t-on au bout d'un an ? de 2 ans ? de n ans ?

2. Au bout de combien d'années le capital initial sera-t-il doublé ?

3. On place C à t% par an. Sachant qu'au bout de 10 ans ce capital est doublé quel est le taux annuel des intérêts ?

4. On rajoute C tous les ans, toujours à 6% par an. De combien disposera-t'on au bout de 10 ans ?

2. Convergence

2-16 : Limites – 1

Déterminer la limite des suites définies par leur terme général

$a_n = 2^n + 2^{n+2} - 2^{n+3}$ $\qquad b_n = \sin\left(\sqrt{n}\right) - n^3$ $\qquad c_n = 3^n - 7^n$.

2-17 : Limite d'une somme

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+\sqrt{k}} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n-1}} + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

1. Montrer que, pour tout entier $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$, on a $\dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{n+\sqrt{k}} \leq \dfrac{1}{n+1}$.

2. En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}} \leq u_n \leq \dfrac{n}{n+1}$.

3. Montrer que la suite $\left(u_n\right)$ est convergente et préciser sa limite.

2-18 : Limite d'une suite - QCM

Dire si les propriétés sont vraies, fausses ou si l'on ne peut rien dire (on justifiera ses dires).

1. Une suite (u_n) vérifie pour tout $n > 100$ l'inégalité $\left|u_n - 1\right| \leq \dfrac{n}{n^2+1}$.

a. (u_n) est bornée. $\qquad$ b. (u_n) tend vers 1 $\qquad$ c. (u_n) est croissante

2. Une suite (v_n) qui vérifie pour tout n $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ est strictement décroissante.

3. La suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{1+(-1)^n \sin n}{n+1}$ vérifie $\left|w_n\right| \leq \dfrac{2}{n+1}$. Elle est :

a. décroissante, $\qquad$ b. bornée, $\qquad$ c. convergente.

4. Toute suite convergente est bornée.

5. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$.

2-19 : Limite d'une suite - 1

1. Soit une suite de terme général u_n. Que signifie : la suite (u_n) a pour limite $+\infty$?

2. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+2}{n}$ pour n ≥1.

a. Montrez qu'à partir d'un certain rang n_0, à déterminer, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]10\,;\, +\infty[$.

b. Soit A un réel aussi grand que l'on veut (on peut supposer $A \geq 10$) ; montrez qu'à partir d'un certain rang n_0, à déterminer en fonction de A, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]A\,;\, +\infty[$.

c. En déduire à l'aide du 1. la limite de la suite (u_n).

d. Donnez une méthode pratique permettant d'obtenir cette limite sans avoir recours à la définition.

2-20 : Limite d'une suite - 2

Cet exercice se présente comme un questionnaire à choix multiples (QCM). Les quatre questions sont indépendantes.

Pour chaque question il y a deux conclusions correctes. Le candidat doit cocher au plus deux cases (celles qu'il juge correctes). Aucune justification n'est demandée.

On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) qui vérifient la propriété suivante :

« Pour tout entier naturel n strictement positif : $u_n \leq v_n \leq w_n$ ».

1. Si la suite (v_n) tend vers $-\infty$, alors : $\qquad$ □ La suite (w_n) tend vers $-\infty$

□ la suite (u_n) est majorée

□ la suite (u_n) tend vers $-\infty$

□ la suite (w_n) n'a pas de limite.

2. Si $u_n > 1$, $w_n = 2u_n$ et $\lim(u_n) = l$, alors :

□ $\lim (v_n) = l$

□ La suite (w_n) tend vers $+\infty$

□ $\lim (w_n - u_n) = l$

□ On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

3. Si $\lim (u_n) = -2$ et $\lim (w_n) = 2$, alors :

□ La suite (v_n) est majorée

□ $\lim (v_n) = 0$

□ la suite (v_n) n'a pas de limite

□ On ne sait pas dire si la suite (v_n) a une limite ou non.

4. Si $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n^2}$ et $w_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2}$ alors :

□ $\lim (w_n) = 0$

□ $\lim (v_n) = 2$

□ $\lim (u_n) = 2$

□ la suite (v_n) n'a pas de limite.

3. *Récurrence*

3-21 : Raisonnement par récurrence (c)

1. On note $1\times2\times3\times.......\times n = n!$ (et on lit « factorielle » n).

Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $n! \geq 2^{n-1}$.

2. Démontrez que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n}-2^n$ est un multiple de 7.

Correction

1. Pour $n=1$ la propriété est $1! \geq 2^{1-1} \Leftrightarrow 1 \geq 1$ ce qui est vrai.

Supposons que $n! \geq 2^{n-1}$; alors il faut montrer que $(n+1)! \geq 2^{n+1-1} \Leftrightarrow n!(n+1) \geq 2^n$. Or par hypothèse $n! \geq 2^{n-1}$ donc en multipliant par $n+1$ qui est supérieur à 2, on a $n!(n+1) \geq 2^{n-1}(n+1) \geq 2^{n-1}\times 2 = 2^n$.

2. Vérifions pour quelques valeurs que cela marche :

n	$3^{2n}-2^n$	$\dfrac{3^{2n}-2^n}{7}$
0	0	0
1	7	1
2	77	11
3	721	103
4	6545	935
5	59017	8431
6	531377	75911
7	4782841	683263
8	43046465	6149495
9	387419977	55345711
10	3486783377	498111911

On suppose donc que $3^{2n}-2^n$ est un multiple de 7, soit $3^{2n}-2^n = 7k$ où k est un entier.

Montrons maintenant que $3^{2(n+1)}-2^{n+1} = 7k'$: cela donne $3^{2n}\times 3^2 - 2^n\times 2 = 7k' \Leftrightarrow 3^{2n}\times 9 - 2^n \times 2 = 7k'$; or $3^{2n}-2^n = 7k \Leftrightarrow 3^{2n} = 2^n + 7k$ d'où en remplaçant :

$$3^{2n}\times 9 - 2^n\times 2 = 7k' \Leftrightarrow \left(2^n+7k\right)\times 9 - 2^n \times 2 = 7k' \Leftrightarrow 2^n\left(9-2\right) + 9\times 7k = 7k' \Leftrightarrow 2^n\times 7 + 9\times 7k = 7k'.$$

On a donc $k'=2^n+9\times k$ qui est bien un entier.

3-22 : Un exemple « amusant »

Soit $k\in]0\,;1[$. Montrer que $p_n=(1+k)(1+k^2)...(1+k^{2^n})$ converge et trouver sa limite.

3-23 : Une inégalité importante (c)

1. Montrer que pour tout réel x positif ou nul et pour tout entier n positif ou nul, on a $(1+x)^n\geq 1+nx$.

2. Soit la suite $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$. Calculer les valeurs de u_n pour $n=1, 2, 3, 10, 100$ .Que remarquez vous ?

3. En utilisant le 1., montrer que pour tout $n>0$, on a $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\geq 2$. En déduire le sens de variation de u_n et que $u_n\leq\dfrac{1}{2^{n-1}}$

4. Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

<u>Correction</u>

1. Par récurrence : pour n = 0, $(1+x)^0\geq 1+0x\Leftrightarrow 1\geq 1$; ok.

On suppose que $(1+x)^n\geq 1+nx$ et on multiplie tout par $1+x$:

$$(1+x)^{n+1}\geq(1+x)(1+nx)=1+x+nx+nx^2=1+(n+1)x+nx^2\geq 1+(n+1)x.$$

C'est ok !

2. $u_n=\dfrac{n!}{n^n}$.

n	$n!$	n^n	u_n
1	1	1	1
2	2	4	0,5
3	6	27	0,22222222
4	24	256	0,09375
5	120	3125	0,0384
6	720	46656	0,0154321
7	5040	823543	0,0061199
8	40320	16777216	0,00240326
9	362880	387420489	0,00093666
10	3628800	1E+10	0,00036288
100	9,333E+157	1E+200	9,3326E-43

La suite semble décroître et tendre vers 0.

3. $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=\dfrac{n!}{n^n}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{n!}{(n+1)\times n!}\dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n}=\dfrac{(n+1)^n}{n^n}=\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

On applique l'inégalité du 1. avec $x=\dfrac{1}{n}$: $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\geq 1+n\dfrac{1}{n}=2$. CQFD.

Tous les termes de la suite sont positifs évidemment donc $\dfrac{u_n}{u_{n+1}}\geq 2\Leftrightarrow\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\leq\dfrac{1}{2}<1$, la suite est bien décroissante.

Par récurrence on a $u_1 = 1 \le \frac{1}{2^{1-1}} = \frac{1}{1} = 1$; puis $u_n \le \frac{1}{2^{n-1}}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow u_{n+1} \le \frac{1}{2}u_n \le \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$. Ok !

4. Comme $\frac{1}{2^n}$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et que u $u_n \ge 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3-24 : Récurrence et conjecture

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$ pour tout entier naturel n.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).

2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > n^2$.

b. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3. Conjecturer une expression de u_n en fonction de n, puis démontrer la propriété ainsi conjecturée.

4. Exemples variés

4-25 : Une suite

u_n est la suite définie par $u_n = \frac{2^n}{n}$. Déterminer le sens de variation de u_n.

4-26 : Une autre suite

Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = 1 + \frac{1}{n(-2)^n}$ définie pour $n > 0$.

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. On admet les deux résultats suivants :

* pour tout n pair non nul, $(-2)^n \ge 1$,
* pour tout n impair, $(-2)^n \le -1$.

a. Montrer que pour tout $n > 0$, on a : $-1 \le \frac{1}{(-2)^n} \le 1$.

b. En déduire que pour tout $n > 0$, on a l'encadrement $1 - \frac{1}{n} \le u_n \le 1 + \frac{1}{n}$.

c. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

4-27 : Encore une suite

On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n - 1 \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3. La suite (u_n) est-elle croissante ou décroissante ?

2. On pose $v_n = u_n - 4n + 10$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.

3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique, en préciser la raison.

4. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

5. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

6. Quelle est la limite de (u_n) ?

7. On pose $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Donner l'expression de S_n en fonction de n.

4-28 : Encore une suite - 2

On définit une suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$

1. Montrer que $u_1 = -\frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{4}, u_3 = \frac{7}{8}$. La suite (u_n) est-elle géométrique, arithmétique ?

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 2n + 6$. Calculer v_0, v_1, v_2, v_3.

3. Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

4. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.

5. Quelle est la limite de (v_n) ? Celle de (u_n) ?

6. Calculer $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$.

7. Calculer $S_n' = u_0 + u_1 + ... + u_n$.

4-29 : Y fait chô

On admet que si on mélange un litre d'eau à la température T et un litre d'eau à la température T', on obtient deux litres d'eau à la température $\frac{T+T'}{2}$.

On dispose d'un litre d'eau à la température T_0 = 80 °C ; on lui ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient deux litres à la température T_1.

On prélève alors un litre sur les deux obtenus, auquel on ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient deux litres d'eau à la température T_2.

On répète le processus : on prélève un litre sur les deux obtenus, auquel on ajoute un litre d'eau à la température 20 °C ; on obtient deux litres à la température T_3.

1. On fabrique ainsi une suite (T_n) telle que T_{n+1} est la température du mélange d'un litre d'eau à la température T_n et d'un litre d'eau à la température 20°C.

a. Calculer T_1, T_2 et T_3.

b. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n.

2. Soit la suite (u_n) telle que pour tout n, $u_n = T_n - 20$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer u_n en fonction de l'entier n.

c. En déduire que pour tout n, $T_n = 20 + \frac{60}{2^n}$.

d. À l'aide d'une calculatrice, déterminer le premier rang n à partir duquel $T_n \leq 21$.

5. Suites adjacentes

5-30 : Barycentre (c)

Soit a_n et b_n les suites définies pour tout n entier naturel par :

$$\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 3 \\ a_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) \end{cases}$$

1. Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = a_n + b_n$. Montrer que u_n est constante et calculer u_n.

2. Soit (v_n) la suite de terme général $v_n = a_n - b_n$. Montrer que v_n est une suite géométrique. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. Exprimer a_n et b_n en fonction de u_n et v_n puis en fonction de n. Calculer $\lim_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim_{n\to+\infty} b_n$.

Correction

1. $u_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) + \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) = \frac{1}{5}(5a_n + 5b_n) = a_n + b_n = u_n$.

u_n est constante et vaut $u_0 = a_0 + b_0 = 5$.

2. $v_{n+1} = a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{5}(3a_n + 2b_n) - \frac{1}{5}(2a_n + 3b_n) = \frac{1}{5}(a_n - b_n) = \frac{1}{5}v_n$.

v_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $v_0 = a_0 - b_0 = -1$. On a donc $v_n = v_0 q^n = \frac{-1}{5^n}$.

3. On a $\begin{cases} u_n = a_n + b_n \\ v_n = a_n - b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n + v_n = 2a_n \\ u_n - v_n = 2b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ b_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{2}\left(5 - \dfrac{1}{5^n}\right) \\ b_n = \dfrac{1}{2}\left(5 + \dfrac{1}{5^n}\right) \end{cases}$.

Comme $\frac{1}{5^n}$ tend vers 0 à l'infini, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{5}{2}$.

On vérifie avec le tableur par exemple :

n	a_n	b_n	n	a_n	b_n
0	2	3	7	2,4999936	2,5000064
1	2,4	2,6	8	2,49999872	2,50000128
2	2,48	2,52	9	2,49999974	2,50000026
3	2,496	2,504	10	2,49999995	2,50000005
4	2,4992	2,5008	11	2,49999999	2,50000001
5	2,49984	2,50016	12	2,5	2,5
6	2,499968	2,500032	13	2,5	2,5

5-31 : Aire

Première partie

On considère la courbe (C) de la fonction inverse : $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$ pour $1 \le x \le 2$. On voudrait trouver une valeur approchée de l'aire comprise entre (C), l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. On découpe l'intervalle [1 ; 2] en n intervalles de même amplitude.

1. Donner les valeurs x_0, x_1, …, x_n des bornes des intervalles.

2. Déterminer les images de ces valeurs par f.

3. En considérant les aires des n rectangles dont l'un des sommets est sur la courbe (C), déduire, en fonction de n, un encadrement de l'aire cherchée.

Deuxième partie

On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}=\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{n+i}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, et la suite (v_n) définie par : $v_n = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{1}{2n-1}=\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{1}{n+i}$, pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

1. Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2, v_3, v_4 et en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

2. Représenter les points correspondants sur une droite.

3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

4. Calculer $v_n - u_n$ et démontrer que $\lim_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

5. Quelle conjecture peut-on faire pour les suites (u_n) et (v_n) ?

6. En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de u_{50} et v_{50} puis de u_{150} et v_{150}.

5-32 : Approximation décimale

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_n = 1-10^{-n}$ et $v_n = 1+10^{-n}$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Donner les valeurs de u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3, u_4, v_4.

2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

3. Quelle est leur limite ?

4. Que peut-on dire du nombre dont l'écriture décimale est 0,9999… ?

5. On connaît le développement décimal périodique d'un nombre. Donner une méthode permettant de retrouver la fraction dont ce nombre est issu.

5-33 : zeta(2)

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{p^2}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}$ et la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par $v_n = u_n + \frac{1}{n}$.

1. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. Soit l leur limite. Donner un entier n_0 pour lequel l'encadrement de l par u_{n_0} et v_{n_0} est un encadrement d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-3}.

3. En utilisant une calculatrice, donner une valeur approchée de u_{n_0} et v_{n_0}.

Est-il possible que l soit égal à $\frac{\pi^2}{6}$?

6. Suites récurrentes

6-34 : Suite linéaire - 1

On considère la suite u_n définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 5 \end{cases}$.

1. Calculer les 6 premiers termes de cette suite ; que pouvez vous conjecturer sur son comportement (sens de variation, limite) ?

2. On pose $v_n = u_n - 3$; montrer que v_n est une suite géométrique, donner l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n. Prouver les résultats obtenus de manière divinatoire au a.

3. On considère $s_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ et $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$. Donner les expressions de s_n et S_n en fonction de n ; déterminer leurs limites quand n tend vers l'infini.

6-35 : Suite linéaire - 2

1. Quel est le taux d'intérêt mensuel t que l'on doit utiliser pour obtenir un taux d'intérêt annuel T ?

2. On emprunte une somme S à un taux d'intérêt annuel T sur n années. Déterminer le montant du remboursement mensuel R (traite).

3. Vous empruntez 10 000 **€** à 5 % l'an sur 12 ans. Déterminez la traite que vous devrez payer mensuellement. Quel est le montant total des intérêts payés à la banque ?

6-36 : Suite linéaire - 3

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $u_1=\dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+\dfrac{1}{5}$.

1. Montrer que la suite (v_n) de terme général $v_n=u_n-\dfrac{2}{5}$ est une suite géométrique.

2. En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n. Calculer alors la valeur exacte de u_4.

3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et calculer sa limite.

4. Déterminer le plus petit entier naturel p à partir duquel $u_n \leq 0,401$

5. Exprimer la somme $S_n=u_1+u_2+...+u_n$ en fonction de n.

6. Déterminer la limite de la suite (S_n). Est-elle convergente ?

6-37 : Suite linéaire et aires de triangles

Soit la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1=\dfrac{25}{8}$ et par la relation $u_{n+1}=\dfrac{3}{4}u_n+\dfrac{25}{8}$.

<u>Partie I</u>

1. Calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n).

2. En utilisant une représentation graphique adaptée émettre quelques conjectures sur le comportement de (u_n) : sens de variation, limite.

3. Soit la suite (v_n) définie par $v_n=u_n-\dfrac{25}{2}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b. Déterminer le terme général v_n en fonction de n.

c. En déduire le terme général u_n en fonction de n.

4. Etudier la limite de la suite (u_n).

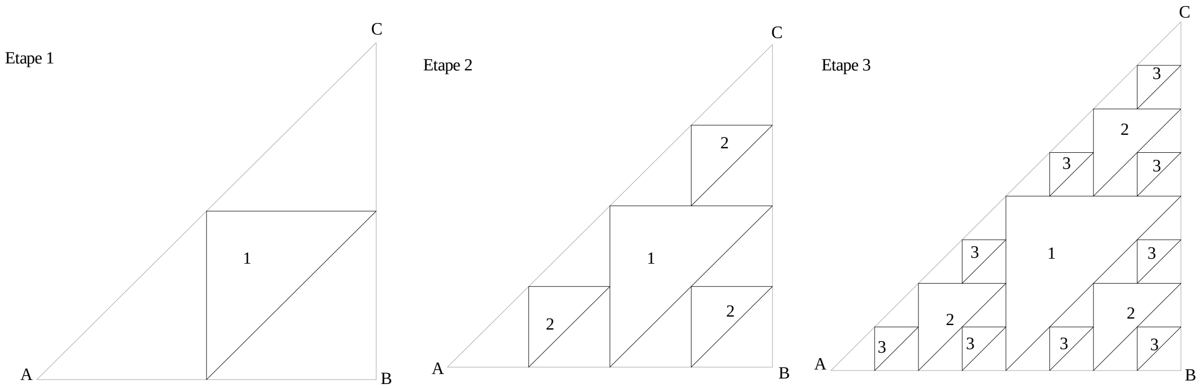
<u>Partie II</u>

On considère un triangle ABC isocèle rectangle tel que $BA = BC = 5$.

On divise ce triangle en 4 triangles isocèles rectangles obtenus en joignant les milieux des côtés et on numérote 1 le triangle central (Etape 1).

Chacun des 3 triangles non numérotés est alors divisé en 4 triangles isocèles rectangles obtenus comme précédemment et on numérote 2 le triangle central comme précédemment. Il y a donc 3 triangles numérotés 2 (Etape 2).

Après trois étapes, on obtient la figure ci-dessous contenant 1 triangle numéroté 1, 3 triangles numérotés 2 et 9 triangles numérotés 3.



Pour tout entier n différent de 1, on désigne par a_n l'aire de la surface totale de tous les triangles numérotés de 1 à n après n étapes.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.

2. a. La différence $a_2 - a_1$ représente l'aire des triangles numérotés 2. La différence $\frac{25}{2}-a_1$ représente l'aire restante (non numérotée) à l'étape 1. Combien vaut le rapport $\frac{a_2-a_1}{\frac{25}{2}-a_1}$?

b. La différence $a_3 - a_2$ représente l'aire des triangles numérotés 3. La différence $\frac{25}{2}-a_2$ représente l'aire restante (non numérotée) à l'étape 2. Combien vaut le rapport $\frac{a_3-a_2}{\frac{25}{2}-a_2}$?

3. En déduire alors que $a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n+\frac{25}{8}$.

4. En déduire la limite vers laquelle tend l'aire numérotée lorsqu'on poursuit à l'infini le numérotage.

6-38 : Suite récurrente - 2

Soit la suite (u_n) définie par $u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n}$ *et* $u_0=1$

1. Calculer les 10 premiers termes de u_n.

2. Si $u_n \neq 0$, on pose $t_n=\frac{1}{u_n}$. Calculez les 10 premiers termes de la suite t_n.

3. Trouvez une expression de t_n en fonction de n, puis de u_n en fonction de n.

6-39 : Suite récurrente - 3

Soit la suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1}=\frac{2u_n+1}{u_n-1}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de u_0 a-t-on u_n constante ?

2. On prend $u_0 = 2$.

a. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

b. Soit la fonction $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$. Tracer sa courbe représentative C ainsi que la droite D($y=x$).

c. Représenter graphiquement la construction des premiers points de la suite u_n et conjecturer son comportement (sens de variation,majorant, minorant,limite).

6-40 : Suite récurrente – 4

On définit la suite u_n par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1}=\frac{u_n+6}{u_n+2}$$

1. Montrer qu'il existe deux valeurs a = 2 et b = –3 de u_0 tels que la suite u_n soit constante

2. Soit $f(x)=\frac{x+6}{x+2}$; après avoir étudiée f sur $\mathbb{R}$, tracer sa courbe représentative ainsi que la droite y = x sur l'intervalle [0 ; 5] et représenter les premiers termes de u_n (on prendra $u_0=0$).

Conjecturer le comportement de u_n (sens de variation, limite).

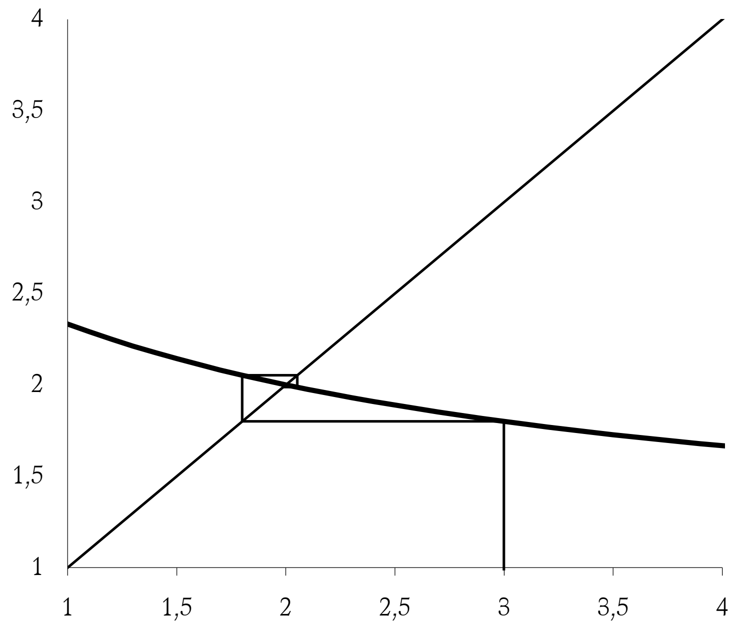
3. Montrer que si u_0 est différent de a et b, il en est de même de u_n (faire une démonstration par récurrence).

4. Calculer $\frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}$ en fonction de $\frac{u_n-a}{u_n-b}$. En déduire la nature de la suite $v_n=\frac{u_n-a}{u_n-b}$. Donner l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n. Calculer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Correction

1. u_n est constante : $u_{n+1}=u_n \Leftrightarrow u_n=\frac{u_n+6}{u_n+2} \Leftrightarrow u_n\left(u_n+2\right)=u_n+6 \Leftrightarrow u_n^2+u_n-6=0$, équation du second degré qui a les solutions a = 2 et b = –3 de u_0 tels que la suite

2. Le tracé avec le tableur. Voir http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/divers/suite_recurrente.xls



Comportement de u_n : pas monotone, tend vers 2.

3. Supposons donc u_n différent de 2 et −3.

On aura par exemple $u_{n+1}=2 \Leftrightarrow \frac{u_n+6}{u_n+2}=2 \Leftrightarrow u_n+6=2u_n+4 \Leftrightarrow 2=u_n$ ce qui est impossible. Même chose pour $u_n=-3$.

4. $$\frac{u_{n+1}-a}{u_{n+1}-b}=\frac{\frac{u_n+6}{u_n+2}-2}{\frac{u_n+6}{u_n+2}+3}=\frac{\frac{u_n+6-2u_n-4}{u_n+2}}{\frac{u_n+6+3u_n+6}{u_n+2}}=\frac{-u_n+2}{4u_n+12}=\frac{-1}{4}\frac{u_n-2}{u_n+3}=-\frac{1}{4}\frac{u_n-a}{u_n-b} \Rightarrow v_{n+1}=\left(-\frac{1}{4}\right)v_n.$$

La suite v_n est géométrique de raison $-\frac{1}{4}$, de premier terme v_0 (qui dépend de u_0) donc $v_n = v_0\left(-\frac{1}{4}\right)^n$.

Comme on a

$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 3} \Leftrightarrow v_n\left(u_n + 3\right) = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n u_n + 3v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n\left(v_n - 1\right) = -3v_n - 2 \Leftrightarrow u_n = \frac{-3v_n - 2}{v_n - 1} = \frac{3v_n + 2}{1 - v_n}$;

il reste à remplacer…

On remarque que v_n tend vers 0 (suite géométrique de raison q telle que $|q| = \frac{1}{4} < 1$) et donc que u_n tend vers $\frac{0+2}{1-0} = 2$.

6-41 : L'algorithme de la racine carrée

Un algorithme de calcul de $\sqrt{a}$ (algorithme de Héron, déjà connu des Babyloniens) consiste à utiliser la suite récurrente $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$ de premier terme u_0 quelconque et positif.

1. Vérifier graphiquement que u_n converge.

2. Montrer que si u_0 est positif, u_1 est forcément supérieur à $\sqrt{a}$ puis montrer que tous les u_n sont supérieurs à $\sqrt{a}$.

3. Montrer que la suite u_n est décroissante ; conclure quand à la convergence de u_n.

4. Faire l'application numérique pour $a=2$.

5. On prend $a > 1$.

a. Montrer que pour tout n, $u_{n+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n - \sqrt{a})^2 \leq \frac{1}{2}(u_n - \sqrt{a})^2$.

b. Montrer par récurrence que $u_n - \sqrt{a} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\left(u_0 - \sqrt{a}\right)$.

c. En supposant que $\left|u_0 - \sqrt{a}\right| \leq 2$, au bout de combien d'itérations sera-t-on sûr que u_n est une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à 10^{-9} près ?

6-42 : Récurrence sur deux termes

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite s_n définie par $s_n = u_{n+1} + u_n$ est une suite géométrique dont on précisera la raison. En déduire s_n en fonction de n.

2. On pose $v_n = (-1)^n u_n$ et on considère la suite t_n définie par $t_n = v_{n+1} - v_n$. Exprimer t_n en fonction de s_n.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n (on pourra calculer de deux manières la somme $t_0 + t_1 + \ldots + t_n$.

4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{8^n}$.

6-43 : Coccinelles

On sait tous qu'il y a des années à coccinelles et d'autres sans ! On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction numérique f définie par

$$f(x) = kx(1 - x),$$

k étant un paramètre qui dépend de l'environnement (k réel).

Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million.

L'effectif des coccinelles, exprimé en millions d'individus, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n, avec u_n compris entre 0 et 1. Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0 = 0,3$.

On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_n+1 = f(u_n)$, f étant la fonction définie ci-dessus.

Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1. Démontrer que si la suite (u_n) converge, alors sa limite l vérifie la relation $f(l) = l$.

2. Supposons $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.

a. Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 \le u_n \le 1$.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

3. Supposons maintenant $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.

a. Etudier les variations de la fonction f sur [0 ; 1] et montrer que $f\left(\frac{1}{2}\right) \in \left[0\,;\frac{1}{2}\right]$.

b. En utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence,

– montrer que, pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le \frac{1}{2}$;

– établir que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} > u_n$.

c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

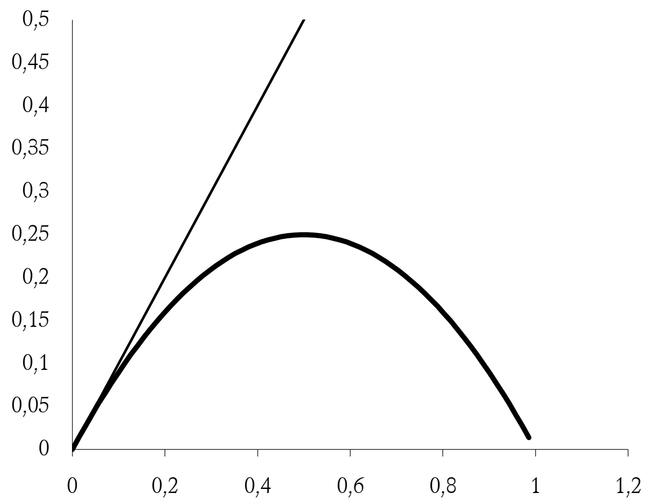
d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

4. On a représenté sur les feuilles annexes la fonction f dans les deux cas étudiés ci-dessus ainsi que la droite d'équation $y = x$. Le troisième graphique correspond au cas où $u_0 = 0,8$ et $k = 3,2$.

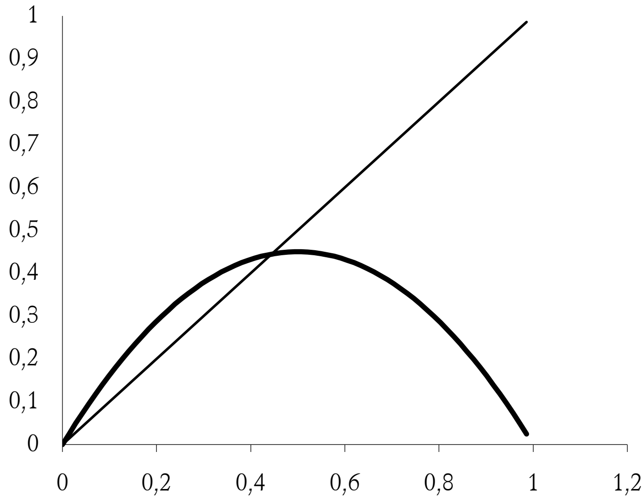
a. Illustrer sur les deux premiers graphiques les résultats trouvés en 1. et 2. en laissant les traits de construction et en faisant apparaître en abscisse les valeurs successives u_0, u_1, u_2,. . .

b. En utilisant la même méthode, formuler une conjecture sur l'évolution de la population dans le troisième cas.

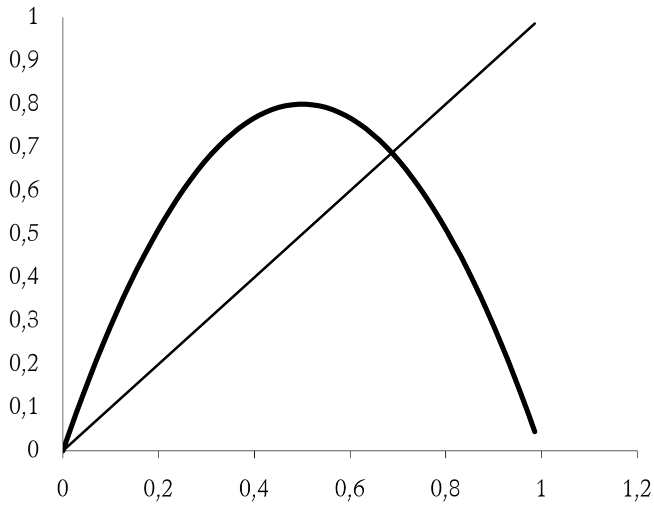
1er cas : $u_0 = 0,4$ et $k = 1$.



2e cas : $u_0 = 0,3$ et $k = 1,8$.



3e cas : $u_0 = 0{,}8$ et $k = 3{,}2$.



6-44 : Les lettres de Gaston (c)

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 2000, u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 200$.

1. Dans un repère de votre choix, représenter les droites d'équation respectives $y = x$ et $y = \frac{3}{4}x + 200$, puis les premiers termes de la suite (u_n).

2. On pose pour tout n $v_n = u_n - 800$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de u_n en fonction de n et la limite de (u_n). Au bout de combien de temps a-t-on $u_n < 810$?

3. Gaston L, garçon de bureau aux éditions Dupuis, se plaint à sa dulcinée : « Voyez-vous, m'oiselle Jeanne, tous les jours je sais traiter le quart de mon courrier en retard, mais il m'arrive 200 lettres de plus chaque matin .» « Monsieur Gaston, vous arriverez bien à trouver une solution, vous êtes si intelligent… » Oui, mais quelle solution, sachant qu'hier soir il y avait 2000 lettres sur le bureau de notre héros ?

4. La question a. est indépendante de ce qui précède

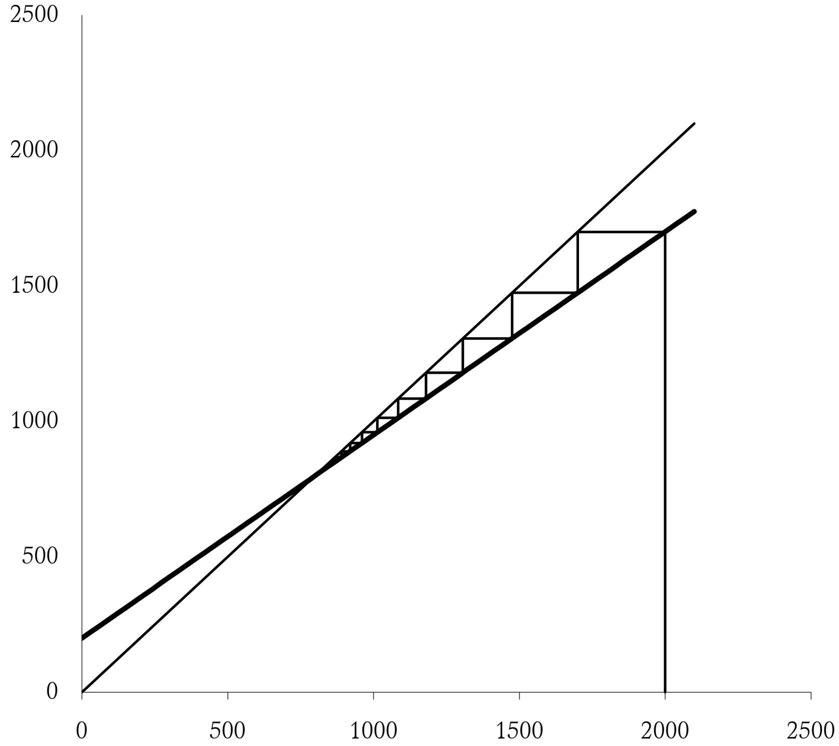
a. Si (x_n) est une suite croissante, on définit (y_n) par $y_n = \frac{x_0 + x_1 ... + x_n}{n+1}$. Montrer que (y_n) est croissante et que pour tout n on a $y_n \leq x_n$. Que peut-on dire pour une suite (x_n) décroissante (on ne justifiera pas ses affirmations).

b. On appelle M_n la quantité de lettres qu'il y eu en moyenne sur le bureau de Gaston pendant les n premiers jours (en comptant comme jour 0 le soir où il y avait 2000 lettres). Exprimer M_n en fonction de n. Quel est le sens de variation de (M_n). La suite (M_n) est-elle convergente ¿

Généralisation : On considère une suite v donnée (¿¿¿) et la suite u dont le terme général u_n est la moyenne arithmétique : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$.

A partir du calcul des premiers termes et d'une représentation graphique, on demande de conjecturer une expression de u_n en fonction de n, que l'on demande de démontrer.

Correction



1.

2. $v_n = u_n - 800$. $v_{n+1} = u_{n+1} - 800 = \frac{3}{4}u_n + 200 - 800 = \frac{3}{4}(v_n + 800) - 600 = \frac{3}{4}v_n$.

On a donc $v_0 = u_0 - 800 = 2000 - 800 = 1200$ et $v_n = 1200\left(\frac{3}{4}\right)^n$ puis $u_n = v_n + 800 = 1200\left(\frac{3}{4}\right)^n + 800$.

n	u_n	n	u_n
0	2000	9	890,1016235
1	1700	10	867,5762177
2	1475	11	850,6821632
3	1306,25	12	838,0116224
4	1179,6875	13	828,5087168
5	1084,765625	14	821,3815376
6	1013,574219	15	816,0361532
7	960,1806641	16	812,0271149

8	920,135498	17	809,0203362

A $n = 17$ on a $u_n < 810$.

3. Le pauvre Gaston L. n'arrivera jamais à éliminer son courrier en retard… : il en restera toujours au moins 800. Et m'oiselle Jeanne sera bien déçue…

4. a. Remarquons que : $y_n = \frac{x_0 + \ldots + x_n}{n+1} \Rightarrow x_0 + \ldots + x_n = (n+1)y_n$; cherchons y_{n+1} :

$$y_{n+1} = \frac{x_0 + x_1 \ldots + x_n + x_{n+1}}{n+2} = \frac{(n+1)y_n + x_{n+1}}{n+2}.$$

Si y_n est croissante on a $y_{n+1} \geq y_n$ d'où $\frac{(n+1)y_n + x_{n+1}}{n+2} \geq y_n \Leftrightarrow (n+1)y_n + x_{n+1} \geq (n+2)y_n \Leftrightarrow x_{n+1} \geq y_n$.

Comme (x_n) est croissante, on a $x_0 + x_1 \ldots + x_n \leq x_{n+1} + x_{n+1} + \ldots + x_{n+1} = (n+1)x_{n+1}$ donc $y_n = \frac{x_0 + x_1 \ldots + x_n}{n+1} \leq \frac{(n+1)x_{n+1}}{n+1} = x_{n+1}$. CQFD.

En fait on avait $x_0 + x_1 \ldots + x_n \leq x_n + x_n + \ldots + x_n = (n+1)x_n \Rightarrow y_n \leq \frac{(n+1)x_n}{n+1} = x_n$.

Voici un exemple sur une suite décroissante : $x_{n+1} = 0,9x_n$.

n	x_n	$\sum_{k=0}^{n} x_k$	$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} x_k$
0	10	10	10
1	9	19	9,5
2	8,1	27,1	9,03333333
3	7,29	34,39	8,5975
4	6,561	40,951	8,1902
5	5,9049	46,8559	7,80931667
6	5,31441	52,17031	7,45290143
7	4,782969	56,953279	7,11915988
8	4,3046721	61,2579511	6,80643901
9	3,87420489	65,132156	6,5132156
10	3,4867844	68,6189404	6,23808549
11	3,13810596	71,7570464	5,97975386
12	2,82429536	74,5813417	5,73702629
13	2,54186583	77,1232075	5,50880054
14	2,28767925	79,4108868	5,29405912
15	2,05891132	81,4697981	5,09186238
16	1,85302019	83,3228183	4,90134225
17	1,66771817	84,9905365	4,72169647
18	1,50094635	86,4914828	4,55218331
19	1,35085172	87,8423345	4,39211673
20	1,21576655	89,0581011	4,24086196
21	1,09418989	90,152291	4,09783141

22	0,9847709	91,1370619	3,96248095

La suite y_n semble également décroissante.

On peut remarquer simplement que y_n est la moyenne des termes de x_n.

b. $M_n=\frac{u_0+u_1+...+u_n}{n+1}=\frac{v_0+800+v_1+800+...+v_n+800}{n+1}=\frac{v_0+v_1+...+v_n}{n+1}+\frac{800(n+1)}{n+1}$;

or v_n est géométrique donc $v_0+v_1+...+v_n=v_0\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=1200\frac{1-(3/4)^{n+1}}{1/4}=4800\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$ d'où

$M_n=4800\frac{1-0,75^{n+1}}{n+1}+800$.

Comme u_n est décroissante, M_n doit être également décroissante. La suite converge également : le terme $1-0,75^{n+1}$ tend vers 1, $\frac{1-0,75^{n+1}}{n+1}$ tend vers 0 donc M_n tend vers 800.

6-45 : Suite récurrente

On considère la suite u_n définie par $\begin{cases} u_0=\frac{1}{8} \\ u_{n+1}=u_n(2-u_n) \end{cases}$.

1. a. Calculer u_1 et u_2.

b. Tracer dans un repère orthonormal la courbe représentative P de la fonction f : $f(x)=x(2-x)$ ainsi que la droite d ($y = x$).

c. Utiliser d et P pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives u_1, u_2, u_3.

2. a. Montrer par récurrence que $0<u_n<1$.

b. Montrer que u_n est croissante.

3. On considére la suite $v_n=1-u_n$.

a. Montrer que $v_{n+1}=v_n^2$.

b. Montrer par récurrence que $v_n={v_0}^{2^n}$. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n.

c. Déterminer la limite de v_n puis celle de u_n.

6-46 : Le nombre d'or

Les questions Q_1, Q_2, … sont à rédiger classiquement sur une copie.

Les questions T_1, T_2, … sont à traiter à l'aide d'un tableur et à faire vérifier par le professeur.

1ère partie : définition du nombre d'or

Le nombre d'or est le nombre irrationnel noté par la lettre grecque φ (prononcer phi) et égal à $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Q_1. Donner une valeur approchée à 10^{-6} près du nombre d'or φ.

T_1. Donner une valeur approchée à 10^{-12} près du nombre d'or φ.

2ème partie : construction géométrique du nombre d'or

Construire un carré ABCD de côté 1 et marquer le milieu I de [AB].

Tracer le cercle de centre I et de rayon IC ; il coupe la demi-droite [AB) en E. Construire le rectangle AEFD.

Q_2. Calculer la valeur exacte de IC puis démontrer que $AE=DF=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

NB : le rectangle AEFD est appelé ***rectangle d'or*** *car le rapport entre sa longueur et sa largeur est égal au nombre d'or.*

3ème partie : le nombre d'or solution d'une équation

Q_3. Montrer que le nombre d'or φ est solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Q_4. Démontrer alors que l'inverse de l'opposé de ce nombre φ est aussi solution de cette équation.

4ème partie : Fractions en cascade

On considère la suite de fractions : $F_1 = 2$; $F_2 = 1 + \dfrac{1}{2}$; $F_3 = 1 + \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{2}}$; $F_4 = 1 + \dfrac{1}{1 + F_3}$; ...

Q_5. Simplifier ces fractions et en donner une valeur approchée à 10^{-6} près.

Q_6. Reprendre les calculs en remplaçant 2 par 1.

T_2. Sur un tableur, saisir un nombre A positif dans la cellule A1.

Dans la cellule A2, marquer « = 1 + 1/A1 », puis recopier vers le bas jusqu'à la ligne 30.

Observer les décimaux obtenus et comparer au nombre d'or.

NB : On demandera l'écriture des nombres décimaux avec 12 décimales.

T_3. Recommencer en remplaçant A par un autre nombre positif.

5èmepartie : la suite de Fibonacci

Léonard de Pise, plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci (1175-1250), était un commerçant et un grand voyageur. Son livre *Liber abbaci,* qui est principalement consacré aux calculs commerciaux, est aussi un recueil de petits problèmes dont celui très célèbre sur l'évolution d'une population de lapins qui l'amène à introduire la suite de nombres entiers suivants :

- les deux premiers termes sont 0 et 1,
- chaque terme suivant est la somme des deux termes précédents ;

voici donc les 7 premiers termes : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, …

Q_7. a. Continuer cette suite jusqu'au 15ème terme.

b. Calculer le quotient du 12ème terme par le 11ème, puis le quotient du 13ème terme par le 12ème, puis le quotient du 14ème par le 13ème et enfin le 15ème par le 14ème. Que constate-t-on ?

T_4. a. À l'aide d'un tableur, calculer les trente premiers termes de la suite de Fibonacci.

b. Calculer la suite des quotients obtenus en divisant un terme par son précédent. Que constate-t-on ?

6ème partie : les puissances de φ

Q_8. a. Vérifier que $\varphi^2 = \varphi + 1$.

b. Montrer que $\varphi^3 = 2\varphi + 1$ en partant de l'égalité $\varphi^3 = \varphi^2 \times \varphi$ et en remplaçant φ^2 par $\varphi + 1$. Montrer de la même façon que $\varphi^4 = 3\varphi + 2$.

c. Exprimer de la même façon φ^5, φ^6 et φ^7 en fonction de φ.

Q_9. Montrer que $\dfrac{1}{\varphi} = \varphi^{-1} = \varphi - 1$; exprimer de même φ^{-2}, φ^{-3} et φ^{-4} en fonction de φ.

7. Divers

7-47 : Polynomes de Bernoulli

1. Rappeler la démonstration de : $S_1 = 1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Démontrer par récurrence que $S_2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ puis que $S_3 = 1^3 + 2^3 + ... + n^3 = S_1^2$.

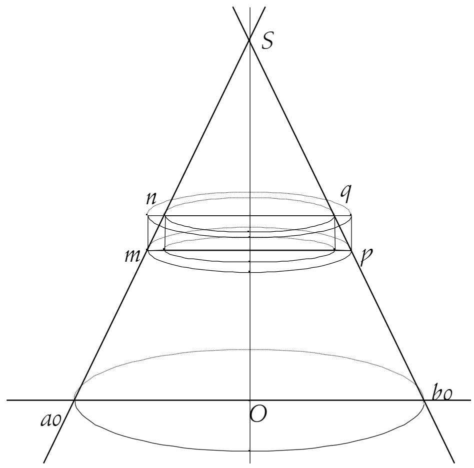
L'obtention de ces formules n'a rien d'évident : la première était connue d'Euclide, la deuxième d'Archimède car il s'en sert pour calculer des volumes, la troisième des Arabes, et la formule générale a été obtenue par Jakob Bernoulli vers 1720.

3. On regarde une méthode de calcul de volume utilisant la formule pour S_2. Cette méthode est appelée méthode d'*exhaustion* (mise en forme un peu plus moderne…).

On veut calculer le volume d'un cône ; pour cela on le découpe en n tranches de hauteur $\frac{h}{n}$ où h est la hauteur SO. Soit R le rayon du cercle de base (Oa_0), le volume du cône sera compris entre une série de tranches plus larges que lui et une série de tranches moins larges que lui. On note m_k et p_k les extrémités de la base de la tranche n° k.

a. Calculer le volume de la tranche extérieure numéro k et celui de la tranche intérieure en fonction de h, k, n, R et la largeur de la base m_kp_k.

b. Montrer que $m_kp_k = 2R\left(\frac{k}{n}-1\right)$.



c. Appelons u_n la somme des tranches supérieures, v_n celle des tranches inférieures et V le volume cherché :

$u_n \le V \le v_n$ avec $u_n = \pi\frac{h}{4n}\left(m_0p_0^{\,2}+m_1p_1^{\,2}+\ldots+m_{n-1}p_{n-1}^{\,2}\right)$ et $v_n = \pi\frac{h}{4n}\left(m_1p_1^{\,2}+m_2p_2^{\,2}+\ldots+m_np_n^{\,2}\right)$.

Montrer que $v_n = \pi R^2\frac{h}{n}\left(\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^2}-2\frac{1+2+\ldots n}{n}+n\right)=\pi R^2h\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}-\frac{n(n+1)}{n^2}+1\right)$.

d. En déduire que $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$.

4. Pour S_3 le mathématicien arabe Al-Karagi (10ème siècle ap. J.-C.) utilise la méthode suivante.

On note $a_n = 1+2+3+\ldots+n$ et dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{u},\vec{v})$ on construit les carrés $OA_nB_nC_n$ de côté a_n.

a. Faire la figure et représenter les carrés pour n = 1, 2, 3 et 4.

b. Calculer l'aire du carré $OA_nB_nC_n$ puis celle du polygone $A_{n-1}A_nB_nC_nC_{n-1}B_{n-1}$.

c. Conclure.

5. Une méthode presque générale : nous allons calculer $S_4 = 1^4+2^4+\ldots+n^4$ en utilisant une méthode qui peut se réemployer, mais qui ne donne pas vraiment de formule.

a. Déterminer un polynôme P de degré 5 tel que $P(x+1)-P(x)=x^4$.

b. En écrivant la relation $P(k+1)-P(k)=k^4$ et en ajoutant toutes ces relations, montrer que S_4 s'exprime à l'aide de S_1, S_2 et S_3.

c. Donner l'expression de S_4 en fonction de n.

7-48 : Série harmonique

Montrer que la suite de terme général $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$ diverge vers $+\infty$.

7-49 : Une somme

Soient $(a_i)_{i=1..n}$, n réels strictement positifs. Montrer que $\sum_{1}^{n} a_i . \sum_{1}^{n} \frac{1}{a_i} \geq n^2$.