Classe de 1° S

Géométrie Produit scalaire

1. Divers

1-1 : QCM 1 (c)

Une seule réponse est juste, pas de justification, les réponses fausses font perdre la moitié des points.

1. Si $\sin x = \dfrac{1}{3}$ alors

a. aucun calcul n'est possible sans connaître x. b. $\sin 2x = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}$ c. $\tan x = 1$.

d. $\cos x = \dfrac{2}{3}$. e. $\cos 2x = \dfrac{7}{9}$.

2. La longueur du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté a est :

a. $2\pi a$ b. $\dfrac{2\pi a}{3}$ c. $\dfrac{\sqrt{3}\pi a}{3}$ d $\dfrac{2\pi a}{\sqrt{3}}$ e. $\sqrt{2}\pi a$

3. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} m+1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$ où m est un réel. Déterminer m pour que les vecteurs soient colinéaires.

a. $m = 0$ b. $\begin{matrix} m_1 = 2-\sqrt{3}, \\ m_2 = 2+\sqrt{3} \end{matrix}$ c. $\begin{matrix} m_1 = -1 \\ m_2 = 3 \end{matrix}$ d. $\begin{matrix} m_1 = 1-\sqrt{3} \\ m_2 = 1+\sqrt{3} \end{matrix}$

e. Pas de valeur de m possible.

Correction

1. Si $\sin x = \frac{1}{3}$ alors (**e**) : $\cos 2x = 1-2\sin^2 x = 1-2\frac{1}{9} = \frac{7}{9}$.

2. La longueur du cercle circonscrit à un triangle équilatéral de côté a est : le rayon est la distance entre le centre de gravité et un des sommets, soit les 2/3 de la hauteur : $\frac{2}{3}a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$; le périmètre est alors $2\pi r = 2\pi a\frac{\sqrt{3}}{3}$; la seule réponse possible est (**d**) car $3 = (\sqrt{3})^2$ …

3. $\vec{u}\begin{pmatrix} m+1 \\ m \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} m \\ 2 \end{pmatrix}$ sont colinéaires si leur déterminant est nul, soit

$$\begin{vmatrix} m+1 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2m+2-m^2 = 0 \Leftrightarrow m^2-2m-2 = 0 \ ;$$

on a $\Delta = 4+8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$ d'où les deux racines $\begin{matrix} m_1 = 1-\sqrt{3} \\ m_2 = 1+\sqrt{3} \end{matrix}$. Réponse (**d**).

1-2 : QCM 2 (c)

Une seule réponse juste à chaque question. Si vous répondez bien vous gagnez 0,5 point, si vous répondez mal vous perdez 0,25 point, si vous ne répondez pas , 0 point.

question 1.

Si a = 315° alors

a	a = 5,497 rad	***b***	a = 7π/4 rad
c	a = 102,8 rad	***d***	a = 4π/7 rad

question 2.

Si la diagonale d'un carré vaut 8 alors le périmètre du carré vaut :

a	$16\sqrt{2}$	***b***	$32\sqrt{2}$
c	$8\sqrt{2}$	***d***	32

question 3.

ABC est un triangle équilatéral. O est son centre de gravité, que vaut l'angle BOC ?

a	30°	***b***	120°
c	60°	***d***	180°

question 4.

Les droites passant par (−1, 2) et de coefficient directeur $1/m$ ont pour équation :

a	$mx-y+2m+1=0$	***b***	$m(x-y)+2=m$
c	$my=x+2m$	***d***	$x-my+2m+1=0$

question 5.

Quel est le rayon d'un cercle dont un arc qui mesure 50° a pour longueur 3π cm ?

a	20 cm	***b***	2π cm
c	10,8 cm	***d***	aucune des réponses

question 6.

Un polyèdre en forme de ballon de football possède 32 faces : 20 sont des hexagones réguliers et 12 des pentagones réguliers. Combien ce solide a-t-il de sommets ?

a	72	***b***	56
c	90	***d***	60

question 7.

Un libraire achète un livre 70 €, le vend 80 €, le rachète 90 € et le revend 100 €. Quel est son bénéfice ?

a	10 €	***b***	0 €
c	20 €	***d***	100 €

question 8.

Une table à trois pieds repose sur un plan. Peut-elle être bancale ?

a	oui	***b***	non
c	ça dépend	***d***	aucune idée

correction

question 1 : Réponse **b** : si a = 315° alors $a=-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{7\pi}{4}+2k\pi$ en radians.

question 2 : Réponse **a** : si la diagonale d'un carré vaut 8 alors le côté du carré vaut $\frac{8}{\sqrt{2}}$ et le périmètre du carré vaut $4\frac{8}{\sqrt{2}}=\frac{32}{\sqrt{2}}=\frac{32\sqrt{2}}{2}=16\sqrt{2}$.

question 3 : Réponse **b** : si ABC est un triangle équilatéral, O son centre de gravité alors l'angle BOC vaut 120°.

question 4 : Réponse **d** : une droite passant par (−1, 2) et de coefficient directeur $1/m$ a pour équation

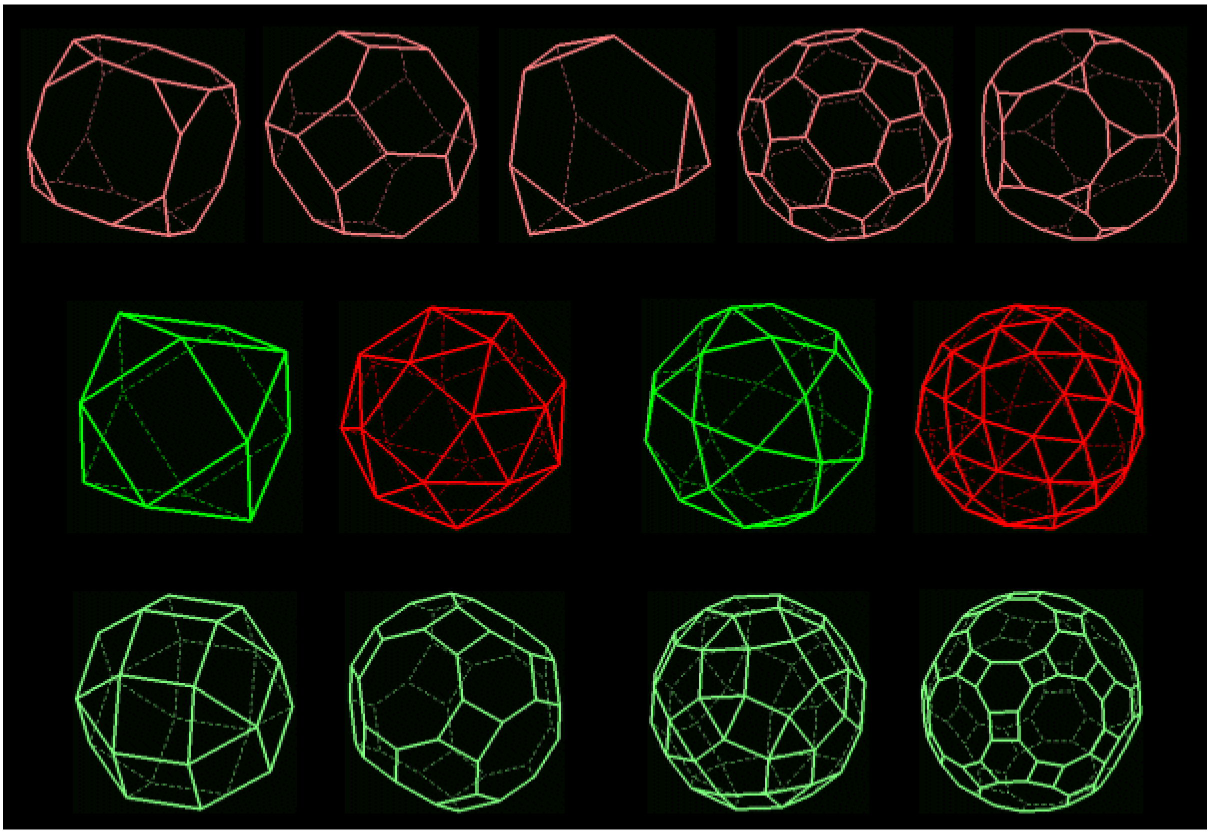
$y-2=\frac{1}{m}(x-(-1))\Leftrightarrow my-2m=x+1\Leftrightarrow my-x-2m-1=0$; il reste à changer les signes.

question 5 : Réponse **c** : on rappelle que la longueur de l'arc d'un cercle de rayon R intercepté par un angle α en radians est αR. On convertit 50° en radians : $50°=\frac{50\pi}{180}$, l'arc intercepté a pour longueur $\frac{50\pi}{180}R=3\pi\Leftrightarrow R=\frac{3\pi.180}{50\pi}=10,8$.

question 6 : Réponse **d** : chaque pentagone est séparé d'un autre pentagone par des hexagones ; il y a autant de sommets que de sommetes de pentagones, soit 5.12 = 60.

question 7 : Réponse **c** : côté dépenses il y a 70+90 = 160, côté recettes il y a 80+100 = 180 ; son gain total est 20 €…

question 8 : Réponse **b** : trois pieds sont toujours sur un plan…



2. Trigonométrie

1. Compléter le tableau suivant

Degrés	0°	30°	45°	60°	90°	180°
Radians						
Cos						
Sin						
Tan						
Cotan						

2. Compléter les égalités suivantes à l'aide de *cos x* et *sin x* (excepté pour la 1°).

$\cos^2 x + \sin^2 x =$ $\quad$ $1 + \tan^2 x =$

$\cos(\pi - x) =$ $\quad$ $\sin(\pi - x) =$ $\quad$ $\tan(\pi - x) =$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$ $\quad$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) =$

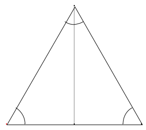
3. Placer les angles suivants sur un cercle : 45° ; 150° ; 270° ; 120° ; 210° ; 300°.

4. Donner la mesure principale des angles suivants puis placer ces angles sur le cercle trigonométrique.

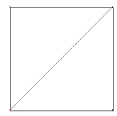
a. 5π ; 8π ; $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{9\pi}{4}$; $\frac{23\pi}{3}$; $\frac{51\pi}{6}$

b. $-\pi$; -3π ; $-\frac{3\pi}{5}$; $-\frac{8\pi}{6}$; $-\frac{35\pi}{3}$; $-\frac{291\pi}{7}$.

5. A l'aide des deux figures ci-contre retrouver les valeurs exactes de cos 30°, sin 30°, cos 60°, sin 60°, cos 45° et sin 45°.



triangle équilatéral



carré

6. Soit ABC un triangle tel que l'angle $\widehat{B}$ vaut $\frac{\pi}{4}$ et l'angle $\widehat{C}$ vaut $\frac{\pi}{3}$. H et K sont les projetés orthogonaux de A sur (BC) et de C sur (AB). De plus $BH = 6$.

a. Faire la figure. Quelle est la mesure en radians de l'angle $\widehat{A}$? En degrés ? Placer le point M d'abscisse curviligne $\widehat{A}$ sur le cercle trigonométrique.

b. Donner une valeur approchée de cos, sin et tan de $\widehat{A}$ avec le cercle (inutile d'utiliser la calculatrice…).

c. Calculez les longueurs AH, AC, BC, CK et AK.

d. Déduisez en les valeurs exactes de $\cos(\widehat{A})$, $\sin(\widehat{A})$ et $\tan(\widehat{A})$.

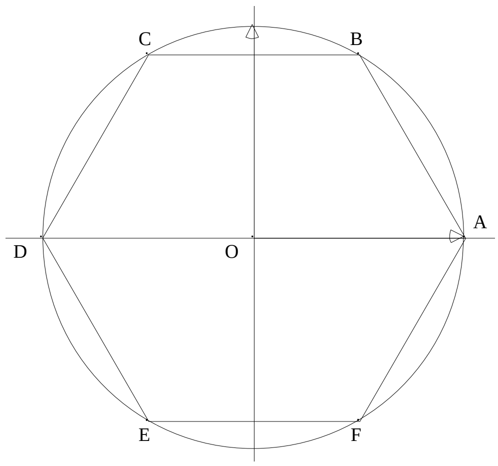
7. ABC est un triangle quelconque dont les angles sont aigus ; S est l'aire de ABC, H le projeté orthogonal de C sur $[AB]$. On pose $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

a. Montrer que $S = \frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}$; donner deux autres relations similaires exprimant S. En déduire la « *formule des sinus* » : $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}}$.

b. Application numérique : $ABCD$ est un quadrilatère tel que $\widehat{ACB} = 30°$, $\widehat{BCD} = 70°$, $\widehat{ADB} = 25°$ et $\widehat{ADC} = 60°$. La longueur CD vaut 8. Calculer les longueurs CA et CB à 10^{-3} près.

2-3 : Hexagone

On considère un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.



1. Donner deux mesures des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB})$, $(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OC})$ (vous ferez apparaître les calculs nécessaires).

2. a. Citer deux angles de vecteurs ayant pour mesure $\frac{22\pi}{3}$.

b. Citer deux angles de vecteurs ayant pour mesure $-\frac{31\pi}{3}$.

3. Placer sur le cercle trigonométrique le point G tel que $(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OG}) = -\frac{3\pi}{8}$. Donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OG})$.

4. Recopier et compléter le tableau suivant :

Point M	Angle $\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{OM}\right)$	Abscisse du point M	Ordonnée du point M
B			
C			
D			
E			
F			

5. H est le point tel que $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OF}$.

a. Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OH}$ dans le repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

b. Calculer OH et $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OH}\right)$ (coordonnées polaires de H).

2-4 : Triangle rectangle

On considère les points A, B, C, D et E tels que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=-\frac{\pi}{12}$, $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE}\right)=-\frac{2\pi}{3}$ et $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)=\frac{11\pi}{12}$.

Démontrer que le triangle ACD est rectangle en A.

2-5 : Coordonnées polaires

On considère le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1. Soit A le point de coordonnées cartésiennes (2 ; –2). Quelles sont ses coordonnées polaires ?

2. Soit B le point de coordonnées polaires $\left(2\sqrt{2}\,;\frac{5\pi}{4}\right)$. Déterminer les coordonnées cartésiennes de B.

3. Quelle est la nature du triangle AOB ? Justifier.

2-6 : pi/12

1. Développer $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2$, puis simplifier le résultat.

2. En considérant la relation liant cos $2a$ et $\cos^2 a$ et en prenant $a=\frac{\pi}{12}$, montrer que $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

2-7 : Calculs de base

Cet exercice est composée de questions simples et indépendantes visant à tester vos connaissances sur le produit scalaire.

1. Déterminer l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $x^2+y^2+x-2y=0$.

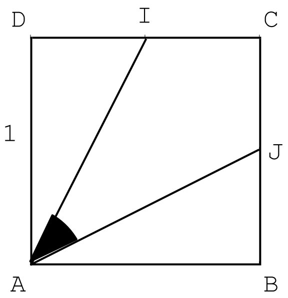
2. Déterminer une équation du cercle de centre $\Omega(2\,;-3)$ et tangent à la droite d'équation $y=x+1$.

3. Soit $[AB]$ un segment de longueur 4.

Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2+MB^2=16$.

4. $ABCD$ est un parallélogramme tels que $AB=4$, $AD=3$ et $AC=6$. Calculer $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

5. Sur la figure ci-contre,



$ABCD$ est un carré de côté 1, I et J sont les milieux respectifs de $[DC]$ et $[BC]$. On note α la mesure de l'angle $\widehat{IAJ}$.

Donner la valeur exacte de $\cos\alpha$ puis donner une valeur approchée de α à 1 degré près.

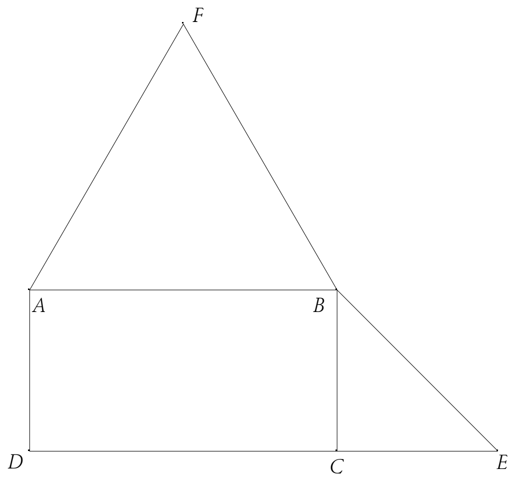
3. Dans le plan

3-8 : Basique 1

La figure ci-contre représente un rectangle $ABCD$ tel que : $AB = 5$ et $BC = 3$; un triangle ABF équilatéral et un triangle BCE rectangle et isocèle en C. Le point H est le milieu du segment $[AB]$.

Calculer les produits scalaires suivants :

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$;
2. $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BE}$;
3. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$;
4. $\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{CE}$;
5. $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BA}$;
6. $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CE}$.



3-9 : Basique 2

Sachant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\|\vec{u}\|=3$, $\|\vec{v}\|=7$ et $\vec{u}\cdot\vec{v}=13$, calculer les produits scalaires suivants :

1. $\vec{u}\cdot(\vec{u}+3\vec{v})$.
2. $(\vec{u}-2\vec{v})^2$.

3-10 : Basique 3

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Soient les points $A(1\,;\,1)$, $B(4\,;\,3)$ et $C(-1\,;\,6)$.

1. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

2. En déduire $\cos \hat{A}$, puis une valeur approchée de $\hat{A}$ en degré à 10^{-1} près.

3-11 : Basique 4

On considère un triangle ABC tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{3}$. Calculer BC.

3-12 : Basique 5

ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 7$ et $BC = 5$.

1. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

2. En déduire la valeur exacte du sinus de l'angle $\widehat{ACB}$.

3. On note I le milieu de $[AB]$. Calculer la longueur CI.

4. On note J le projeté orthogonal du sommet B sur le côté $[AC]$. Calculer la longueur BJ.

3-13 : Basique 6 (c)

Soit Γ un cercle de centre O(3, 1) et de rayon $\sqrt{5}$ et A le point de coordonnées (4, 3).

Vérifiez que A est un point du cercle et déterminer l'équation de la tangente à Γ passant par A.

Correction

L'équation de Γ est $(x-3)^2+(y-1)^2=5$.

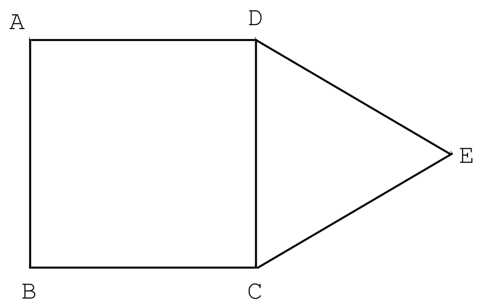
Remplaçons x et y par les coordonnées de A : $(4-3)^2+(3-1)^2=1+4=5$. Ok !

La tangente à Γ passant par A est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AO}=0$, soit en coordonnées : $\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -4x+16-3y+9=0 \Leftrightarrow 4x+3y-25=0$.

3-14 : Basique 7

$ABCD$ est un carré de côté a et DCE est un triangle équilatéral.

On s'intéresse au triangle BDE.



Les questions 1. et 2. sont indépendantes.

1. a. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{DE}$ en fonction de a. On pourra utiliser une projection orthogonale.

b. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DA}\bullet\overrightarrow{DE}$ en fonction de a.

c. En déduire l'égalité $\overrightarrow{DB}\bullet\overrightarrow{DE}=\dfrac{a^2}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

d. Utiliser ce résultat pour calculer BE^2. On pourra décomposer $\overrightarrow{BE}$ en $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}$ puis en déduire BE.

2. Calculer, en fonction de a, l'aire exacte des triangles :

a. ECD.

b. ECB (on pourra appliquer la formule des sinus).

c. En déduire que l'aire exacte du triangle EDB est égale à $\dfrac{a^2}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

3-15 : Rectangle (c)

$EFGH$ est un rectangle, avec $EH = a$ et $EF=\dfrac{3}{2}a$; M est le milieu de $[FG]$ et K est défini par $\overrightarrow{HK}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{HG}$; L est le projeté orthogonal de K sur (EM).

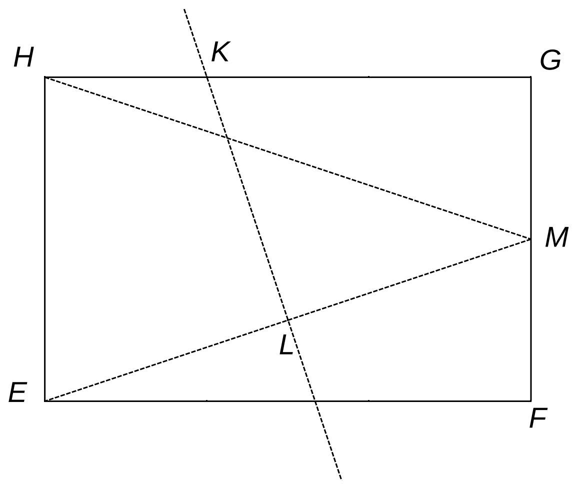
1. Calculer, en fonction de a, les produits scalaires : $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{KE}$.

2. En utilisant des relations de Chasles, montrer que $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}=\dfrac{5a^2}{4}$.

3. En exprimant d'une autre façon le produit scalaire $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}$, en déduire la distance EL en fonction de a.

4. Déterminer une mesure en degrés de l'angle $\widehat{KEM}$.

__**Correction**__



1. $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{EF}=\left(\dfrac{3}{2}a\right)^2=\dfrac{9}{4}a^2$; $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{KE}=\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{HE}=a(-a)=-a^2$.

2. $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}=\left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HK}\right).\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FM}\right)=\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{FM}+\overrightarrow{HK}.\overrightarrow{FM}=0+\frac{1}{2}a.\frac{3}{2}a+a.\frac{1}{2}a+0=\frac{5a^2}{4}$.

3. Par projection sur (EM) : $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EL}.\overrightarrow{EM}=EL.\sqrt{\frac{9}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2}=a\frac{\sqrt{10}}{2}.EL$ donc $EL=\frac{5a^2}{4}.\frac{2}{a\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{4}a$.

4. On calcule EK avec Pythagore, puis $\cos\left(\overrightarrow{EK},\overrightarrow{EM}\right)=\frac{\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{EM}}{EK.EM}=\frac{\frac{5a^2}{4}}{a\frac{\sqrt{5}}{2}a\frac{\sqrt{10}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\left(\overrightarrow{EK},\overrightarrow{EM}\right)=\frac{\pi}{4}$.

3-16 : Angles d'un triangle (c)

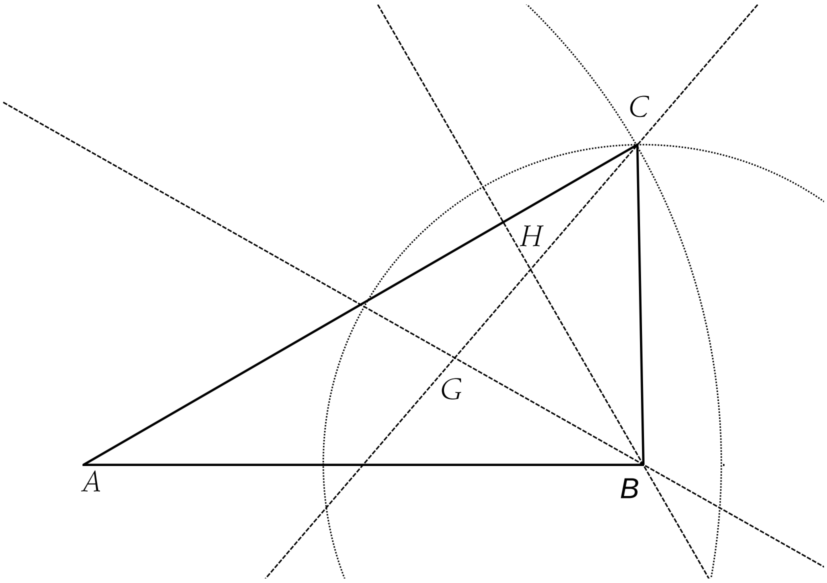
ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 5$ et $CA = 8$. On note H le pied de la hauteur issue de B et G le centre de gravité du triangle.

1. Calculer les angles de ce triangle.

2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et en déduire la longueur AH.

3. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, en déduire la longueur AG.

Correction



1. Avec Al-Kashi, on a immédiatement : $7^2=5^2+8^2-2.5.8.\cos\widehat{C}\Rightarrow\cos\widehat{C}=\frac{40}{80}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{C}\approx 60°$. De même on trouve $\cos\widehat{A}=\frac{8^2+7^2-5^2}{2.8.7}=\frac{11}{14}\Rightarrow\widehat{A}\approx 31°$ et $\widehat{B}\approx 89°$.

2. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=7.8.\frac{11}{14}=44$, par ailleurs $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AH.AC\Rightarrow AH=\frac{44}{8}=5{,}5$.

3. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. On a alors

$$AG^2=\overrightarrow{AG}^2=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)^2=\frac{1}{9}\overrightarrow{AB}^2+2.\frac{1}{3}.\frac{1}{3}.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}+\frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2=\frac{1}{9}.49+\frac{2}{9}.44+\frac{1}{9}.64=\frac{201}{9}.$$

D'où $AG=\frac{\sqrt{201}}{3}$.

3-17 : Carré

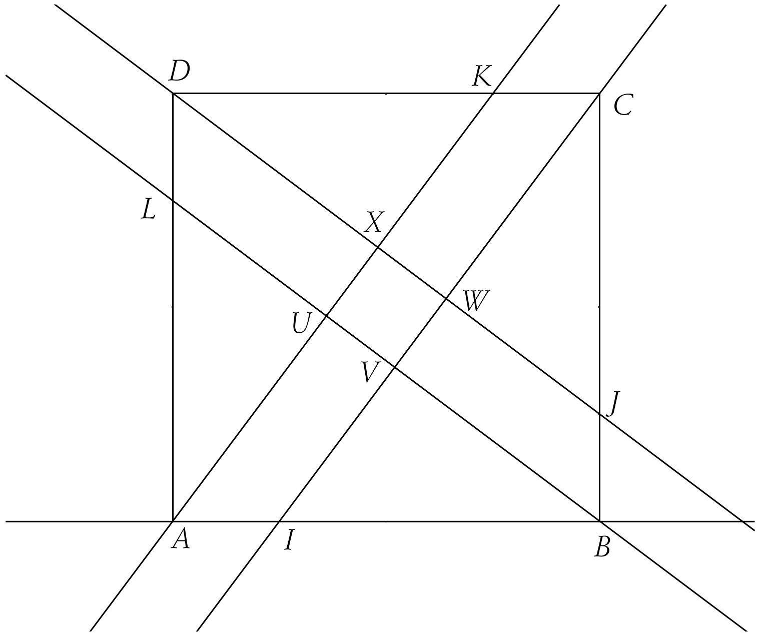
On se donne un carré $ABCD$ de côté a, ainsi que I, J, K et L les points tels que $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$.

1. Dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ donner les coordonnées des points de la figure.

2. Montrer que (BL) est orthogonale à (AK).

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection U de (BL) et (AK), V de (BL) et (CI), W de (CI) et (DJ), X de (DJ) et (AK).

4. Montrer que $UVWX$ forme un carré. Quelle est son aire ?



3-18 : Parallélogramme 1

Soit un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 2BC$. On note I le milieu de $[AB]$ et J celui de $[DC]$. Soit a la longueur BC.

1. Calculer DI^2 et IC^2 en fonction de a et du cosinus de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$. En déduire que le triangle DIC est rectangle.

2. Retrouver ce résultat sans calcul.

3-19 : Parallélogramme 2 (c)

1. En utilisant le théorème de la médiane, montrer que pour tout parallélogramme $ABCD$, on a :

$$AB^2+AD^2=\frac{1}{2}\left(AC^2+BD^2\right).$$

2. Résoudre le système S : $\begin{cases} x+y=7 \\ xy=12 \end{cases}$.

3. On considère un parallélogramme $ABCD$ dont on connaît les longueurs des diagonales et un angle :

$$BD=\sqrt{13}\ ;\ AC=\sqrt{37} \text{ et } \hat{A} = 60°.$$ On note : $x = AB$ et $y = AD$.

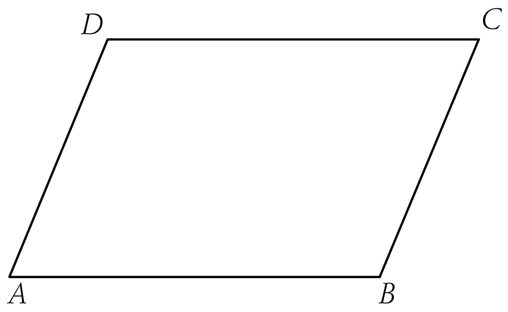
a. En utilisant le résultat de la question 1., montrer que : $x^2+y^2=25$ (1).

b. En utilisant l'angle $\hat{A}$, montrer que : $x^2+y^2-xy=13$ (2).

c. Montrer que le système constitué des équations (1) et (2) est équivalent au système S de la question 2.

d. Conclure quant aux dimensions du parallélogramme $ABCD$.

Correction



1. Ecrivons et développons :

$$AB^2=\overrightarrow{AB}^2=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)^2=AC^2+CB^2+2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}=AC^2+AD^2-2\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AD}$$

$$=AC^2-AD^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\Rightarrow AB^2+AD^2=AC^2-2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$AD^2=\overrightarrow{AD}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)^2=AB^2+BD^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BD}=AB^2+BD^2+2\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\right)$$

$$=-AB^2+BD^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\Rightarrow AB^2+AD^2=BD^2+2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

ajoutons : $2\left(AB^2+AD^2\right)=AC^2+BD^2$.

2. $\begin{cases}x+y=7\\ xy=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{12}{x}=7\\ xy=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-7x+12=0\\ xy=12\end{cases}$, d'où les racines 4 et 3, ce qui donne les couples solution : $(4\,;3)$ et $(3\,;4)$.

3. On considère un parallélogramme $ABCD$ dont on connaît les longueurs des diagonales et un angle :

$$BD=\sqrt{13}\ ;\ AC=\sqrt{37}\ \text{ et }\ \hat{A}=60°.$$

On note : $x = AB$ et $y = AD$.

a. On remplace dans $AB^2+AD^2=\frac{1}{2}\left(AC^2+BD^2\right)$: $x^2+y^2=\frac{1}{2}(37+13)=25$.

b. Avec Al Kashi dans le triangle ABD :

$$BD^2=BA^2+AD^2-2AB.AD.\cos\widehat{BAD}\Leftrightarrow 13=x^2+y^2-2xy\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2+y^2-xy=13.$$

c. $\begin{cases}x^2+y^2-xy=13\\ x^2+y^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25-xy=13\\ (x+y)^2-2xy=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=12\\ (x+y)^2-24=25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=12\\ (x+y)^2=49\end{cases}$.

Comme x et y sont des longueurs, l'équation $(x+y)^2=49$ donne uniquement $x+y=7$.

d. On a donc les deux dimensions $AB=4$ et $AD=3$ ou le contraire.

3-20 : Projections (c)

Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 3$. On appelle A' et C' les projetés orthogonaux de A et C sur (BD). En calculant de deux manières différentes le produit scalaire $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}$ calculez la distance $A'C'$.

Correction

Par projection, on a $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{A'C'}.\overrightarrow{DB}=-A'C'.DB=-A'C'\sqrt{34}$; avec les coordonnées par exemple en mettant B à l'origine : $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=\begin{pmatrix}5-0\\0-3\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0-5\\0-3\end{pmatrix}=-25+9=-16$ d'où $A'C'=\dfrac{-16}{-\sqrt{34}}=\dfrac{16}{\sqrt{34}}$.

3-21 : *Produit scalaire*

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 5$.

1. Construire C défini par $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=10$ et $AC = 4$.

2. Placer le barycentre D de (A, 12) et (B , −7) ainsi que le barycentre E de (A, 1) et (C, −3).

3. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$. En déduire le produit scalaire $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{BE}$. Que représente la droite (DC) pour le triangle BED ?

3-22 : *Triangle et projection*

On considère un triangle OAB, rectangle en O, I le milieu de [AB] et H le projeté orthogonal de O sur [AB]. Les points P et Q sont les projetés orthogonaux de H respectivement sur [OA] et [OB].

Partie A

On considère un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ tel que A(4 ; 0) et B(0 ; 10).

1. Faire une figure. Que conjecture-t-on sur les droites (PQ) et (OI) ?

2. Déterminer des équations de (AB) et (OH).

3. En déduire les coordonnées de H.

4. Déterminer les coordonnées de P, Q et I.

5. Démontrer que les droites (PQ) et (OI) sont orthogonales.

Partie B. Cas général sans repère

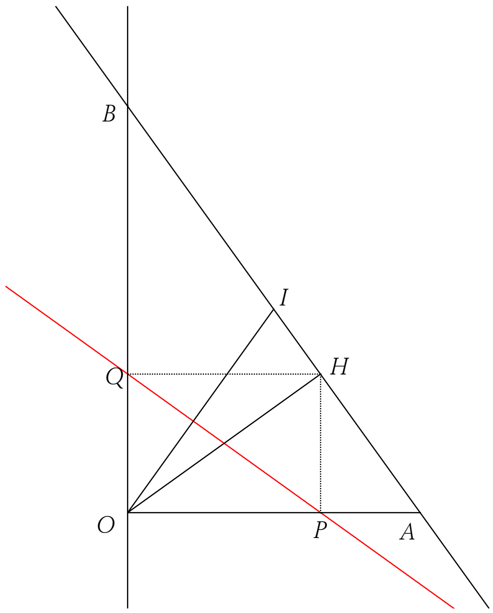
1. Calculer $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}$. En déduire que $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}$.

2. Après avoir exprimé $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OB}$ en fonction de $\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}$, les comparer.

3. Démontrer que les droites (PQ) et (OI) sont orthogonales.

<u>Correction</u>

Partie A



1. (PQ) et (OI) semblent orthogonales.

2. (AB) : $\begin{vmatrix} x-4 & 0-4 \\ y-0 & 10-0 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow 10x-40+4y=0 \Leftrightarrow 5x+2y-20=0$,

(OH) : $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow -4x+10y=0 \Leftrightarrow 2x-5y=0$.

3. Coordonnées de H : $\begin{cases}5x+2y-20=0\\2x-5y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{25}{2}y+2y-20=0\\x=(5/2)y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{29}{2}y=20\\x=(5/2)y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{29}{2}y=\frac{40}{29}\approx 1{,}3\\x=\frac{5}{2}\frac{40}{29}=\frac{100}{29}\approx 3{,}7\end{cases}$.

4. I apour coordonnées $(2\,;5)$, P $\left(\frac{100}{29}\,;0\right)$ et Q $\left(0\,;\frac{40}{29}\right)$.

5. On fait le produit scalaire : $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{OI}=\begin{pmatrix}-100/29\\40/29\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\frac{-200}{29}+\frac{200}{29}=0$.

Partie B. Cas général sans repère

1. $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{OB}=0$, on a $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ donc

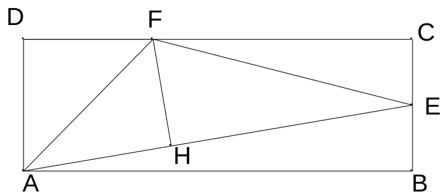
$0=\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OB}=\text{-}\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OA}$.

2. $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OA}=\underbrace{\overrightarrow{QO}\cdot\overrightarrow{OA}}_{0}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OB}=\underbrace{\overrightarrow{PO}\cdot\overrightarrow{OB}}_{0}+\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OB}$.

3. $\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{PQ}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

3-23 : Rectangle et projection

Soit *ABCD* un rectangle tel que *AB* = 6 cm et *AD* = 2 cm ; *E* est le milieu de [*BC*] et *F* défini par $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$; *H* est le projeté orthogonal de *F* sur (*AE*).



1. En utilisant les égalités $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}$, calculer $\overrightarrow{AF}\,.\,\overrightarrow{AE}$.

On détaillera et justifiera toutes les étapes du raisonnement.

2. Pour la suite de l'exercice, on admet que $\overrightarrow{AF}\,.\,\overrightarrow{AE}$ = 14.

a. En calculant d'une autre manière le produit scalaire, déterminer la longueur *AH*.

b. En calculant d'une autre manière le produit scalaire, déterminer $\cos(\widehat{EAF})$.

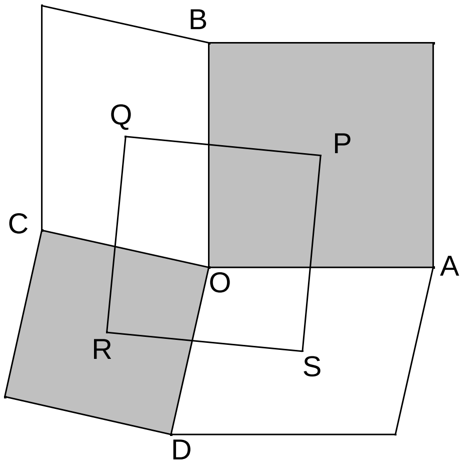
3. Soit *I* le milieu de [*FE*] et *G* le centre de gravité du triangle *AEF*.

a. Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$.

b. En déduire la longueur *AG*.

3-24 : Carré qui tourne (c)

On considère la configuration obtenue à partir de deux carrés ayant un sommet commun (en gris) et de la construction de deux parallélogrammes (en blanc). Montrer que les centres des carrés et des parallélogrammes sont les sommets d'un carré.



On pourra se placer dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ et prendre $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})=\alpha$.

Correction

Pour vérifier qu'on a bien un carré il suffit de vérifier qu'on a des angles droits et que les diagonales ont même longueur. Voir le fichier

http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/1S/DM2_ex3_corrige.cha

Dans le repère $(O\,;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})$ avec $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD})=\alpha$ on a les coordonnées des points : A (1 ; 0), B (0 ; 1), D $(\cos\alpha\,;\,\sin\alpha)$.

Pour C on a $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})=\alpha+\frac{\pi}{2}$ donc les coordonnées de C sont $\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})=\sin\alpha$ et $\sin(\alpha-\frac{\pi}{2})=-\cos\alpha$.

On en déduit les coordonnées de P : $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, de S : $\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\,;\frac{\sin\alpha}{2}\right)$, de R : $\left(\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{2}\,;\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{2}\right)$ et de Q : $\left(\frac{\sin\alpha}{2}\,;\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)$.

On vérifie qu'on a un parallélogramme en vérifiant que le milieu de $[PR]$ est également celui de $[QS]$, soit le point K $\left(\frac{1+\cos\alpha+\sin\alpha}{2}\,;\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{2}\right)$.

Pour simplifier les calculs dans la suite on multiplie tout par 2 ce qui ne changera rien au résultat final.

$2\overrightarrow{PR}=\begin{pmatrix}\cos\alpha+\sin\alpha-1\\ \sin\alpha-\cos\alpha-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}$, $2\overrightarrow{QS}=\begin{pmatrix}1+\cos\alpha-\sin\alpha\\ \sin\alpha-1+\cos\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-v\\ u\end{pmatrix}$; en fait ici lorsqu'on va calculer les longueurs $2PR$ et $2QS$ les termes seront identiques et vaudront $\sqrt{u^2+v^2}$. Il est donc inutile de faire le calcul ; de même on a $2\overrightarrow{PR}.2\overrightarrow{QS}=-uv+uv=0$. En fait ceci suffit : on a un losange dont les diagonales ont même longueur, c'est un carré.

3-25 : Cercles 1

Soit (C) et (C') les cercles d'équations : $x^2+y^2+4x+2y+2=0$ et $x^2+y^2-4x-4y-2=0$. Déterminez les centres et les rayons de ces cercles. Sont-ils sécants ?

3-26 : Cercles 2 (c)

Soit le repère orthonormal $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ et les points $A(-15\,;\,-3)$, $B(2\,;\,14)$, $C(-8\,;\,14)$ et $D(10\,;\,2)$.

1. Déterminez une équation du cercle Γ passant par A, B et C. Vérifiez que D appartient à Γ (on pourra chercher une équation de la forme $x^2+y^2+ax+by+c=0$).

2. Calculez $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ et $\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$ ainsi que $\cos(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})$ et $\sin(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB})$.

Pouvez vous trouver une relation entre ces angles ?

Correction

1. Si A est sur le cercle ses coordonnées vérifient l'équation du cercle :

$(-15)^2+(-3)^2-15a-3b+c=0 \Leftrightarrow -15a-3b+c+234=0$.

De même pour B et C : $2a+14b+c+200=0$ et $-8a+14b+c+260=0$. Il reste à résoudre le système :

$\begin{cases} -15a-3b+c+234=0 \\ 2a+14b+c+200=0 \\ -8a+14b+c+260=0 \end{cases}$ ce qui donne $a = 6$, $b = -4$ et $c = -156$ d'où l'équation

$$x^2+y^2+6x-4y-156=0.$$

On aurait pu chercher l'intersection de deux médiatrices du triangle ABC ce qui aurait donné les coordonnées du centre, etc.

On vérifie que D est sur Γ : $10^2+2^2+6\times 10-4\times 2-156=164-8-156=0$; ok !

2. $\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{CA.CB}=\dfrac{7\times -10+17\times 0}{13\sqrt{2}\times 10}=-\dfrac{7}{13\sqrt{2}}$;

$\sin\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)}{CA.CB}=\dfrac{7\times 0-17\times -10}{13\sqrt{2}\times 10}=\dfrac{17}{13\sqrt{2}}$;

$\cos\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)=\dfrac{\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}}{DA.DB}=\dfrac{25\times 8+5\times -12}{5\sqrt{26}\times 4\sqrt{13}}=\dfrac{140}{20\times 13\sqrt{2}}=\dfrac{7}{13\sqrt{2}}$;

et $\sin\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)=\dfrac{\det\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)}{DA.DB}=\dfrac{25\times -12-8\times 5}{20\times 13\sqrt{2}}=\dfrac{-340}{20\times 13\sqrt{2}}=-\dfrac{17}{13\sqrt{2}}$.

Conclusion les sinus et les cosinus sont opposés, les angles diffèrente de π : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)+\pi$.

3-27 : Cercles 3 (c)

On considère le cercle C d'équation $x^2+y^2+x+y-8=0$ et le cercle C' de centre $O'(-1\ ;\ \dfrac{3}{2})$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

1. Déterminez le centre O et le rayon r de C puis déterminez une équation de C'. Tracez les 2 cercles.
2. Calculez les coordonnées des points d'intersection de ces 2 cercles.
3. Soit $A(1\ ;\ 2)$. Vérifiez que A est un des points d'intersection de C et C' si vous ne l'avez pas trouvé dans les solutions du 2. Déterminez les équations des tangentes à chacun des cercles au point A.

Correction

C : $x^2+y^2+x+y-8=0$; C' : centre $O'(-1\ ;\ \dfrac{3}{2})$ et rayon $\dfrac{\sqrt{17}}{2}$.

1. $x^2+y^2+x+y-8=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}-8=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{17}{2}$ et donc de centre $O\left(-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{\dfrac{17}{2}}$.

2. L'équation du second cercle est $(x+1)^2+\left(y-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{17}{4} \Leftrightarrow x^2+y^2+2x-3y-1=0$. Il faut donc résoudre :

$$\begin{cases} x^2+y^2+2x-3y-1=0 \\ x^2+y^2+x+y-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2x-3y-1=0 \\ x-4y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4y-7)^2+y^2+2(4y-7)-3y-1=0 \\ x-4y+7=0 \end{cases},$$

soit $16y^2-56y+49+y^2+8y-14-3y-1=0 \Leftrightarrow 17y^2-51y+34=0 \Leftrightarrow y^2-3y+2=0$.

On a donc les solutions $y_1=1, y_2=2$ d'où les valeurs de x : $x_1=-3, x_2=1$ et les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(-3\ ;\ 1)$.

3. On cherche la droite orthogonale à $\overline{OA}$ passant par A, soit

$$\overline{OA}.\overline{AM}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+1/2 \\ 2+1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}y-5=0 \Leftrightarrow 3x+5y-13=0.$$

On refait la même chose avec O' :

$$\overline{O'A}.\overline{AM}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+1 \\ 2-3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 2x-2+\frac{1}{2}y-1=0 \Leftrightarrow 4x+y-6=0.$$

3-28 : Cercles 4 (c)

a. Montrer que l'équation $x^2+y^2-2x-8y-8=0$ est celle d'un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

b. Calculer les coordonnées des points d'intersection A et B de (C) avec la droite (D) d'équation $x+2y+1=0$.

c. Déterminer les équations de la tangente (T) à (C) en A ainsi que l'équation de la tangente (T') à (C) en B.

d. Déterminer l'angle entre (T) et (T').

<u>Correction</u>

a. $x^2+y^2-2x-8y-8=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y-4)^2-16-8=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-4)^2=25$ est un cercle (C) de centre $K(1\ ;\ 4)$ et de rayon 5.

b. $\begin{cases} x^2+y^2-2x-8y-8=0 \\ x=-2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-2y-1)^2+y^2-2(-2y-1)-8y-8=0 \\ x=-2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y^2-5=0 \\ x=-2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\pm 1 \\ x=-2y-1 \end{cases}.$

Les points d'intersection ont donc pour coordonnées : $A(-3\ ;\ 1)$ et $B(1\ ;\ -1)$.

c. Pour (T) On cherche la droite passant par A et orthogonale au vecteur $\overline{KA}$:

$$\overline{AM}.\overline{AK}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+3 \\ y-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+3 \\ 4-1 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 4x+12+3y-3=0 \Leftrightarrow 4x+3y+9=0$$

et pour (T') : $\overline{BM}.\overline{BK}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-1 \\ 4+1 \end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow 5(y+1)=0 \Leftrightarrow y+1=0$.

d. Il suffit de trouver l'angle entre les vecteurs normaux, soit $\left(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{BK}\right)=\alpha$; on a

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{BK}}{AK.BK}=\frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}}{5.5}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}, \sin\alpha=\frac{\det(\overrightarrow{AK},\overrightarrow{BK})}{AK.BK}=\frac{\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{5.5}=\frac{20}{25}=\frac{4}{5},$$

ce qui donne un angle d'environ 53°.

3-29 : Cercles 5

On considère dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ les points $A(2\ ;\ 1)$ et $C(5\ ;\ 3)$.

1. Calculer la distance AC.

2. Déterminer l'équation cartésienne du cercle Γ de centre A et passant par C.

3. a. Montrer que le point B de coordonnées $\left(1\,;2\sqrt{3}+1\right)$ appartient au cercle Γ.

b. Montrer que $BC=\sqrt{32-8\sqrt{3}}$.

4. Déterminer une valeur approchée en degré de l'angle $\widehat{BAC}$ à 10^{-2} près.

5. Déterminer par le calcul l'autre point de Γ d'abscisse 1.

3-30 : Cercles 6

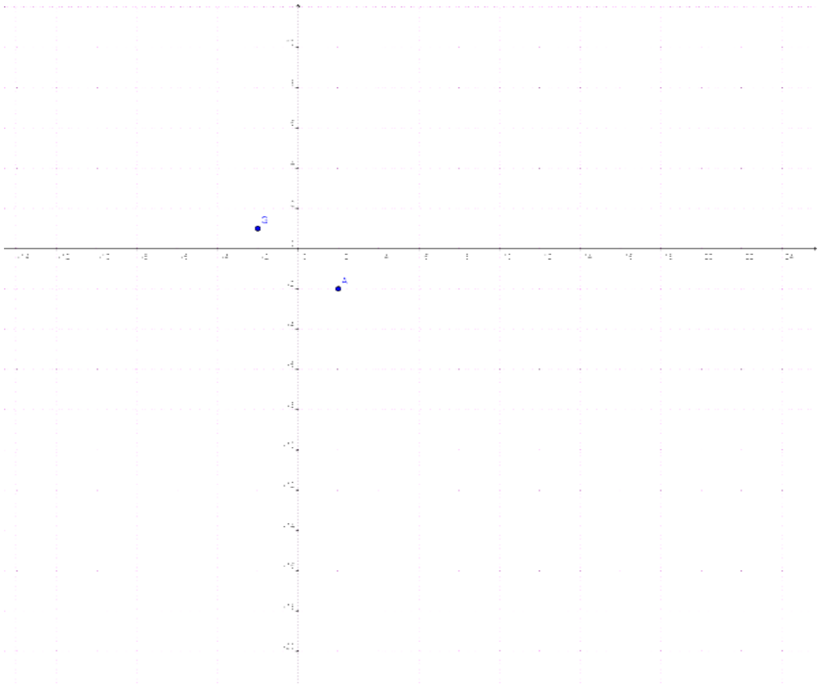
Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On considère les points $A(-2\ ;\ 1)$, $B(6\ ;\ 2)$ et $C(4\ ;\ 5)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.
3. Déterminer l'équation du cercle Γ circonscrit au triangle ABC.
4. Soit Ω le centre du cercle Γ. Déterminer les points d'intersection de la droite $(C\Omega)$ et du cercle Γ.

3-31 : Cercles 7

Soit Γ un cercle de centre $G(-2,\ 1)$ et de rayon 5 ; A le point de coordonnées $(2,\ -2)$.

1. Donner l'équation de Γ et vérifiez que A est un point du cercle.
2. Déterminez l'équation de la tangente à Γ passant par A.
3. Soit Γ' l'ensemble des points tels que $x^2+y^2-20x+16y+64=0$. Préciser la nature de Γ' ainsi que ses éléments caractéristiques. Dessinez le sur la figure.
4. Que pouvez-vous dire de Γ et Γ' ?



3-32 : Cercle et droites

Dans un plan, muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, on considère les points : $A(2\,;1)$, $B(5\,;7)$, $C(3\,;\,-1)$ et $D(5\,;5)$.

On note Δ l'ensemble des points $M(x\,;y)$ du plan tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB}=27$ et Γ le cercle de diamètre $[CD]$.

1. a. Déterminer une équation de Δ et Γ.

b. Vérifier que $H(-1\,;7)$ est un point de Δ et que $E(1\,;1)$ est un point de Γ.

c. Construire Δ et Γ.

2. a. Résoudre le système (S) : $\begin{cases} x+2y-13=0 \\ x^2+y^2-8x-4y+10=0 \end{cases}$

b. Que peut-on en déduire ?

3. Déterminer l'équation réduite de la tangente D à Γ au point E puis la tracer.

4. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Γ avec les axes du repère.

3-33 : Cercle et droites (c)

On considère, dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$, les points $A(1\,;\,-2)$, $B(4\,;\,-1)$ et $C(4\,;\,4)$.

1. a. Déterminer une équation de la médiatrice D_1 du segment $[AB]$.

b. Déterminer une équation de la médiatrice D_2 du segment $[BC]$.

c. Déterminer les coordonnées du point d'intersection I des droites D_1 et D_2.

d. Comment appelle-t-on le point I par rapport au triangle ABC ?

2. Soit le cercle (C) d'équation cartésienne $x^2+y^2-3x-3y-8=0$.

a. Déterminer les coordonnées du centre Ω du cercle (C) ainsi que son rayon.

b. Que remarquez-vous ?

c. Montrer que (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

Correction

1. a. D_1 : K le milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}\,;-\frac{3}{2}\right)$ d'où

$$\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-\frac{5}{2}\\ y+\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow 3x-\frac{15}{2}+y+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow 3x+y-6=0.$$

b. D_2 : J le milieu de $[BC]$ a pour coordonnées $\left(4\,;\frac{3}{2}\right)$ d'où

$$\overrightarrow{JM}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-4\\ y-\frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow 5\left(y-\frac{3}{2}\right)=0\Leftrightarrow 2y-3=0.$$

c. $\begin{cases}3x+y-6=0\\ y=3/2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=3/2\\ y=3/2\end{cases}$.

d. Le point I est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. a. $x^2+y^2-3x-3y-8=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}-8=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{50}{4}$.

Ω a pour coordonnées $\left(\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right)$, le rayon du cercle est $\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

b. $\Omega=I$.

c. Il suffit de calculer par exemple $\Omega A=\sqrt{\left(1-\frac{3}{2}\right)^2+\left(-2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{50}{4}}$; donc (C) est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3-34 : Courbe (c)

Quelle est la nature de la courbe C d'équation $2x^2-x+1=y-2y^2$?

Correction

$$2x^2-x+1=y-2y^2\Leftrightarrow 2x^2+2y^2-x-y+1=0\Leftrightarrow x^2+y^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}=0\Leftrightarrow\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=-\frac{14}{16}.$$

Cette courbe est vide.

3-35 : Lignes de niveau 1 (c)

Construire un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC = 13$ et $BC = 10$. On note G son centre de gravité.

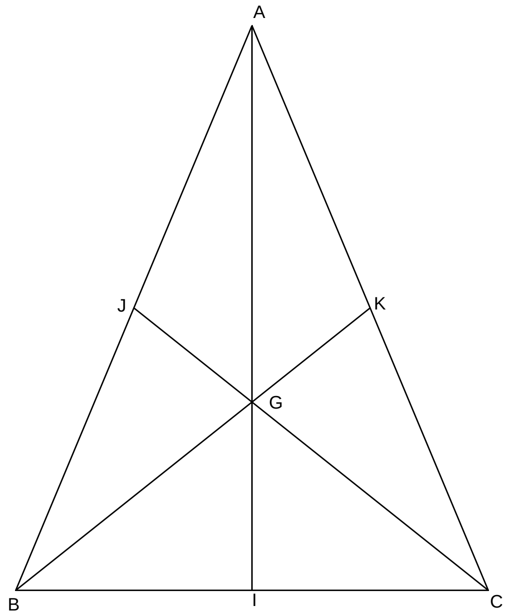
1. Calculer les longueurs AG, BG et GC.

2. Montrer que pour tout point M du plan on a $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

3. Déterminer et construire l'ensemble des points du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 194$.

4. Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 0$.

<u>Correction</u>



$AB = AC = 13$ et $BC = 10$, G le centre de gravité.

1. Avec Pythagore : $AI^2 = AB^2 - BI^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow AI = 12 \Rightarrow AG = \frac{2}{3}.12 = 8$;

$BG^2 = BI^2 + IG^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow BG = CG = \sqrt{41}$.

2. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + \ldots = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \ldots$

3. $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 64 + 41 + 41 = 3MG^2 + 146$ donc l'ensemble de points cherché est l'ensemble des points M tels que $3MG^2 + 146 = 194 \Leftrightarrow MG^2 = 16 \Leftrightarrow MG = 4$, soit le cercle de centre G, de rayon 4.

4. $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MA^2 - MA^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB} - AB^2 - MA^2 - 2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} - AC^2 = -2\overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - 338$.

L'ensemble cherché est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}(2\overrightarrow{AI}) = -169 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} = \frac{169}{2}$. On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AI})$ où le point M a pour abscisse x tel que $x = \frac{169}{2}$; c'est la droite perpendiculaire à (AI) passant par ce point.

3-36 : Lignes de niveau 2 (c)

1. Soient les points $A(1 ; 1)$ et $B(1 ; 0)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $MA^2 + MB^2 = 10$. Représenter cet ensemble.

2. Soit $A(5 ; 3)$ et $B(2 ; 4)$. Déterminer par une équation l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -2$. Tracez cet ensemble.

3. Soient A et B deux points du plan tels que $AB = a$. Déterminez l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = a^2$.

Correction

1. $A(1\ ;\ 1)$, $B(1\ ;\ 0)$; $MA^2+MB^2=(1-x)^2+(1-y)^2+(1-x)^2+(-y)^2=2x^2+2y^2-4x-2y+3$. On cherche donc les points tels que $x^2+y^2-2x-y=\frac{7}{2}\Leftrightarrow(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{7}{2}+1+\frac{1}{4}=\frac{19}{4}$. C'est le cercle de centre C (1 ; 1/2) et de rayon $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

2. $A(5\ ;\ 3)$, $B(2\ ;\ 4)$. $MA^2-MB^2=(5-x)^2+(3-y)^2-(2-x)^2-(4-y)^2=14-6x+2y$. L'ensemble cherché est la droite d'équation $14-6x+2y=-2\Leftrightarrow 3x-y-8=0$.

3. $AB=a$. $\vec{MA}.\vec{MB}=\begin{pmatrix}x_A-x\\y_A-y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_B-x\\y_B-y\end{pmatrix}=x^2+y^2-(x_A+x_B)x-(y_A+y_B)y+x_Ax_B+y_Ay_B$. Prenons le centre du repère en I, milieu de $[AB]$, les coordonnées $A(-p\ ;\ 0)$ et $B(p\ ;\ 0)$ où $p=a/2$; on a alors $x^2+y^2=p^2+a^2=\frac{a^2}{4}+a^2=\frac{5}{4}a^2$, soit le cercle de centre I et de rayon $a\frac{\sqrt{5}}{2}$.

3-37 : Lignes de niveau 3 (c)

Soient les points $A(-1\ ;\ 1)$ et $B(0\ ;\ 2)$.

1. Déterminer l'ensemble E des points $M(x\ ;\ y)$ tels que $MA^2+MB^2=AB^2$. Tracez cet ensemble.

2. Déterminer l'ensemble F des points M du plan tels que $MA^2-MB^2=AB^2$. Tracez cet ensemble.

3. Déterminer l'intersection de E et F.

Correction

1. $MA^2+MB^2=AB^2\Leftrightarrow(-1-x)^2+(1-y)^2+(0-x)^2+(2-y)^2=2\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2x-6y+6=2$, soit $x^2+y^2+x-3y+1=0\Leftrightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=-1+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}=1$; c'est le cercle de centre $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ et de rayon 1.

2. $MA^2-MB^2=AB^2\Leftrightarrow(-1-x)^2+(1-y)^2-(0-x)^2-(2-y)^2=2\Leftrightarrow 2x+2y-2=2\Leftrightarrow x+y-2=0$, soit une droite orthogonale au vecteur $\overline{AB}$.

3. Pour qu'il y ait intersection il faut que $MB^2=AB^2-MA^2$ et $MB^2=MA^2-AB^2$, ce qui n'est possible que si $MB=0\Leftrightarrow M=B$. Comme B n'est ni dans E ni dans F l'intersection est vide.

3-38 : Fonction scalaire de Leibniz

Soit ABC un triangle, on pose : $a=BC$, $b=AC$ et $c=AB$. On note A', B', C' les milieux respectifs des côtés $[BC],[AC],[AB]$ et G le centre de gravité du triangle ABC.

1. a. Montrer que $GB^2+GC^2=\frac{1}{2}GA^2+\frac{1}{2}BC^2$.

b. Après avoir écrit deux autres relations analogues, montrer que: $GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$.

2. A tout point M du plan, on associe le réel : $f(M)=MA^2+MB^2+MC^2$.

a. Montrer que pour tout point M du plan, $f(M)=3MG^2+\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$.

b. Pour tout réel k, soit L_k l'ensemble des points M du plan tels que $f(M)=k$. (*L_k est la ligne de niveau k de l'application f* : $M\mapsto MA^2+MB^2+MC^2$).

Déterminer suivant les valeurs du réel k, la nature de l'ensemble L_k.

3. Calculer de deux façons différentes le carré scalaire $\left(\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}\right)^2$ et en déduire que

$$2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}=3MG^2-\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{6}\right).$$

4. On considère les points communs aux cercles de diamètres $[AA']et[BC]$. Montrer que lorsqu'ils existent ces points appartiennent à un cercle (Γ) de centre G, dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c. (*on pourra utiliser le résultat du 3°).*

Déterminer la valeur du réel k tel que $(\Gamma)=L_k$.

3-39 : Distance d'un point à une droite (c)

Soient les points $A(-2\,;1)$ et $B(3\,;2)$ du plan.

1. Montrez que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. Déduisez-en que $x-5y+7=0$ est une équation de la droite (AB).

2. Soit D le point de coordonnées (1 ; 1). Vérifiez que D n'est pas sur (AB).

On cherche la distance de D à (AB), soit la distance DH où H est le projeté orthogonal de D sur (AB).

3. a. Montrez que le produit scalaire $\overrightarrow{DH}.\vec{n}$ vaut -3 ; on posera que H a pour coordonnées (x ; y) et on utilisera le fait que H est sur (AB).

b. En utilisant le fait que $\overrightarrow{DH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, montrez que $\overrightarrow{DH}.\vec{n}=\pm DH.\sqrt{26}$.

c. Déduisez-en la distance DH.

4. Proposez une méthode générale permettant de donner la formule donnant la distance d'un point $D(x_D\,;y_D)$ à une droite d'équation $ax+by+c=0$.

<u>Correction</u>

$A(-2\,;1),\ B(3\,;2)$.

1. $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}=5-5=0$; équation de (AB) : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\begin{pmatrix}x+2\\y-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}=x+2-5y+5=x-5y+7=0$. Ok !

2. $1-5+7=3\neq 0$ donc D n'est pas sur (AB).

On cherche la distance de D à (AB), soit la distance DH où H est le projeté orthogonal de D sur (AB).

3. a. $\overrightarrow{DH}.\vec{n}=\begin{pmatrix}x-1\\y-1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}=x-1-5y+5=x-5y+4$;

or H est sur (AB) donc vérifie $x-5y+7=0\Leftrightarrow x-5y=-7$; en remplaçant on a

$$\overrightarrow{DH}.\vec{n}=x-5y+4=-7+4=-3.$$

b. $\overrightarrow{DH}.\vec{n}=DH\left\|\vec{n}\right\|\cos\left(\overrightarrow{DH},\vec{n}\right)=DH.\sqrt{1^2+(-5)^2}.\pm 1=\pm DH\sqrt{26}$.

c. En faisant l'égalité des deux calculs on a $\pm DH\sqrt{26}=-3\Leftrightarrow DH=\mp\frac{3}{\sqrt{26}}=\frac{3}{\sqrt{26}}$ puisque DH est positif.

4. En classe…

3-40 : Distance d'un point à une droite 2

Variante du précédent.

Soient les points $A(-4\,;2)$ et $B(8\,;-3)$ du plan.

1. Montrez que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\12\end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$. Déduisez-en que $5x+12y-4=0$ est une équation de la droite (AB).

2. Soit D le point de coordonnées (2 ; 1). Vérifiez que D n'est pas sur (AB).

On cherche la distance de D à (AB), soit la distance DH où H est le projeté orthogonal de D sur (AB).

3. a. Que vaut le produit scalaire $\overrightarrow{DH}.\vec{n}$? On posera que H a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$ et on utilisera le fait que H est sur (AB).

b. En utilisant le fait que $\overrightarrow{DH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, montrez que $\overrightarrow{DH}.\vec{n} = \pm 13.DH$.

c. Déduisez-en la distance DH.

4. Proposez une méthode générale permettant de donner la formule donnant la distance d'un point $D(x_D\ ;\ y_D)$ à une droite d'équation $ax+by+c=0$.

4. Droites

4-41 : Menelaüs

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $A(6\ ;\ 0)$ et $B(2\ ;\ 4)$.

1. Ecrire les équations des droites (OA) (OB) et (AB).

2. On considère la droite D d'équation $y = x+4$; déterminer les coordonnées des points P, Q et R intersections de D avec (AB), (OB) et (AO).

3. Vérifier que $\dfrac{AP}{BP}\dfrac{BQ}{QO}\dfrac{RO}{RA}=1$.

4. Démontrer que dans un triangle ABC, et pour une droite (D) coupant (AB) en P, (BC) en Q et (AC) en R, on a $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}}\dfrac{\overline{CR}}{\overline{AR}}=-1$.

4-42 : Médianes orthogonales

Soit ABC un triangle et A', B', C' les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC. On se propose de répondre aux questions suivantes :

- *A quelle condition les médianes (AA′) et (BB′) sont elles orthogonales ?*
- *Quelle est alors la mesure en degrés de l'angle $\hat{A}$ si on suppose de plus ABC isocèle en A ?*

1. Démontrer que $AB^2+AC^2=9\left(GB^2+GC^2\right)-4BC^2$ [1].

2. En déduire que les droites (BB') et (CC') sont orthogonales si et seulement si $AB^2+AC^2=5BC^2$.

3. a. Démontrer que $9\overrightarrow{GB}.\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-2BC^2$.

b. En déduire que les droites (AA') et (BB') sont orthogonales si et seulement si

$$\cos\hat{A}=\frac{2(AB^2+AC^2)}{5AB\cdot AC}\quad [2]$$

c. On suppose que les droites (AA') et (BB') sont orthogonales et que ABC est isocèle en A. Montrer que $\cos\hat{A}=\dfrac{4}{5}$. En déduire la mesure en degrés de l'angle $\hat{A}$, arrondie au dixième.

4. Soit ABC un triangle isocèle en A, de centre de gravité G.

Montrer que $\cos\hat{A}=\dfrac{5\cos B\hat{G}C+4}{4\cos B\hat{G}C+5}$. Retrouver ainsi le résultat de la question 3. c.

Piste : $AB = AC = b$; $BC = a$. *Appliquer la formule d'Al-Kashi aux triangles ABC et GBC, en déduire que* $9b^2\left(1-\cos\hat{A}\right)=\left(b^2+2a^2\right)\left(1-\cos\widehat{GBC}\right)$.

4-43 : Droite d'Euler (c)

On considère le triangle ABC où $A(0\ ;\ 0)$, $B(6\ ;\ 0)$ et $C(2\ ;\ 4)$ dans un repère orthonormé de centre A. Faire une figure que vous compléterez au fur et à mesure (unités : 2cm).

1. Déterminez les coordonnées du centre Ω du cercle circonscrit (Γ) au triangle ABC. Déterminez le rayon de (Γ).

2. Déterminez les coordonnées de l'orthocentre H de ABC puis celles du centre de gravité G.

3. Montrez que Ω, H et G sont alignés. Déterminez la valeur du réel k tel que $\overrightarrow{\Omega H}=k\overrightarrow{\Omega G}$; montrez alors que $\overrightarrow{\Omega H}=\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}$.

4. On note H_C le pied de la hauteur issue de C. Déterminez les coordonnées de H', symétrique de H par rapport à la droite (AB). Montrez que H' est sur (Γ).

Correction

1. Médiatrice de [AB] : x = 3 ; médiatrice de [AC] : le milieu est I(1 ; 2), on a l'équation en faisant le p.s. : $\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}=2x+4y-10=0$. Le point d'intersection est $\Omega(3\,;\,1)$. Le rayon du cercle est $\Omega A=\sqrt{10}$.

2. Pareil pour H ; hauteur issue de C : x = 2, hauteur issue de B : $x+2y-6$ = 0, H a pour coordonnées (2 ; 2). Pour G on fait : $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-6 \\ y-0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2/3(1-6) \\ 2/3(2-0) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8/3 \\ y=4/3 \end{cases}$.

3. On calcule $\overrightarrow{\Omega H}=\begin{pmatrix} 2-3 \\ 2-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\Omega G}=\begin{pmatrix} -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$; on vérifie facilement que $\overrightarrow{\Omega H}=3\overrightarrow{\Omega G}$ donc les points sont alignés… Pour le reste on a facilement que $\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}=3\overrightarrow{\Omega G}$.

4. Le symétrique de H est H'(2 ; −2) ; il appartient au cercle car $\Omega H'=\sqrt{1+9}=\sqrt{10}$.

4-44 : Droite d'Euler - 2 (c)

Soit ABC un triangle, O le centre de son centre circonscrit, G son centre de gravité et H le point tel que

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

1. Démontrer que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$. Qu'en déduit-on ?

2. Donner deux relations semblables faisant intervenir A, B, C et H.

3. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

4. Démontrer que O, G et H sont alignés.

Correction

1. $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OI}$ où I est le milieu de $[BC]$. On a alors $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{OI}.\overrightarrow{BC}=0$ car O est le centre du cercle cisrconscrit, soit le point d'intersection des médiatrices (OI est donc perpendiculaire à BC).

2. Avec les deux autres côtés du triangle on a de la même manière $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0$ et $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0$.

3. H est sur la hauteur passant par A ($\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0$), sur celle passant par B ($\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{CA}=0$) et sur celle passant par C ($\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=0$). C'est bien l'orthocentre de ABC.

4. Introduisons I dans $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$: $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OI}$; par ailleurs on a $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, soit en introduisant O :

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OI}$$

d'où on tire bien $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$.

4-45 : Angles et droites (c)

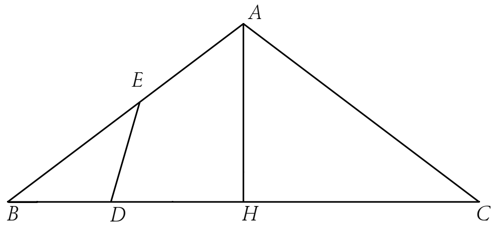
ABC est un triangle isocèle de sommet A, H le pied de la hauteur issue de A ; on a BC = 16 cm et AH = 6 cm ; D est le point de [BC] tel que BD =3,5 cm et E celui de [BA] tel que BE = 5,6 cm.

1. Calculer AB et AC ; montrer que BAC et BDE sont semblables. Calculer la longueur ED.

2. Calculer AD ; que peut-on dire du triangle DAC ? Montrer que A, D et C sont sur un même cercle dont on donnera le centre et le rayon.

3. Calculer $\cos(\widehat{ABC})$, montrer que $\widehat{CDE}=2\widehat{ABC}$, en déduire $\cos(\widehat{CDE})$. Calculer alors la longueur EC. Que peut on dire du triangle CED ?

Correction



1. Après s'être appliqué à faire la figure on voit effectivement apparaître deux triangles semblables (à vue de nez…). On utilise Pythagore : $AB^2 = BH^2 + AH^2 = 64 + 36 = 100$ d'où $AB = AC = 10$.

Les triangles EBD et ABC ont l'angle $\hat{B}$ en commun et s'ils sont semblables on a la similitude $s : \begin{cases} B \to B \\ A \to D \\ C \to E \end{cases}$,

vérifions alors que $\frac{BE}{BC} = \frac{BD}{BA}$: $\frac{5,6}{16} = \frac{3,5}{10} \Leftrightarrow 56 = 56$, ok ! Comme BAC est isocèle il en est de même de BDE donc $ED = BD = 3,5$.

2. Encore Pythagore dans le triangle AHD :

$AD^2 = DH^2 + HA^2 = (8-3,5)^2 + 36 = 56,25$ d'où $AD = 7,5$; essayons Pythagore dans DAC : $AD^2 + AC^2 = 56,25 + 100 = 156,25$ et $DC^2 = (16-3,5)^2 = 156,25$. Conclusion DAC est rectangle en A, les points A, D et C sont sur le cercle circonscrit à ce triangle dont l'hypothénuse est DC, le centre du cercle est au milieu de $[DC]$. Si E est sur le cercle, le triangle DEC doit être rectangle en E, malheureusement on ne connaît pas EC.

Tout d'abord Al-Kashi : $EC^2 = DE^2 + DC^2 - 2DE.DC.\cos\widehat{EDC}$ où nous devons trouver $\cos\widehat{EDC}$. On remarque alors que $\widehat{EDC} = 2\widehat{ABC}$, il nous faut donc utiliser la formule

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha :$$

$\sin\widehat{ABC} = \frac{AH}{AB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ d'où $\cos\widehat{EDC} = 1 - 2\frac{9}{25} = \frac{7}{25}$.

Remplaçons dans Al-Kashi : $EC^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2 - 2.\frac{7}{2}.\frac{25}{2}.\frac{7}{25}$, ce qui nous donne $EC^2 = \frac{49 + 625 - 98}{4} = \left(\frac{25}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = DC^2 - ED^2$ d'où la relation de Pythagore dans le triangle EDC.

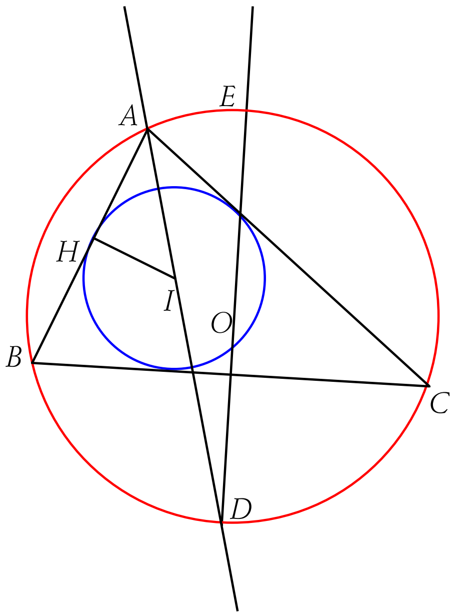
4-46 : Cercle inscrit, cercle circonscrit

Un exercice où il est question de cercle inscrit et circonscrit, avec à la clé une formule due à Euler donnant la distance entre les centres de ces deux cercles.

Soit ABC un triangle, (Γ) le cercle de centre O et de rayon R, circonscrit au triangle ABC et (C) le cercle inscrit dans ABC, de centre I et de rayon r. On se propose de démontrer que :

$$OI^2 = R^2 - 2rR \text{ (formule d'Euler).}$$

On note : D le point d'intersection de la droite (AI) avec le cercle (Γ), E le point de (Γ) diamétralement opposé à D et H le projeté orthogonal du point I sur le segment $[AB]$.



1. Exprimer la distance IA en fonction de r et de l'angle $\dfrac{\widehat{A}}{2}$.

2. En utilisant le théorème de l'angle inscrit, montrer que $\widehat{IBD}=\widehat{IBD}$.

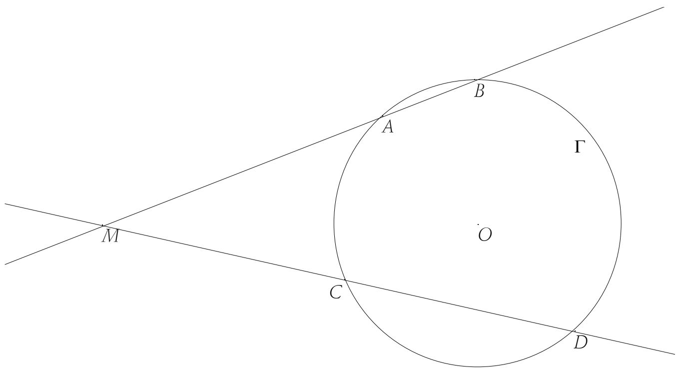
3. En déduire que IBD est isocèle en D, puis donner une expression de BD en fonction R et $\dfrac{\hat{A}}{2}$.

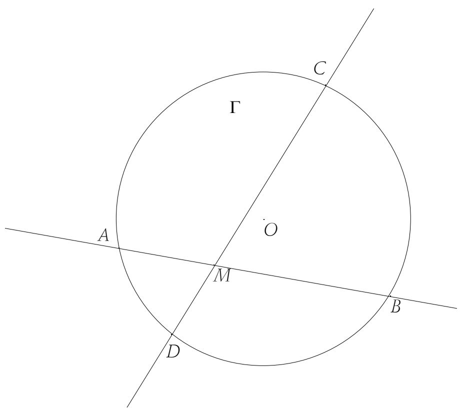
4. Démontrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{ID}=OI^2-R^2$.

5. Déduire des questions précédentes que $OI^2=R^2-2rR$.

4-47 : Puissance d'un point - Géométrique

Soit Γ un cercle de centre O et de rayon R et M un point non situé sur Γ.





On se propose d'établir que, dans chacune des configurations ci-dessus, on a : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$.

Soit E le point diamétralement opposé à A sur Γ.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{ME}$. En déduire que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=OM^2-R^2$.

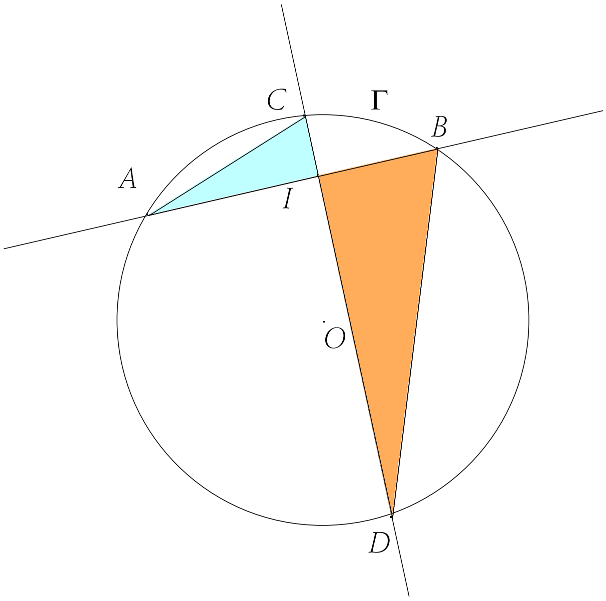
2. Établir le résultat annoncé.

Voici deux applications du résultat dégagé dans le problème précédent.

1. ***Médiane de l'un, hauteur de l'autre.***

Avec un cercle, un point I intérieur au cercle, deux droites perpendiculaires passant par ce point et un peu de couleur, nous avons obtenu la figure ci-dessous.

On pose J le milieu de $\left[AC\right]$. Montrer que la médiane $\left(IJ\right)$ du triangle ACI est la hauteur du triangle BID. On pourra calculer $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{BD}$.



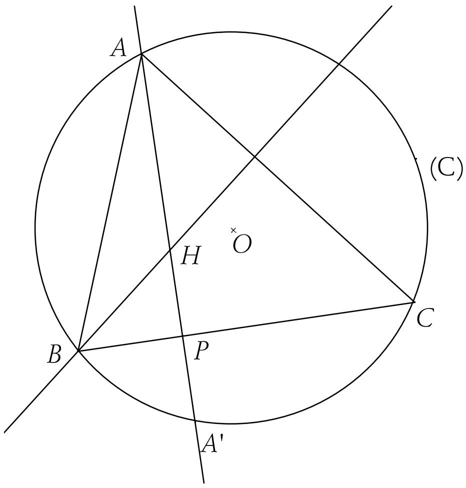
2. ***Symétriques de l'orthocentre***.

Soit ABC un triangle de cercle circonscrit (C). La hauteur issue de A coupe la droite (BC) en P et le cercle (C) en A'. H est le symétrique de A' par rapport à la droite (BC).

a. Démontrer que $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$.

b. Démontrer que le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

c. En déduire que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle ABC appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.



4-48 : Puissance d'un point - analytique (c)

On se donne un cercle (C) de centre O, de rayon R ainsi qu'un point A. Le but de l'exercice est de montrer que si (d) est une droite passant par A et coupant (C) alors $AM.AM'=cste$ où M et M' sont les points d'intersection de (d) avec (C).

1. Faire la figure en prenant un repère de centre A et O sur (Ox). Pour simplifier on prendra O à l'abscisse 1 (ça ne change pas grand-chose au final).

2. Ecrire l'équation d'une droite de coefficient directeur t passant par A. Déterminer l'équation du 2nd degré (E) satisfaite par les abscisses des points M et M'.

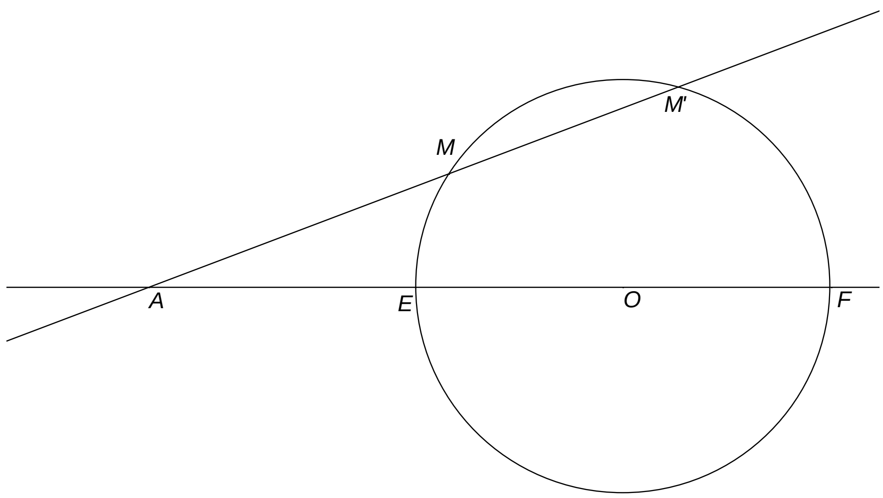
3. Le discriminant de cette équation (E) est $4[R^2-(1-R^2)t^2]$. Discuter suivant les valeurs de t le nombre de points d'intersection entre (C) et (d). Que se passe-t-il (géométriquement parlant) lorsque ce discriminant est nul ?

4. On note u et v les solutions de (E) lorsqu'elles existent. Montrer que $uv=\dfrac{1-R^2}{1+t^2}$.

5. Vérifier que $AM.AM'=k$ est équivalent à $uv=\pm\dfrac{k}{1+t^2}$. Conclure.

Correction

1.



2. Comme A est à l'origine, l'équation d'une telle droite est $y = tx$.

Le cercle quand à lui a pour équation : $(x-1)^2+(y-0)^2=R^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=R^2$. Les points M et M' ont des coordonnées x et y qui satisfont les deux équations, soit

$$(x-1)^2+(tx)^2=R^2 \Leftrightarrow (1+t^2)x^2-2x+1-R^2=0 .$$

3. C'est une équation du second degré avec $a=1+t^2, b=-2, c=1-R^2$. On a bien

$$\Delta=4-4(1+t^2)(1-R^2)=4-4(1+t^2-R^2-t^2R^2)=4[R^2-(1-R^2)t^2] .$$

Lorsque $R>1$, $1-R^2<0$ et $\Delta=4[R^2+(R^2-1)t^2]>0$, il y a deux points d'intersection pour n'importe quelle valeur de t (heureusement puisque c'est le cas où A est à l'intérieur du cercle…).

Lorsque R = 1, $\Delta=4$, l'équation est $(1+t^2)x^2-2x=0$ qui a toujours deux solutions : 0 (solution A) et autre chose.

Lorsque $R<1$, il faut factoriser Δ :

$\Delta=4\left(R-t\sqrt{1-R^2}\right)\left(R+t\sqrt{1-R^2}\right)$ qui est positif lorsque $\dfrac{-R}{\sqrt{1-R^2}}\le t\le\dfrac{R}{\sqrt{1-R^2}}$ puisque dans ce cas le coefficient de t^2 dans Δ est R^2-1 qui est négatif (signe du trinôme : deux racines, coefficient a négatif, donc Δ est positif entre les racines).

Lorsque $t=\pm\dfrac{R}{\sqrt{1-R^2}}$, $\Delta=0$, il y a racine double, c'est le cas où (C) et (d) sont tangents.

4. D'une manière générale le produit des racines est $x_1x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\cdot\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{c}{a}$, on a donc ici $uv=\frac{1-R^2}{1+t^2}$.

5. On a au carré : $(AM.AM')^2=\left[x_1^2+y_1^2\right]\left[x_2^2+y_2^2\right]=(x_1x_2)^2+(y_1y_2)^2+(x_1y_2)^2+(y_1x_2)^2$; mais x_1 et x_2 sont les abscisses de M et M', les ordonnées sont alors $y_1 = tx_1$ et $y_2 = tx_2$, ce qui donne :

$$(AM.AM')^2=\left[x_1^2+t^2x_1^2\right]\left[x_2^2+t^2x_2^2\right]=\left(1+t^2\right)^2(x_1x_2)^2=\left(1+t^2\right)^2\frac{\left(1-R^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)^2}=\left(1-R^2\right)^2$$

d'où $AM.AM'=\left|1-R^2\right|=k$.

4-49 : Classique (c)

Dans le repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$ on considère les points $A(-1\,;\,2)$, $B(0\,;\,-3)$ et $C(3\,;\,1)$.

Un graphique complet, montrant l'ensemble de l'exercice sera réalisé.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Calculer les longueurs AB, AC et BC.

c. En déduire une valeur approchée au degré près de l'angle $\widehat{ACB}$.

2. Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ puis $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}$ où H est le pied de la hauteur issue de A, dans le triangle ABC.

3. a. Citer un vecteur normal de la hauteur (AH).

b. Déterminer une équation de (AH).

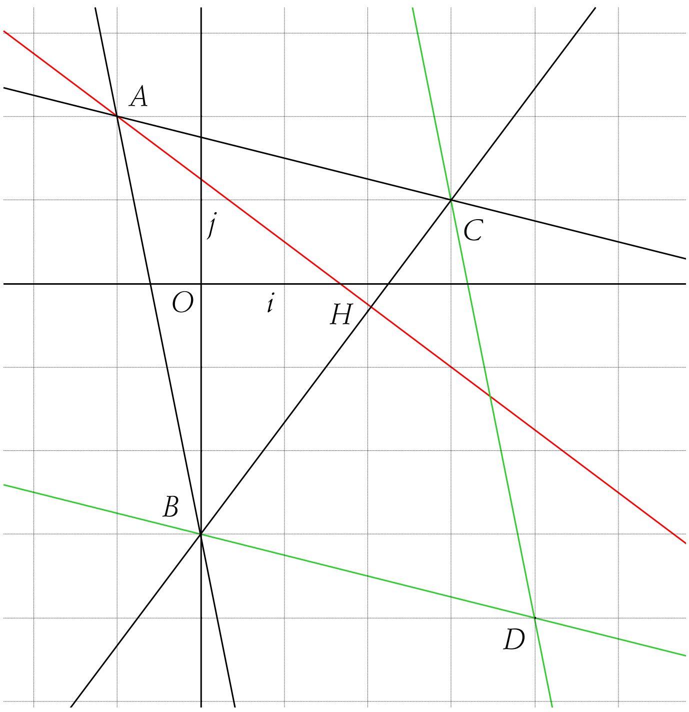
4. a. Déterminer les coordonnées de G, centre de gravité du triangle ABC.

b. G est-il un point de (AH) ?

5. a. Déterminer les coordonnées du point D tel que $ACDB$ soit un parallélogramme.

b. Déterminer l'ensemble des points M du plan $\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\right\|=\frac{1}{2}AD$.

<u>Correction</u>



1. a. $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$.

b. $AB=\sqrt{1+25}=\sqrt{26}$, $AC=\sqrt{16+1}=\sqrt{17}$, $BC=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.

c. Avec AL-Kashi, on a $\cos\widehat{ACB}=\dfrac{AB^2-AC^2-BC^2}{-2AB.AC}=\dfrac{26-17-25}{10\sqrt{17}}=\dfrac{16}{10\sqrt{17}}$ d'où $\widehat{ACB}\approx 67°$.

2. $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix}=12-4=8=\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{CB}$ puisque H est le projeté orthogonal de A sur (BC).

3. a. (AH) est orthogonale à (BC), donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal de la hauteur (AH).

b. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x+1\\y-2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=0\Leftrightarrow 3x+4y-5=0$.

4. a. On cherche les coordonnées de I, milieu de [BC] : $I(3/2,\,-1)$ et on a

$$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}\Rightarrow\begin{pmatrix}x_G+1\\y_G-2\end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix}3/2+1\\-1-2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_G=2/3\\y_G=0\end{cases}.$$

b. Remplaçons x et y par les coordonnées de G dans l'équation de (AH) : $3(2/3)+4(0)-5\neq 0$ donc **non**.

5. a. Il faut que $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_D\\y_D+3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=4\\y_D=-4\end{cases}$.

b. $\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\right\|=\frac{1}{2}AD$: posons $M(x,y)$ et remplaçons en élevant au carré :

$$\left\|\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MB}\right\|^2=\frac{1}{4}AD^2\Leftrightarrow\left\|\begin{pmatrix}3-x\\1-y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-x\\-3-y\end{pmatrix}\right\|^2=\frac{1}{4}\left((4+1)^2+(-4-2)^2\right)\Leftrightarrow(3-2x)^2+(-2-2y)^2=\frac{61}{4},$$

soit en divisant par 2 dans les parenthèses : $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+1\right)^2=\frac{61}{16}$, ce qui correspond à un cercle de centre I et de rayon $\dfrac{\sqrt{61}}{4}$.

5. Relations métriques

5-50 : Un triangle très spécial (c)

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que $BC = 1$ et les angles à la base vérifient $\hat{B}=\hat{C}=72°$; (BD) est la bissectrice de l'angle $\hat{B}$; E est le milieu de [AB] et H celui de [BC] (figure ci-dessous, inutile de la refaire).

1. a. Montrer que les triangles BCD et BDA sont isocèles.

b. En déduire que $BC = BD = AD = 1$.

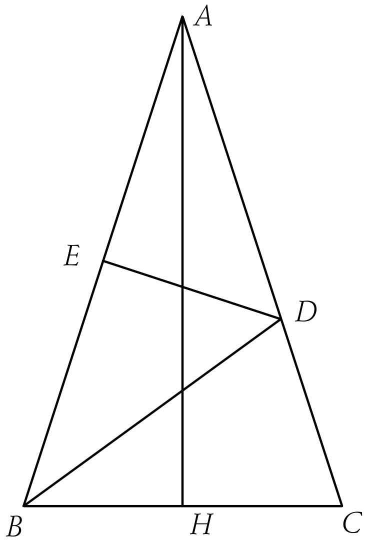
c. En déduire que (ED) est perpendiculaire à (AB).

2. On pose $AB= x$. Exprimer cos 36° et sin 18° en fonction de x en utilisant des triangles rectangles convenables.

3. a. En utilisant la formule $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$, montrer que x vérifie l'équation $x^3-2x^2+1=0$.

b. Développer $(x-1)(x^2-x-1)$ et résoudre l'équation ci-dessus.

4. En déduire en les justifiant les valeurs exactes de cos 36°, sin 36°, sin 18° et cos 18°.



Correction

ABC est un triangle isocèle de sommet principal A tel que BC = 1 et les angles à la base vérifient $\hat{B}=\hat{C}=72\,°$; (BD) est la bissectrice de l'angle $\hat{B}$; E est le milieu de [AB] et H celui de [BC] (figure ci-dessous, inutile de la refaire).

1. a. On a évidemment $\widehat{BAD}=\widehat{DBA}=36°$ donc BDA est isocèle. De même $\widehat{CBD}=36°$ et $\widehat{BCD}=72°$ donc $\widehat{BDC}=180-36-72=72°$, BCD est isocèle.

b. Comme BC = 1, BC = BD = 1 et BD = AD = 1.

c. Comme E est le milieu de [AB], et que ABD est isocèle, DE est la médiatrice de [AB] et est donc perpendiculaire à (AB).

2. Si on prend le triangle ABH, on a BH = 1/2 et AB = x d'où $\cos 72°=\sin 18°=\frac{BH}{AB}=\frac{1/2}{x}=\frac{1}{2x}$. Prenon maintenant le triangle AED : $AE=\frac{x}{2}$, $DA=1$ d'où $\cos 36°=\frac{AE}{AD}=\frac{x}{2}$.

3. a. On remplace α par 18° dans $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$: $\cos 36°=1-2\sin^2 18°$, soit

$$\frac{x}{2}=1-2\frac{1}{4x^2}\Leftrightarrow\frac{x}{2}=\frac{2x^2-1}{2x^2}\Leftrightarrow 2x^3=4x^2-2\Leftrightarrow x^3-2x^2+1=0.$$

b. $(x-1)(x^2-x-1)=x^3-2x^2+1$ d'où les solutions $x_0=1, x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

4. Tous les cosinus et sinus cherchés sont positifs, on doit donc garder $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ce qui donne $\sin 18°=\frac{1}{2x_1}=\frac{1}{1+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ d'où $\cos 18°=\sqrt{1-\sin^2 18°}=\sqrt{1-\frac{5+1-2\sqrt{5}}{16}}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16}}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$, $\cos 36°=\frac{x_1}{2}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ et $\sin 36°=\sqrt{1-\cos^2 36°}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.

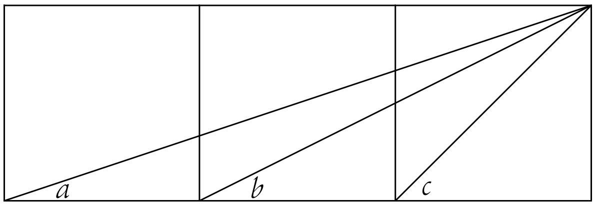
5-51 : cos et sin

Soit un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, A, B, C, D les points de coordonnées respectives (−15 ; −3), (2 ; 14), (−8 ; 14), (10 ; 2).

1. Déterminez une équation du cercle Γ passant par A, B et C et vérifiez que Γ passe par D.

2. Calculez cosinus et sinus des angles $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)$. Que peut-on dire de ces angles ?

5-52 : 3 carrés (c)



Soit les trois carrés ci-dessus. Calculer cos a, sin a, cos b, sin b, sin c et cos c puis $\sin a \cos b + \sin b \cos a$. Qu'en déduit on entre a, b et c ?

Correction

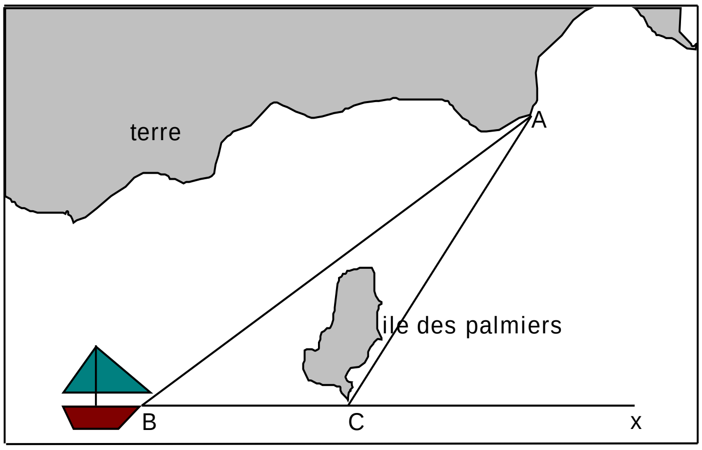
On prend le côté égal à 1, ce qui donne $\cos a = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin a = \frac{1}{\sqrt{10}}, \cos b = \frac{2}{\sqrt{5}}, \sin b = \frac{1}{\sqrt{5}}$. On en déduit $\sin a \cos b + \sin b \cos a = \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(a+b) = \sin\frac{\pi}{4}$ d'où $a+b = \frac{\pi}{4}$.

5-53 : Repérage

Un bateau avance à 24 km/h. Pour aller de B en A, il devra passer par C car la profondeur est insuffisante entre la terre et l'île. A 8 heures il passe en B et le capitaine trouve $\widehat{ABC} = 32°$.

A 8 heures 20 mn le bateau arrive en C. Juste avant de virer vers A le capitaine mesure ACx et trouve 57°.

A quelle heure le bateau arrivera-t'il en A ?



5-54 : Projeté orthogonal (c)

Un parallélogramme $ABCD$ est tel que AB = 15 cm, BC = 12 cm et AC = 13 cm.

1. Faire une figure exacte. Soit b l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

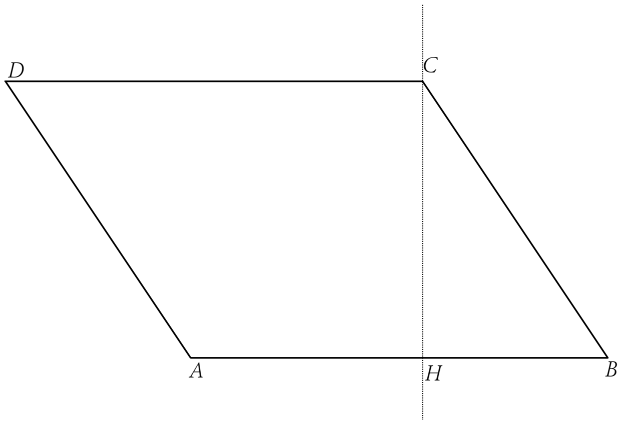
2. Donnez les valeurs exactes de cos b, sin b et tan b. Calculez une valeur approchée de l'angle $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

3. Donnez alors une valeur approchée de l'aire du parallélogramme, puis sa valeur exacte.

4. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). Calculer l'aire du triangle ACH.

Correction

1.



2. $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB.BC.\cos b \Rightarrow \cos b = \dfrac{AC^2 - AB^2 - BC^2}{-2AB.BC} = \dfrac{169-225-144}{-2.15.12} = \dfrac{5}{9}$; comme l'angle est inférieur à 90° on a $\sin b = \sqrt{1-\cos^2 b} = \sqrt{1-\dfrac{25}{81}} = \dfrac{2\sqrt{14}}{9}$ et $\tan b = \dfrac{2\sqrt{14}}{5}$ et finalement $b = \cos^{-1}(5/9) \approx 56{,}25°$.

3. L'aire du parallélogramme $ABCD$ vaut $AB.CH = AB.BC.\sin b = 15.12.\dfrac{2\sqrt{14}}{9} = 40\sqrt{14}$.

4. Pour le triangle ACH on a $BH = BC\cos b \Rightarrow Aire = \dfrac{1}{2}CH.BH = \dfrac{1}{2}BC^2\sin b\cos b = 72.\dfrac{5}{9}.\dfrac{2\sqrt{14}}{9} = \dfrac{80\sqrt{14}}{9}$.

5-55 : Equation trigo (c)

1. Montrer que pour tout réel x, $2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x)$.

2. Résoudre l'équation $\cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x) = -1$. Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

Correction

1. $2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\cos\dfrac{\pi}{3}\cos(3x) - 2\sin\dfrac{\pi}{3}\sin(3x) = \cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x)$.

2. $\cos(3x) - \sqrt{3}\sin(3x) = -1 \Leftrightarrow 2\cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(3x+\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{1}{2}$.

On a donc $\begin{cases} 3x+\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{9} + \dfrac{2k\pi}{3} \\ 3x+\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2k\pi}{3} \end{cases}$.

Les solutions sur le cercle trigonométrique entre 0 et 2π sont $\dfrac{\pi}{9}, \dfrac{\pi}{9}+\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{7\pi}{9}, \dfrac{\pi}{9}+\dfrac{4\pi}{3} = \dfrac{13\pi}{9}$ pour la première ligne et $-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{4\pi}{3} = \pi, -\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{6\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3}$ pour la deuxième.

6. Dans l'espace

6-56 : Plan et plan (c)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On appelle P le plan d'équation $2x - y + 5 = 0$ et P' celui d'équation $3x + y - z = 0$.

1. Montrer que P et P' sont sécants suivant une droite D dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=t \\ y=5+2t \\ z=5+5t \end{cases}$ où t est un réel quelconque.

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier précisément vos réponses :

* D est parallèle au plan R d'équation $-5x+5y-z=0$.

* Soit D' la droite de représentation paramétrique $\begin{cases} x=-3u \\ y=1+u \\ z=2+2u \end{cases}$ où u est un réel quelconque. Les droites D et D' ont un point commun.

Correction

P le plan d'équation $2x-y+5=0$ et P' celui d'équation $3x+y-z=0$.

1. On essaie de résoudre : $\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ 3x+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ 2t-y+5=0 \\ 3t+y-z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=t \\ y=2t+5 \\ z=3t+y=5t+5 \end{cases}$.

2. * **Vrai** : Un vecteur directeur de D est $\vec{u}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$; un vecteur normal à R est $\vec{n}=\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Si D est parallèle à R son vecteur directeur doit être orthogonal à $\vec{n}$, et c'est le cas : $\vec{u}.\vec{n}=-5+10-5=0$.

* **Faux** : Si D et D' ont un point en commun ce point satisfait les deux systèmes d'équation :

$$\begin{cases} x=-3u=t \\ y=1+u=2t+5 \\ z=2+2u=5t+5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-3u \\ 1+u=-6u+5 \\ 2+2u=-15u+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-3u \\ 7u=4 \\ 17u=3 \end{cases}$$

ce qui est manifestement impossible.

6-57 : Distance d'un point à un plan (c)

Soient les points $A(-2\,;1\,;0))$, $B(1\,;2\,;1)$ et $C(0\,;1\,;-1)$ de l'espace.

1. Montrez que A, B et C ne sont pas alignés.

2. Montrez que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Déduisez-en que $x-5y+2z+7=0$ est une équation du plan (ABC).

3. Soit D le point de coordonnées (1 ; 1 ; −2). Vérifiez que D n'est pas dans (ABC).

On cherche la distance de D à (ABC), soit la distance DH où H est le projeté orthogonal de D sur (ABC).

4. a. Montrez que le produit scalaire $\overrightarrow{DH}.\vec{n}$ vaut 1 ; on posera que H a pour coordonnées (x ; y ; z) et on utilisera le fait que H est dans (ABC).

b. En utilisant le fait que $\overrightarrow{DH}$ est colinéaire à $\vec{n}$, montrez que $\overrightarrow{DH}.\vec{n}=DH.\sqrt{30}$.

c. Déduisez-en la distance DH.

5. Proposez une méthode générale permettant de donner la formule donnant la distance d'un point $D(x_D\,;y_D\,;z_D)$ à un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$.

Correction

1. $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1+2\\2-1\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0+2\\1-1\\-1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$; il est impossible que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$.

2. $\overrightarrow{AB}.\vec{n}=3.1-5.1+2.1=0$ et $\overrightarrow{AC}.\vec{n}=2.1-5.0+2.(-1)=0$;

$\overrightarrow{AM}.\vec{n}=\begin{pmatrix}x+2\\y-1\\z\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}=(x+2)-5(y-1)+2z=x-5y+2z+7=0$.

3. On remplace dans $x-5y+2z+7=0$: $1-5-4+7=-1\neq 0$, donc pas dans (ABC).

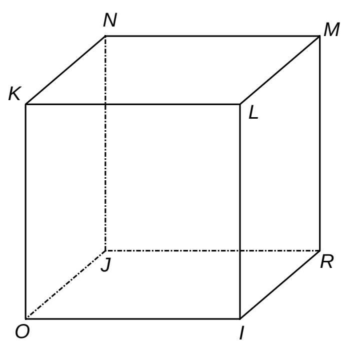
4. a. $\overrightarrow{DH}.\vec{n}=\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z+2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix}=x-1-5y+5+2z+4=x-5y+2z+8=-7+8=1$ puisque $x-5y+2z=-7$.

b. $\overrightarrow{DH}.\vec{n}=\overline{DH}.\|\vec{n}\|=\overline{DH}.\sqrt{1^2+(-5)^2+2^2}=\overline{DH}\sqrt{30}$.

c. Finalement $\|\overrightarrow{DH}\|=|\overline{DH}|=\dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

5. $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, on calcule $\overrightarrow{DH}.\vec{n}=\begin{pmatrix}x-x_D\\y-y_D\\z-z_D\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=ax+by+cz-ax_D-by_D-cz_D=-ax_D-by_D-cz_D-d$; par ailleurs $\overrightarrow{DH}.\vec{n}=\overline{DH}.\|\vec{n}\|\Rightarrow DH=\dfrac{|\overrightarrow{DH}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\dfrac{|ax_D+by_D+cz_D+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6-58 : Distance d'un point à un plan 2 (c)



L'espace étant rapporté à un repère orthonormal de sens direct $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$, on considère le cube de sommets O, I, R, J, N, K, L, M dont une représentation est jointe sur la feuille annexe.

On note A le milieu de l'arête [IL] et B le point défini par : $\overrightarrow{KB}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{KN}$. On appelle P le plan passant par les points O, A et B.

1. a. Préciser les coordonnées des points A et B.

b. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ orthogonal à $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

2. a. Montrer que l'aire du triangle OAB vaut $\dfrac{\sqrt{14}}{6}$.

b. Le point $C\left(1\,;\dfrac{1}{3};1\right)$ appartient-il à P ? Justifier votre réponse.

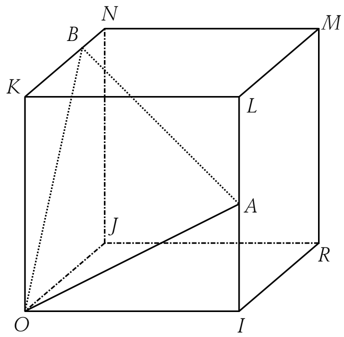
3. On considère le tétraèdre OABK.

a. Montrer que son volume vaut $\frac{1}{9}$.

b. En déduire la distance du point K au plan P.

N.B. : On rappelle que le volume d'un tétraèdre est le tiers du produit de l'aire d'une base par la longueur de la hauteur correspondante.

Correction



A le milieu de l'arête $[IL]$ et B le point défini par $\overrightarrow{KB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{KN}.$ P le plan passant par les points O, A et B.

1. a. A est le milieu de $I(1, 0, 0)$ et $L(1, 0, 1)$, il a pour coordonnées : $\left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$;

B est tel que $\begin{pmatrix} x_B-0 \\ y_B-0 \\ z_B-1 \end{pmatrix}=\frac{2}{3}\begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=0 \\ y_B=2/3 \\ z_B=1 \end{cases}$.

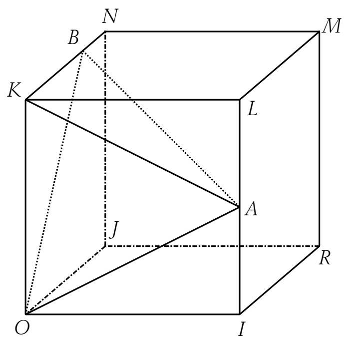
b. On pose $\vec{u}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on effectue les produits scalaires : $\vec{u}.\overrightarrow{OA}=a+\frac{1}{2}c=0, \vec{u}.\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}b+c=0$. On obtient alors en posant $c = t$: $\begin{cases} a=-t/2 \\ b=-3t/2 \\ c=t \end{cases}$ qui sont les équations paramétriques d'une droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix} -1/2 \\ -3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$, lequel est un des vecteurs cherchés (il y en a une infinité possible…).

2. a. Avec Pythagore on a $OA=\frac{\sqrt{5}}{2}$ et $OB=\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$; l'aire du triangle est (avec D le projeté orthogonal de B sur OA) : $\frac{1}{2}OA.BD=\frac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB}$.

On cherche le cosinus :

$$\cos\widehat{AOB}=\frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{OA.OB}=\frac{6}{\sqrt{65}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{6}{\sqrt{65}}\frac{1}{2}=\frac{3}{\sqrt{65}} \Rightarrow \sin\widehat{AOB}=\sqrt{1-\frac{9}{65}}=\sqrt{\frac{56}{65}}=\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}.$$

On termine : $\frac{1}{2}OA.OB.\sin\widehat{AOB}=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{13}}{3}\frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}=\frac{\sqrt{14}}{6}$.



b. $C\left(1\,;\frac{1}{3};1\right)$ appartient à P si $\overrightarrow{OC}$ est orthogonal à $\vec{u}$: $\overrightarrow{OC}.\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\1/3\\1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1/2\\-3/2\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=0$ donc oui.

3. a. Le tétraèdre *OABK* a pour volume $\dfrac{\text{base x hauteur}}{3}$; on peut prendre comme base le triangle *OAK* et comme hauteur *KB*. Ceci nous donne une base de 1/2 et une hauteur de 2/3, soit un volume de $\frac{1}{9}$.

b. Si on prend comme volume $\frac{1}{3}\text{aire}(OAB).\text{distance}(K, OAB)$, on a

$$\frac{1}{3}\frac{\sqrt{14}}{6}d(K, OAB)=\frac{1}{9}\Rightarrow d(K, OAB)=\frac{2}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{7}.$$

6-59 : Plan et tétraèdre

Soit, dans l'espace, le plan (P) d'équation $3x-2y+5z-7=0$, *A* le point de coordonnées (6, −5, 11) et *H* son projeté orthogonal sur le plan (P).

1. Déterminer un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P). Peut-on trouver trois points *B*, *C*, *D* de (P) tels que : $\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$?

2. Déterminer les coordonnées de *H*, calculez la distance *AH*.

3. Vérifiez que le point *E*(3, 1, 0) est dans (P) ; déterminez alors deux points *F* et *G* de (P) tels que $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ soient orthogonaux à $\vec{n}$ et orthogonaux entre eux (attention vous devez avoir une infinité de possibilités). Calculer le volume du tétraèdre *AEFG*.

6-60 : Tétraèdre (Bac S 2003, Polynésie)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ on considère les points *A*, *B*, *C* et *D* de coordonnées respectives : $A(0\,;0\,;3), B(2\sqrt{2}\,;0\,;-1), C(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{6}\,;-1), D(-\sqrt{2}\,;\sqrt{6}\,;-1)$.

1. Montrer que *ABCD* est un tétraèdre régulier (les longueurs de tous ses côtés sont égales).

2. On note *R*, *S*, *T* et *U* les milieux respectifs des arêtes [*AC*], [*AD*], [*BD*] et [*BC*] ; démontrer que *RSTU* est un parallélogramme de centre *O*.

3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.

6-61 : Routes aériennes (Bac S 2000,Centres ét.)

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien, chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ d'unité 1 km. Le plan $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ représente le sol. Les deux routes aériennes à contrôler sont représentées par deux droites (D_1) et (D_2) dont on connaît les représentations paramétriques :

$$(D_1):\begin{cases} x=3+a \\ y=9+3a \\ z=2 \end{cases} \text{ et } (D_2):\begin{cases} x=0,5+2b \\ y=4+b \\ z=4-b \end{cases}.$$

1. a. Calculer les coordonnées des points de (D_1) correspondant à $a = 0$ (appelé A) et $a = -1$; déterminer un vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}$ de (D_1). Procéder de même pour (D_2) : coordonnées des points correspondants à $b = 0$ (appelé B) et $b = -1$ puis vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ de (D_2). Faire une figure (on prendra 1 cm comme unité).

b. Prouver que les droites (D_1) et (D_2) ne sont pas coplanaires (vérifier que les vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires et qu'aucun point de (D_1) n'est sur (D_2)).

2. On veut installer au sommet S de la tour de contrôle, S de coordonnées (3 ; 4 ; 0,1), un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par une droite notée (R). Soit (P_1) le plan contenant S et (D_1) et (P_2) celui contenant S et (D_2).

a. Montrer que (D_2) est sécante à (P_1) (on déterminera le vecteur $\overrightarrow{AS}$ et on cherchera α, β et b tels que pour M appartenant à (D_2) on ait $\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{AS}$).

b. Montrer que (D_1) est sécante à (P_2).

c. Un technicien affirme qu'il est possible de choisir la direction de (R) pour que cette droite coupe chacune des droites (D_1) et (D_2). Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier.

6-62 : Tétraèdre et p.s

On se donne un tétraèdre régulier $ABCD$ de centre de gravité O et de côté a.

1. Montrer que O est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

2. Montrer que les triangles OAB, OBC, OCA, OAD, OBD et OCD sont isométriques. Soit θ l'angle $\widehat{AOB}$.

3. Calculer $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)^2$ en fonction de θ et de a. Déduisez-en $\cos\theta$ puis θ à 10^{-2} près en degrés.

6-63 : Espace / VF (c)

VRAI-FAUX, pas de justification.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(0 ; 4 ; -1)$, $B(-2 ; 4 ; -5)$, $C(1 ; 1 ; -5)$, $D(1 ; 0 ; -4)$ et $E(2 ; 2 ; -1)$.

a. Une équation du plan (ABC) est $2x + 2y - z - 9 = 0$.

b. Le point E est projeté orthogonal de D sur (ABC).

c. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

d. Le point $\Omega(-1 ; 2 ; -3)$ est le centre d'une sphère passant par A, B, C et D.

Correction

a. **Vrai** : il suffit de vérifier que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux à un vecteur normal à (ABC), soit $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$:

$$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=-4+0+4=0 \text{ et } \overrightarrow{AC}.\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=2-6+4=0$$

b. **Faux** : il faut que E soit sur (ABC) : $2.2 + 2.2 -(-1) - 9 = 0$, ok. Il faut également que $\overrightarrow{ED}$ soit colinéaire à $\vec{n}$: $\overrightarrow{ED}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-3\end{pmatrix}=t\vec{n}=t\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}-1=2t\\-2=2t\\-3=-t\end{cases}$ ce qui est manifestement impossible.

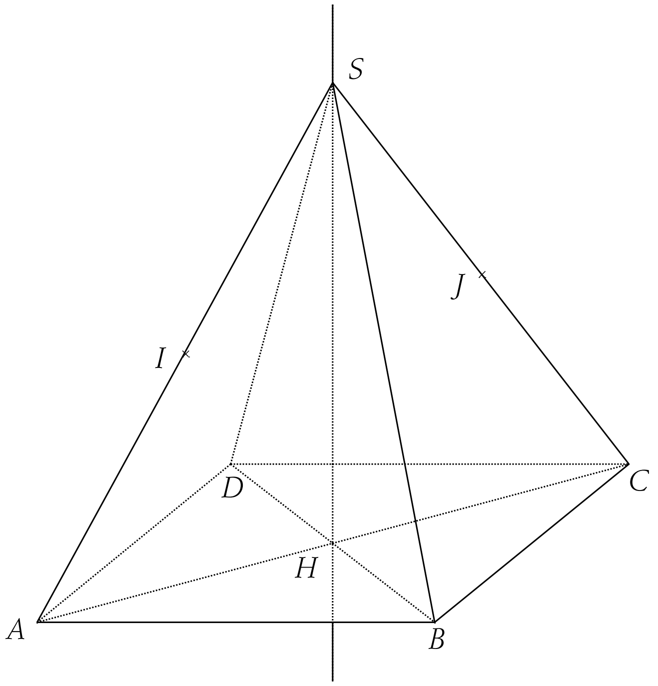
c. **Faux** : on calcule $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=0+0-4\neq 0$.

d. **Vrai** : y'a pas le choix, il faut calculer les quatre distances, ou plutôt leurs carrés : $\Omega A^2=1+4+4=9$, $\Omega B^2=1+4+4=9$, $\Omega C^2=4+1+4=9$, $\Omega D^2=4+4+1=9$.

6-64 : Pyramide (c)

SABCD est une pyramide régulière. Sa base *ABCD* est un carré de côté a et de centre H. La hauteur $[SH]$ mesure $2a$. On appelle I le milieu de $[SA]$ et J le milieu de $[SC]$.

On rappelle que, dans une pyramide régulière, toutes les faces latérales sont des triangles isocèles isométriques.



Partie I : Les tracés demandés dans cette partie se feront sur la figure de la page suivante que vous joindrez à votre copie.

1. Dessiner l'intersection du plan (BIJ) avec les faces SAB et SBC.

2. La droite (IJ) coupe le segment $[SH]$ en K. Montrer que (BK) et (SD) sont sécantes.

3. On appelle L le point d'intersection des droites (BK) et (SD). Dessiner l'intersection du plan (BIJ) avec les faces SAD et SDC.

4. Tracer en rouge la section de la pyramide $SABCD$ par le plan (BIJ).

Partie II

1. Calculer la longueur AC. En déduire la longueur IJ.

2. Montrer que la longueur SA est égale à $\dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

3. Calculer, en fonction de a, les longueurs BI et BJ.

4. Déterminer à un degré près la mesure de l'angle $\widehat{IBJ}$.

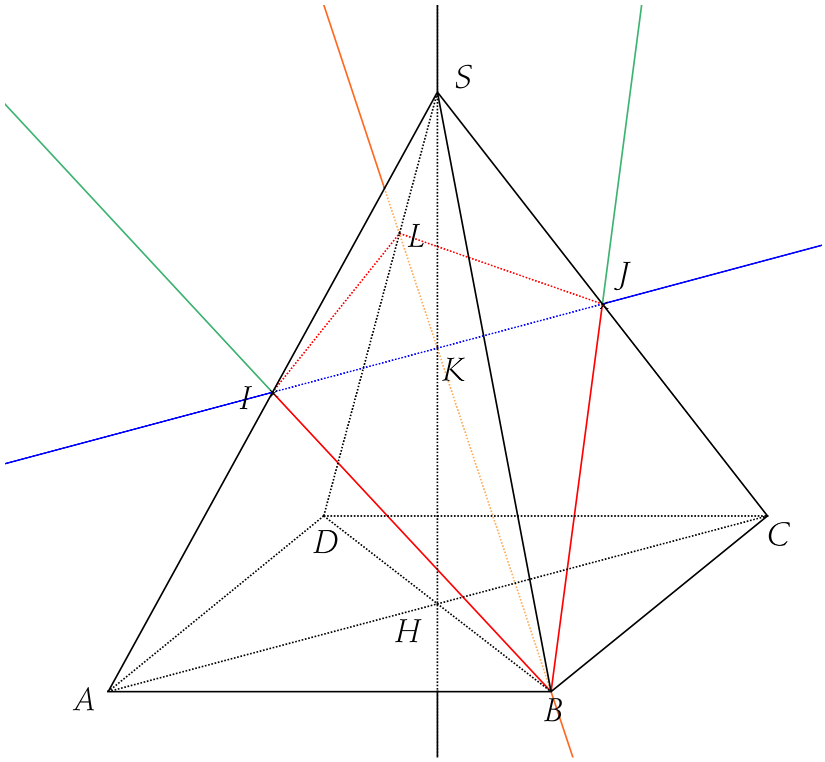
Correction

1. En vert.

2. (IJ) coupe $[SH]$ en K. (BK) et (SD) sont sécantes : (BK) est dans le plan BSD de même que (SD) ; elles ne sont pas parallèles sinon BSD ne serait pas un triangle…

3. Intersection du plan (BIJ) avec les faces SAD et SDC : comme (BK) est dans le plan (BIJ), et qu'elle coupe (SD) en L cette intersection est constituée des segments $[LI]$ et $[LJ]$.

4. En rouge.



Partie II

1. $AC = a\sqrt{2}$. $IJ = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (Thalès).

2. Pythagore : $SA^2 = AH^2 + HS^2 = \dfrac{1}{4}AC^2 + HS^2 = \dfrac{1}{2}a^2 + 4a^2 = \dfrac{9a^2}{2} \Rightarrow SA = \dfrac{3a}{\sqrt{2}} = \dfrac{3a\sqrt{2}}{2}$.

3. On peut par exemple se fixer un repère en prenant comme origine H et comme vecteurs directeurs $\overrightarrow{HA}$, $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{HK}$: on a alors $A\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right)$, $B\left(0, \dfrac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $S(0, 0, 2a)$ d'où $I\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{4}, 0, a\right)$ et la longueur BI :

$$BI^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{4} - 0\right)^2 + \left(0 - \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (a-0)^2 = \frac{2a^2}{16} + \frac{2a^2}{4} + a^2 = \frac{13a^2}{8} = \frac{26a^2}{16} \Rightarrow BI = a\frac{\sqrt{26}}{4}.$$

4. On en déduit avec Al-Kashi : $\cos\left(\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}\right) = \dfrac{IJ^2 - BI^2 - BJ^2}{-2BI.BJ} = \dfrac{\frac{2}{4}a^2 - \frac{26}{16}a^2 - \frac{26}{16}a^2}{-2\left(a\frac{\sqrt{26}}{4}\right)^2} = \dfrac{11}{13}$ d'où $\widehat{IBJ} \approx 32{,}2°$.